# 7 Zastosowania Tw. Baire'a

Banach zauważył, że opracowane w teorii funkcji metody topologiczne można zastosować do uzyskania paru podstawowych rezultatów w teorii operatorów liniowych. Zacznijmy od definicji.

**Definicja.** Zbiór, którego domknięcie ma puste wnętrze nazywamy zbiorem **nigdziegęstym**. **Zbiory pierwszej kategorii** -to przeliczalne sumy zbiorów nigdziegęstych. Pozostałe zbiory nazywamy zbiorami drugiej kstegorii.

Zbiór, który nie jest nigdziegęsty jest gęsty w pewnym otoczeniu jakiegoś punktu (to uzasadnia nazwę). Żaden zbiór otwarty niepusty $U$ nie zawiera się w domknięciu zbioru nigdziegęstego $E$, więc w każdym takim $U$ zawiera się punkt $x_0$ spoza $\bar{E}$. To oznacza, że pewne otoczenie $x_0$ jest rozłączne z $E$. Tak więc zbiór $E$ jest nigdziegęsty $\Leftrightarrow$ gdy w każdym niepustym zbiorze otwartym zawiera się jego niepusty podzbiór otwarty rozłączny z $E$. W przestrzeniach metrycznych zamiast "niepusty zbiór otwarty" możemy użyć w tej charakteryzacji słowa "kula". Ta obserwacja jest pomocna w dowodzie następującego twierdzenia R. Baire'a.

**Twierdzenie (Baire).** Przestrzeń metryczna zupełna jest zbiorem II kategorii. Co więcej, zbiory I kategorii mają w niej puste wnętrze (są brzegowe).

Dla dowodu wystarczy wykazać, że gdy $E = \bigcup_{n-1}^{\infty} E_n$, gdzie $\forall_n\, int(\bar{E}_n) = \emptyset$, to w dowolnie wybranej kuli $B_0 = B(x_0, r)$ jest punkt $x_*$ nienależący do $E$ (bo wnętrze $E$, jako zbiór otwarty zawarty w $E$ jest albo zbiorem pustym, albo sumą pewnej ilości kul.). Z nigdziegęstości $E_1$ istnieje zawarta w $B_0$ kula $B_1 := B(x_1, r_1)$ rozłączna z $E_1$. Możemy w razie potrzeby zmniejszyć promień tak, by było $r_1 < 1$ oraz by $\overline{B_1} \subset B_0$ była rozłączna z $E_1$. Ta kula $B_1$ zawiera kulę $B_2$ o promieniu $r_2 \leqslant \frac{1}{2}$, której domknięcie jest rozłączne z $E_2$. Kontynuując rekurencyjnię tę procedurę, otrzymamy zstępujący ciąg rozłącznych z $E_n$ kul domkniętych $\overline{B_n}$ o promieniach $r_n$ zmierzających do zera. Dzięki zupełności, ich przecięcie jest niepuste i gdy $x_* \in \bigcap_n \overline{B_n}$, to $x_* \notin E$. $\square$

(Co ciekawe, teza twierdzenia Baire'a zachodzi też w pewnych przestrzeniach niemetryzowalnych $X$- a mianowicie w tzw. *przestrzeniach zupełnych w sensie Čecha.* Są to takie przestrzenie całkowicie regularne (=$T_{3\frac{1}{2}}$), które są podzbiorami typu $G_\delta$ w pewnej swojej kompaktyfikacji będącej przestrzenią Hausdorffa. -np. w kompaktyfikacji $\beta X$.)

**Definicja.** Zbiór $A$ w przestrzeni unormowanej $(X, \|\cdot\|)$ nazywamy **ograniczonym**, gdy $\sup\{\|a\| : a \in A\} < \infty$. Natomiast mówimy, że $A$ jest **słabo ograniczony** , gdy dla każdego funkcjonalu liniowego ciągłego $\phi \in X'$ jest $\sup\{|\phi(a)| : a \in A\} < \infty$.

