9 Zastosowania 3 Twierdzeń Banacha

Z poprzedniego wykładu pozostał nam do wykazania najbardziej techniczny fragment, czyli:

Lemat "o usuwaniu domknięć". Przy założeniach twierdzenia (= zupełność przestrzeni X, liniowość, ciągłość T), jeżeli domknięcie obrazu $T(K_X(0,1))$ kuli jednostkowej w X zawiera kulę $K_Y(0,R)$ o promieniu R w przestrzeni Y, to sam obraz kuli powiększonej $K_X(0,2)$ też zawiera też tę kulę $K_Y(0,R)$.

Najpierw jednak podajmy pewną interpretację jego założeń i zestawmy to z analogiczną interpretacją otwartości operatora T. Nie wszyscy o tym wiedzą, a to dość ważne:

Otwartość $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ oznacza dokładnie tyle, że istnieje pewna stała $C > 0$ taka, że dla każdego $y \in Y$ równanie

$$Tx = y \tag{1}$$

ma rozwiązanie $x \in X$ spełniające warunek

$$\|x\| \leqslant C\|y\|. \tag{2}$$

Natomiast założenia lematu "o usuwaniu domknięć" są równoważne temu, że istnieje pewna stała $C > 0$ taka, że dla każdego $y \in Y$ i dla każdego $\epsilon > 0$ równanie (1) ma "przybliżone z dokładnością ϵ rozwiązanie" $x \in X$ spełniające oszacowanie (2), czyli takie x spełniające to oszacowanie, że $\|y - Tx\| < \epsilon$.

Faktycznie -prześledźmy, co te warunki oznaczają w przypadku, gdy $\|y\| < \rho := \frac{r}{c}$. Znajdujemy wtedy dla równania (1) rozwiązanie x (odp. jego "rozwiązanie x_ϵ z dowolnie zadaną dokładnością rzędu ϵ) o normie $\|x\| < r$. Oznacza to, że obraz kuli $K_X(0,r)$ (odpowiednio -że domknięcie obrazu tej kuli) zawiera kulę $K_Y(0,\rho)$. W pierwszym przypadku, jak już zauważyliśmy w dowodzie twierdzenia Banacha o odwzorow. otwartym (z założoną prawdziwością Lematu) -implikuje to otwartość obrazów dowolnych zbiorów otwartych w X.

Dowód Lematu. Pomysł Banacha polegał na skonstruowaniu rozwiązania dokładnego przy użyciu rozwiązań przybliżonych. Proces ten będzie polegał na tym, ze gdy otrzymamy jakieś rozwiązanie przybliżone, to powstaje jakiś (mozliwe, że niezerowy) błąd i w nastęnym kroku zajmiemy się przybliżaniem tego będu itd. Sumowanie otrzymanych korekt (dzięki zbieżności bezwzglednej powstałego szeregu korekt) da na końcu rozwiązanie dokładne. Kluczem jest tu odpowiednie zmniejszanie miary dopuszczalnego błędu (czyli ϵ).

Możemy bez zmniejszania ogólności zastąpić operator T przez $\frac{1}{R}T$, wtedy założenie Lematu przyjmie postać:

$$K_Y(0,1) \subset \overline{T(K_X(0,1))}.$$

Weźmy teraz dowolny wektor y_0 z kuli jednostkowej $K_Y(0,1)$. Dla $\epsilon = \frac{1}{2}$ znajdziemy $x_1 \in K_X(0,1)$, dla którego $\|y_0 - Tx_1\| < \frac{1}{2}$. Stosując izomorfizm liniowy "skracanie wektora o połowę": $X \ni x \to \frac{1}{2}x \in X$ w przestrzenni X i jego odpowiednik w Y widzimy, że

$$K_Y(0,\frac{1}{2}) \subset \overline{T(K_X(0,\frac{1}{2}))}.$$

Tę inkluzję stosujemy do wektora $y_1 := y_0 - Tx_1$, znajdując dla $\epsilon = \frac{1}{4}$ wektor $x_2 \in K(0,\frac{1}{2})$, dla którego norma wektora $y_2 := y_1 - Tx_2$ spełnia $\|y_2\| < \frac{1}{4}$. Kontynuując- otrzymujemy dwa ciągi: wektory $x_n \in X$ oraz wektory y_n takie, że

$$\|x_n\| < 2^{-n+1}, y_n = y_0 - (Tx_1 + \ldots + Tx_n) \quad \texttt{oraz} \quad \|y_{n-1} - Tx_n\| < 2^{-n}.$$

