

# Zawartość wykładów zapisanych w plikach

7 marca 2024

Kolejność niektórych tematów na naszych wykładach może nieznacznie odbiegać od tej z plików pdf. Np. po wykładzie 4 będę dowodził zupełności przestrzeni  $L^p(\mu)$  (przez kryterium "szeregowo") -w tych notatkach to jest na samym końcu. Zamiast pełnej nazwy pliku (np. "AFw3.pdf") podaję na tej liście sam numer (np. "3"). W nawiasie \*[...]\* są treści, które na wykładzie pojawiają się wcześniej

1. Izomorfizm przestrzeni  $V$  (wektorowych topologicznych  $T_2$ ) wymiaru  $n < \infty$ , ciągłość odwzorowań liniowych  $T : V \rightarrow Y$
2. Warunki równoważne ciągłości odwzorowań liniowych (ograniczenie  $\|Tx\| \leq M$  w kuli  $K(x_0, R)$  implikuje  $\|T\| \leq \frac{2M}{R}$ .)  
Przestrzeń unormowana  $\mathcal{B}(X, Y)$ , twierdzenie o jej zupełności. Szereg Neumanna w algebrze Banacha  $\mathcal{B}(X) := \mathcal{B}(X, X)$ , otwartość  $GL(X)$ - grupy jej elementów odwracalnych, domkniętość widma:  $\sigma(T)$  operatora  $T \in \mathcal{B}(X)$ .
3. Kryterium ciągłości funkcjonalów liniowych, twierdzenie Hahna-Banacha, wersja zespolona, wniosek o przedłużaniu z zachowaniem normy, zastosowanie do tw. Riesz o  $C[0, 1]^*$  (całka Stieltjesa), dualny wzór na normę ("tw. o wydobywaniu normy"),
4. Przedłużanie operatorów liniowych ciągłych z gęstych podprzestrzeni, granice Banacha.  
Oddzielanie zbiorów wypukłych przez funkcjonały, funkcjonal Minkowskiego  $p_E$  dla zbioru pochłaniającego  $E \subset X$ , własności  $p_E$  gdy  $E$  jest wypukły, pochłaniający (np. " $\{p_E < 1\} \subset E \subset \{p_E \leq 1\}$ "). Definicja przestrzeni lokalnie wypukłych.
5. \*[Zanurzenie kanoniczne, Uzupełnianie przestrz. unormowanych.]\* Przestrzenie refleksywne. Przestrzenie unitarne, Hilberta. Formy półtora-liniowe (tożsamość równoległoboku, wzór polaryzacyjny, nierówność Schwarz). Twierdzenia o rzucie prostym i o rozkładzie ortogonalnym przestrz. Hilberta.
6. Własności operatora rzutu,  $\overline{\text{span}}(E) = E^{\perp\perp}$ . Tw. Riesz-Frécheta. Sprzężenie  $T^*$  operatora gęsto określonego  $T$  (własności w przypadku  $T$  ograniczonych). Operatory: domknięte, symetryczne, gęsto określone
7. Bazy Schaudera, układy ortonormalne, nierówność Bessela. zupełność układu (wkw). Ortogonalizacja Grama-Schmidta istnienie baz ortonormalnych. Tw. Riesz-Fischera.
8. Zastosowania tw. Baire'a o kategorii: Tw. Banacha -Steinhausa, 3 typy zbieżności ciągów operatorowych: jednostajna, silna i słaba. Zasada jednostajnej ograniczoności (zastosowanie do rozbieżnych szeregów Fouriera). Twierdzenie Banacha o odwzorowaniu otwartym (Lemat o "usuwaniu domknięć" dowodzony w wykl. 9.)
9. Tw. Banacha o izomorfizmie, o wykresie domkniętym. Wkw na domkniętość obrazu operatora, normy równoważne i porównywalne. Operatory  $M_\varphi$  mnożenia przez funkcję mierzalną w  $L^p(\mu)$ . Gdy  $M_\varphi(L^p(\mu)) \subset L^p(\mu)$ , to  $\varphi \in L^\infty(\mu)$ .
10. Operatory normalne w przestrz. Hilberta -równoważny warunek metryczny, Widmo i części widma operatora  $T$ : widmo punktowe:  $\sigma_p(T)$ , aproksymatywne:  $\sigma_{ap}(T)$ . Wzór  $\sigma(T) = \sigma_{ap}(T) \cup (\sigma_p(T^*))^*$ . Równość  $\sigma(T) = \sigma_{ap}(T)$  gdy  $T$  jest normalny.
11. Operatory zwarte (wkw w terminach obrazów ciągów słabo zbieżnych). Operatory skończonego rzędu, operatory  $y \otimes x$  Lemat: "dla operat. zwartych  $\sigma_{ap}(T) \setminus \{0\} \subset \sigma_p(T)$ ." Lemat Riesz, niezwartość kul i operat. odwracalnych w przestrz. nieskończenie-wymiarowych, ortogonalność podprzestrzeni własnych dla operat. normalnych
12. Zwarte operatory normalne -własności ich widm. Obraz numeryczny operatora, promień numeryczny:  $w(T)$ , promień spektralny:  $r(T)$ - ich zależności w przypadku ogólnym i dla  $T = T^*$ , (wtedy  $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$ . Definicja podprzestrzeni niezmienniczych i redukujących
13. Twierdzenie spektralne dla zwartych operatorów normalnych. Rachunek funkcyjny (reprezentacje algebr: wielomianów, funkcji ciągłych na widmie  $T$ ) gdy  $T = T^*$ . Twierdzenie o odwzorowaniu widm, izometryczność rachunku funkcyjnego gdy  $T = T^*$ .
14. Miara spektralna dla ograniczonych operatorów samosprzężonych (zarys konstrukcji), twierdzenie spektralne + wnioski
15. \*[Przestrzenie ilorazowe unormowane]\* \*[Kryterium szeregowo zupełności przestrz. unormowanych, zupełność  $L^p(\mu)$ ]\* , \*[Domkniętość podprzestrzeni skończenie-wymiarowych, nieprzeliczalność baz Hamela w przestrzeniach Banacha nieskończenie wymiarowych]\*, \*[- to jeszcze będzie dopisane: Regularność miar borelowskich na przestrz. metrycznych aproksymacja miarowa zbiorami zwartymi w przypadku przestrzeni polskich (Tw. Ulama) ]\* Gęstość  $C(K)$  w  $L^p(K, \mathcal{B}, \mu)$ ]\* \*[- to jeszcze będzie dopisane: wkw na ośrodkowość  $L^p(\mu)$ ]