Oczywiście, zbiory ograniczone są słabo ograniczone, gdyż zawsze $|\phi(x)| \leqslant \|\phi\|\|x\|$. Implikacja przeciwna wydaje się mało prawdopodobna, ale jednak zachodzi! mamy bowiem dwa fundamentalne wyniki:

**Twierdzenie (Banach - Steinhaus).** Ciąg operatorów $T_n \in \mathcal{B}(X, Y)$ punktowo ograniczony na przestrzeni zupełnej $X$ jest ograniczony jednostajnie (tzn. w normie operatorowej) Zamiast punktowej ograniczoności na całej $X$ -wystarczy założyć ograniczoność w punktach jakiegoś zbioru drugiej kategorii.

**Zasada jednostajnej ograniczoności.** Zbiory słabo ograniczone w (każdej) przestrzeni unormowanej są ograniczone w sensie normy.

**Dowody.** Dla dowodu pierwszego twierdzenia zdefiniujmy zbiory

$$A_k := \{x \in X : \forall_n \|T_n(x)\| \leqslant k\}.$$

Jako przecięcia (po $n \in \mathbb{N}$) przeciwobrazów zbioru domkniętego $[0, k]$ przez funkcje ciągłe $x \mapsto \|T_n(x)\|$ -są to zbiory domknięte. Punktowa ograniczoność oznacza, że $\forall_x \exists_k \forall_n\ \|T_n x\| \leqslant k$, czyli oznacza ona, że $\bigcup_k A_k = X$. Ale w myśl twierdzenia Baire'a $X$ nie może być sumą przeliczalną zbiorów domkniętych o pustych wnętrzach. Dla pewnego $k \in \mathbb{N}$ mamy więc zbiór $A_k$ zawierający jakąś kulę (bez straty ogólności -domkniętą): $\bar{B}(x_0, R)$. Innymi słowy,

$$\|x - x_0\| \leqslant R \Rightarrow \|T_n(x)\| \leqslant k \quad (\forall_n).$$

Stąd już łatwo wywnioskować, że $\|T_n\| \leqslant \frac{2k}{R}$, czyli naszą tezę.

Faktycznie, chcemy oszacować $\|T_n(z)\|$ gdy $\|z\| = 1$. Wtedy $Rz + x_0 \in \bar{B}(x_0, R)$ i w konsekwencji, $\|T_n(x_0 + Rz)\| \leqslant k$. Środek kuli też do niej należy, więc $\|T_n(-x_0)\| = \|T_n(x_0)\| \leqslant k$ i stosując nierówność trójkąta dla normy sumy $T_n(x_0+Rz)-T_n(x_0)$ otrzymamy $\|T_n(Rz)\| \leqslant 2k$. Dzięki jednorodnosci, wynika stąd teza.

W sformułowaniu Zasady Jednostajnej Ograniczoności może budzić pewien niepokój brak założenia o zupełności. Ale zupełną przestrzenią jest zawsze $\mathcal{B}(X, \mathbb{K}) = X'$ -ze względu na zupełność rozważanego ciała skalarów. Gdyby zbiór $A$ nie był ograniczony, to pewien ciąg wektorów $a_n \in A$ miałby $\|a_n\| \to \infty$. Zanurzenie kanoniczne $X$ w drugą dualną przypisuje wektorom $a_n$ funkcjonały $j(a_n)$ -oznaczmy je przez $T_n$. Czyli $T_n(\phi) = \phi(a_n)$. Są to operatory liniowe ciągłe na przestrzeni dualnej $X'$ i punktowo ograniczone, bo $A$ jest, z założenia, słabo ograniczony. Twierdzenie Banacha-Steinhausa implikuje ograniczoność: $\sup_n \|T_n\| < \infty$. Ale z dualnego wzoru na normę (= izometryczność $j : X \to X''$) mamy sprzeczność, bo $\|T_n\| = \|a_n\| \to \infty$. $\square$

W dalszym ciągu wykładu $X, Y$ będą przestrzeniami unormowanymi.