Ponieważ $\sum \|x_n\| < \infty$, zupełność przestrzeni X implikuje zbieżność szeregu $x_* = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ oraz nierówność $\|x_*\| \leqslant \sum \|x_n\| < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$. Ponieważ $\|y_0 - T(\sum_{k=1}^{n} x_k)\| < 2^{-(n+1)}$, otrzymujemy $y_0 = T(x_*)$ oraz $x_* \in K_X(0,2)$.$\square$

Teraz możemy przejść do wybranych zastosowań. Najwięcej będzie dotyczyć twierdzeń o izomorfizmie i o wykresie domkniętym. Po pierwsze, ciągłość operatora T^{-1} określonego (dla injektywnego $T \in \mathcal{B}(X,Y)$) na podprzestrzeni $T(X) \subset Y$ oznacza, że dla pewnej stałej M jest $\|T^{-1}y\| \leqslant M\|y\|$ dla wszystkich $y \in Y$. Podstawiając $y = Tx$ otrzymamy $\|x\| \leqslant M\|Tx\|$, czyli $\|Tx\| \geqslant \frac{1}{M}\|x\|$ -tak zwane "oszacowanie od dołu" Największym ograniczeniem od dołu jest $\inf\{\|Tx\| : \|x\| = 1\}$.

Wniosek 1. Gdy X, Y są zupełne, zaś $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ jest injekcją, to obraz T, czyli zbiór $T(X)$ jest podprzestrzenią domkniętą wtedy i tylko wtedy, gdy T jest ograniczone od dołu, czyli gdy $\inf\{\|Tx\| : \|x\| = 1\} > 0$.

Faktycznie, gdy $T(X)$ jest domknięta -to jest zupełna i wówczas $T : X \to T(X)$ jest w przypadku injekcji- izomorfizmem, Na odwrót, ograniczoność od dołu w połączeniu z zupełnością X implikuje zupełność $T(X)$, która z kolei daje donkniętość.

Wniosek 2. Stosując normę ilorazową w przestrzeni $X/\ker(T)$ można wykazać, że dla dowolnego $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ domkniętość $T(X)$ jest równoważna warunkowi

$$\inf\{\|Tx\| : \mathtt{dist}(x, \ker T) = 1\} > 0.$$

Wniosek 3. Gdy dwie normy $\|\cdot\|$ oraz $\|\cdot\|_*$ na tej samej przestrzeni wektorowej X są porównywalne - czyli gdy dla pwenej stałej M jest $\forall_{x\in X}\|x\|_* \leqslant M\|x\|$, przy czym w każdej z nich X jest zupełna, to normy te są równoważne.

(stosujemy Wniosek 1. lub bezpośrednio Twierdzenie o Izomorfizmie do identyczności $I : (X, \|\cdot\|) \to X, \|\cdot\|_*)$.

Wniosek 4. Gdy operator $M_\phi : L^p(\mu) \ni f \to \phi f$ mnożenia przez funkcję mierzalną ϕ przekształca przestrzeń $L^p(\mu)$ w podzbiór tej samej przestrzeni, to jest on ograniczony oraz gdy ponadto z warunku $\mu(E) > 0$ wynika, że istnieje podzbiór mierzalny $E_1 \subset E$ taki, że $0 < \mu(E_1) < \infty$, to $\phi \in L^\infty(\mu)$

Tu wystarczy stosować twierdzenie o wykresie domkniętym, a w drugim przypadku zauważyć, że funkcja charakterystyczna zbioru E_1 należy do $L^p(\mu)$, co pozwoli na wykazanie, że wtedy $\|M_\phi\| = \|\phi\|_\infty$. Tu bierzemy $E_1 := \{t : |\phi(t)| > C\}$, gdzie C jest największe (supremum) o tej własności, że $\mu(E_1) > 0$. Wtedy $C = \|\phi\|_\infty$.

Wniosek 5. Jeśli ciąg wektorów e_n w przestrzeni Banacha X stanowi bazę Schaudera w X, to funkcjonały e_j^* współrzędnych w tej bazie są ciągłe, gdzie dla $x \in X$ mamy

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} e_j^*(x)e_j.$$

Szkic dowodu: Najpierw sprawdzamy, że operatory sum częściowych $S_k[x] := \sum_{j=1}^{k} e_j^*(x)e_j$ mają normy wspólnie ograniczone. W tym celu definiujemy drugą normę $\|\cdot\|_*$ na przestrzeni X wzorem

$$\|x\|_* := \sup_k \|S_k[x]\|.$$

Ponieważ z definicji bazy, $x = \lim S_k[x]$, z ciągłości normy $\|x\| = \lim \|S_k[x]\| \leqslant \|x\|_*$. Więc $\|x\|_* = 0 \Rightarrow x = 0$. Nierówność trójkąta i jednorodność dla tej nowej normy łatwo sprawdzamy. Ponadto $\|x\| \leqslant \|x\|_*$. Jeśli wykażemy zupełność $(X, \|\cdot\|_*)$, to w myśl Wniosku 3. otrzymamy równoważność tych norm. Teraz $\|e_j^*(x)e_j\| = \|S_j[x] - S_{j-1}[x]\| \leqslant 2\|x\|_* \leqslant 2K\|x\|$, gdzie K jest stałą z warunku równoważnosci tych norm. Dzieląc przez $\|e_j\|$ otrzymujemy tezę. Dowód zupełności X w $\|\cdot\|_*$ można znaleźć np. w skrypcie M.Malejki, K.R. str.144.