**Definicja.** Ciąg operatorów $T_n \in \mathcal{B}(X, Y)$, nazywamy **silnie zbieżnym do operatora** $T$, gdy

$$\forall_{x \in X} \|Tx - T_n x\| \to 0, \quad \texttt{co zapisujemy} \quad T_n \to T \ (SOT).$$

"SOT" oznacza "Strong Operator Topology". Jest to zbieżność w topologii rodziny seminorm $p_x : \mathcal{B}(X, Y) \ni T \to p_x(T) := \|Tx\|$, indeksowanej przez $x \in X$.
Z kolei, **słaba zbieżność**, onzaczana $T_n \to T \ (WOT)$ to zbieżność w topologii (WOT) określonej przez seminormy $p_{\phi,x}(T) := |\phi(Tx)|$. Zbiorem indeksów dla tej rodziny seminorm jest iloczyn kartezjański $X \times Y'$. Tak więc,

$$T_n \to T \ (WOT) \ \Leftrightarrow \forall_{x \in X, \phi \in Y'} \ \phi(T_n x - Tx) \to 0.$$

Na przykład, w przestrzeni Hilberta $H$ taka słaba zbieżność dla $T_n \in \mathcal{B}(H)$ oznacza, że $\forall_{x,y \in H} \langle T_n x, y\rangle \to \langle Tx, y\rangle$.

**Własności.** Implikacje dla zbieżności: jednostajna $\Rightarrow$ silna $\Rightarrow$ słaba zachodzą, lecz żadna z przeciwnych nie ma miejsca (np. w nieskończenie wymiarowych przestrzeniach Hilberta). Granice słabo (odp. silnie) zbieżnego ciągu operatorów liniowych ograniczonych -jest operatorem liniowym ograniczonym.

Faktycznie, implikacje wynikają z nierówności: $\|T_n x - Tx\| \leqslant \|T_n - T\|\|x\|$ oraz $|\phi(T_n x - Tx)| \leqslant \|\phi\|\|T_n x - Tx\|$. Przykładem ciągu silnie zbieżnego, lecz nie w normie operatorowej jest ciąg projekcji ortogonalnych $P_n$ na $M_n := \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_n\}$ dla pewnej bazy ortonormalnej w przestrzeni Hilberta $H$. (SOT)-$\lim P_n = I$ (identyczność), z twierdzenia o abstrakcyjnym szeregu Fouriera. Natomiast $\|I - P_n\| = 1 \not\to 0$, bo $I - P_n$ jest projekcją na $M_n^{\perp}$.

Jeśli $\psi$ jest niezerowym funkcjonałem na $X$, zaś ciąg wektorów $y_n \in Y$ jest słabo zbieżny do zera, lecz nie w normie (np. ciąg ortonormalny), to ciąg operatorów określonych wzorem $T_n(x) := \psi(x) y_n$ jest słabo, lecz nie silnie zbieżny do zera (proszę sprawdzić).

Ograniczoność granicy ciągu operatorow liniowych wynika z tw. Banacha-Steinhausa (jej liniowość jest bardzo łatwa w dowodzie).

Innym wnioskiem z tego twierdzenia jest rozbieżność szeregów Fouriera dla "większości" funkcji ciągłych i okresowych w przedziale $[-\pi, \pi]$. Większość oznacza tu zbiór II kategorii. Funkcjonały brania wartości w punkcie $t = 0$ z $n$-tych sum częściowych szeregu Fouriera funkjcji $f$ dane są wzorem $S_n[f](0) =$

$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)D_n(t)\,dt$, gdzie $D_n$, to jądro Dirichleta, $D_n(t) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin\frac{t}{2}}$. Normy tych funkcjonałów na przesrzeni $C_{per}[0,2\pi]$ funkcji ciągłych i okresowych (z tw. Riesza o reprezentacji), to normy $L^1$ z funkcji $D_n$ i jak nietrudno sprawdzić (np. wykorzystując rozbieżność całki $\int_0^\infty |\frac{\sin t}{t}|\,dt$), stanowią one ciąg nieograniczony ( o asymptotyce $\log(n)$). Zbieżność "punktowa w punktach $f$" tego ciągu może więc zachodzić tylko dla $f$ ze zbioru pierwszej kategorii.

Innym nietrywialnym zastosowaniem twierdzenia Baire'a jest następujące

**Twierdzenie Banacha o odwzorowaniu otwartym.** Gdy $X, Y$ są przestrzeniami Banacha, to każdy operator liniowy ciągły i surjektywny $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ jest odwzorowaniem otwartym. Otwartość oznacza tu, że obrazy zbiorów otwartych są otwarte.