Wniosek 6. Jeśli w przestrzeni Banacha M jest podprzestrzenią domkniętą posiadającą domkniętą podprzestrzeń N dopełniającą do X w tym sensie, że X jest sumą prostą :

$$X = M + N, M \cap N = \{0\},$$

to projekcja (rzut) P na M w kierunku N jest operatorem liniowym ciągłym. (zawsze zachodzi teza przeciwna: "gdy $P \in \mathcal{B}(X)$ spełnia warunek $P^2 = P$ (czyli $P \circ P = P$, to $X = P(X) \oplus \ker(P)$ (suma prosta dwu podprzestrzeni domkniętych, P jest rzutem na P(X) w kierunku $\ker(P)$".

Dowód. Odwzorowanie "sumowanie":

$$S : M \times N \ni (x, y) \to x + y \in X$$

jest bijekcją liniową (bo suma jest prosta). Jej ciągłość jest oczywista. Odwzorowanie odwrotne ma postać zestawienia $S^{-1} = (P, I - P)$, gdzie $P(x + y) = x$ dla $x \in M, y \in N$. I oznacza, jak zwykle, identyczność, czyli $(I-P)(x+y) = y$. Z tw. o izomorfizmie, to zestawienie, a więc i jego pierwsza składowa, czyli P -jes ciągłe, o ile $M \times N$ jest zupełna. A tak jest dla pary domkniętych podprzestrzeni. Zauważmy jeszcze, że obraz P, czyli $P(X)$ jest jadrem $I - P$, co przy ciągłości P implikuje domkniętość M.

Jeśli chodzi o przykłady podprzestrzeni nieuzupełnialnych, to z reguły są one niełatwe. Jeden można znaleźć w książce *Analiza Funkcjonalna* W.Rudina. Ja podałem inny w moim zbiorze zadań z analizy funkcjonalnej (wyd. AGH 2008r):(zadanie 3.149, s. 100). Co do występujących tam przestrzeni Banacha, które nie są izomorficzne z domkniętymi podprzestrzeniami w ℓ^1, to jest ich sporo: wynika to z następującego twierdzenia I. Schura:

Twierdzenie. Ciąg (zwykły -nie uogólniony!) (x_n) w przestrzeni ℓ^1, który jest słabo zbieżny do zera, czyli taki, że dla każdego ϕ- funkcjonału liniowego ciągłego na ℓ^1 mamy $\phi(x_n) \to 0$ -jest zbieżny do zera w normie.

Z nierówności Bessela wynika np. , że w przestrzeni Hilberta każdy ciąg ortonormalny jest słabo zbieżny do zera (bo wiemy, jaką postać ma $\phi \in H'$.) Ta własność Schura jest czymś bardzo wyjątkowym -większość przestrzeni nieskończenie wymiarowych -nawet $L^1(\mathbb{R})$ z miarą Lebesgue'a jej nie posiada (por. Lemat Riemanna-Lebesgue'a).

Ostatnim z wniosków jest wspomniane wcześniej twierdzenie Hellingera-Toeplitza:

Twierdzenie. Gdy dziedzina operatora sprzężonego do operatora gęsto określonego w przestrzeni Hilberta jest całą przestrzenią, to operator ten jest ograniczony.

Dla dowodu trzeba najpierw rozwiązać "zadanie domowe", które brzmiało: *"Operator sprzężony T^* ma zawsze wykres domknięty"*. Następnie skorzystać z twierdzenia o wykresie domkniętym. Otrzymujemy ciągłość T^*. Sprzężenie ostatniego operatora jest domknięciem T, a więc rozszerzeniem T. Jest to operator ograniczony, co implikuje ograniczoność samego operatora T. Zauważmy jeszcze, że sama domkniętość dziedziny T^* da nam jedynie ograniczoność T^* -to może być nawet operator zerowy o dziedzinie $\{0\}$, ale wtedy nie możemy przejść do dowodu ograniczoności samego T.

Dalsze zastosowania twierdzeń Banacha można znaleźć w teorii algebr Banacha, czy w tak zwanej teorii automatycznej ciągłości [np. monografia: A.M. Sinclair "Automatic Continuity of Linear Operators" LMS Lecture Notes Series (21) 2010].