Inną ważną interpretację otwartości operatora $T$ podam w następnym wykładzie. Na chwilę przyjmijmy, że udowodniliśmy następujący Lemat:

**Lemat "o usuwaniu domknięć".** Przy założeniach twierdzenia, jeżeli domknięcie obrazu $T(K_X(0,1))$ kuli jednostkowej w $X$ zawiera kulę $K_Y(0,R)$ o promieniu $R$ w przestrzeni $Y$, to sam obraz kuli powiększonej $K_X(0,2)$ też zawiera też tę kulę $K_Y(0,R)$.

Wtedy dowód twierdzenia Banacha przebiega następująco: Ponieważ $X$ jest sumą kul $K_n := K_X(0,n)$, a obraz sumy jest sumą obrazów, tu równą $Y$, więc z twierdzenia Baire'a dla pewnego $m \in \mathbb{N}$ domknięcie obrazu $T(K_m)$ ma niepuste wnętrze. Jak się łatwo przekonać, to wnętrze -jest to zbiór absolutnie wypukły, więc zawierający zero. Stąd dla pewnego $r > 0$ mamy $\overline{T(K_m)} \supset K_Y(0,r)$. Korzystając z jednorodności $T$ i z homeomorfizmu $x \mapsto cx$ gdy $c \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, wnioskujemy, (dla $c = \frac{1}{m}, R = cr$), że $\overline{T(K_1)} \supset K_Y(0,R)$. Teraz stosujemy lemat, podwajając promień -pozbywamy się domknięcia, otrzymując $T(K_2) \supset K_Y(0,R)$, lub -co równoważne, $K_Y(0,\frac{R}{2}) \subset T(K_1)$ oraz $K_Y(0,\frac{R\delta}{2}) \subset T(K_\delta)$. Stąd już łatwo wnioskujemy o otwartości obrazu $T(U)$ dla dowolnego zbioru otwartego $U$. Gdy $y \in T(U)$, to dla pewnego $x \in U$ jest $y = T(x)$. Z otwartości $U$, $\exists_{\delta>0}\, K(x,\delta) = x + K_\delta \subset U$. Stąd $T(x+K_\delta) = y + T(K_\delta) \supset y + K_Y(0,\frac{R\delta}{2})$. Tu korzystamy z liniowości $T$. tak więc $y \in int(T(U))$. $\square$

Szczegóły dowodu lematu i komentarze do powyższego dowodu przedstawię za tydzień.

Z twierdzenia o odwzorowaniu otwartym wynikają następne dwa twierdzenia Banacha:

**Twierdzenie o izomorfizmie.** Jeżeli mamy przestrzenie Banacha $X, Y$ i bijekcję liniową ciągłą $T : X \to Y$, to odwzorowanie odwrotne $T^{-1} : Y \to X$ też jest ciągłe.

Faktycznie, ciągłość operatora $S := T^{-1}$ jest równoważna temu, że preciwobraz $S^{-1}[U]$ od dowolnego zbioru otwartego $U$ w przestrzeni $X$ jest otwarty. Ale z elementarnej teorii mnogości, ten przeciwobraz jest równy obrazowi zbioru $U$ przez $T$.

**Twierdzenie o wykresie domkniętym.** Jeżeli dla przestrzeni Banacha $X, Y$ wykres odwzorowania liniowego $T : X \to Y$ jest zbiorem domkniętym w topologii produktowej, to $T$ jest ciągłe.

Przestrzeń $X \times Y$ możemy unormować przyjmując $\|(x,y)\| := \|x\| + \|y\|$. Wykres $T$, to zbiór $\Gamma_T := \{(x,y) \in X \times Y : x \in X, y = T(x)\}$. Jest to podprzestrzeń liniowa w $X \times Y$. Jeśli jest ona domknięta, to jest zupełna. Mamy bijekcję liniową ciągłą: $P_X : \Gamma_T \ni (x,Tx) \to x \in X$. Więc i bijekcja odwrotna jest ciągła. Ale $P_X^{-1}(x) = (x,T(x))$, więc obłożenie tej bijekcji przez rzut $P_Y$ z iloczynu kartezjańskiego na przestrzeń $Y$ daje odwzorowanie $T$ i jako złożenie odwzorowań ciągłych- jest ciągłe. $\square$