Zagadnienia do egzaminu z analizy funkcjonalnej (VI 2023)

1. Kryteria ciągłości odwzorow. liniowego w przestrzeniach unormowanych i wzgl. pary seminorm. Norma operatora (jako pewien kres górny i jako kres dolny), porównanie silnej zbieżności ciągu operatorów ze zbieżnością w normie.

2. Izomorficzność skończenie-wymiarowych przestrzeni wektorowych X (nad ciałem $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$) unormowanych z przestrz. euklidesową, automatyczna ciągłość odwzorowań liniowych na nich określonych.

3. Warunki równoważne ciągłości funkcjonału liniowego ϕ (dotyczą $\ker(\phi)$ oraz $\phi(U)$, gdy $U \neq \emptyset$ -otwarty).

4. Postać funkcjonałów liniowych ciągłych: w przestrzeni Hilberta - z dowodem, (w $C([0,1])$, w $L^p(\mu)$ -bez dow.)

5. Domkniętość podprzestrzeni skończenie wymiarowych $Y \subset X$, wymiar algebraiczny przestrzeni Banacha$\neq \aleph_0$.

6. Definicja normy ilorazowej (ogólna -w przestrzeni X/M), definicja $L^p(\mu)$ dla $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

7. Szeregi w przestrz. unormowanej $(X, \| \|)$: rodzaje zbieżności, kryterium "szeregowe" zupełności. Zupełność $L^p(\mu)$ (i przestrzeni ilorazowych X/M dla X z seminormą, zupełnej

8. Twierdzenie o zupełności przestrzeni $B(X, Y)$ operatorów lin. ciągłych. $B(X) = B(X, X)$ jako algebra.

9. Szereg C. Neumanna[1], rezolwenta, otwartość zbioru operat. odwracalnych w $B(X)$, domkniętość widma.

10. Twierdzenie Banacha-Steinhausa. Omówić zastosowania: -szkicowo-dla szeregów Fouriera[2], dokładniej -dla zbiorów słabo ograniczonych.

11. Tw. Hahna-Banacha. Przypadek zespolony, przedłużanie funkcjonałów z zachowaniem normy. Wzór dualny na normę wektora, izometryczność zanurzenia kanonicznego $j : X \to X''$

12. Zastosowanie twierdzenia Hahna-Banacha: rozdzielanie zbiorów wypukłych.

13. Twierdzenia Banacha o odwzorowaniu otwartym, o izomorfizmie i o wykresie domkniętym

14. W.k.w. na ośrodkowość $L^p(\mu)$. Gęstość zbioru f. ciągłych o nośniku zwartym w $L^p(\mu)$ dla μ -skończonej miary borelowskiej na przestrzeni polskiej lokalnie zwartej. .

Przestrzenie Hilberta, wstęp do teorii spektralnej

15. Twierdzenie o rzucie na zbiór wypukły domknięty w przestrzeni Hilberta (istnienie i jednoznaczność)

16. Twierdzenie charakteryzujące rzut przez nierówności dla iloczynów skalarnych (odp. -ortogonalność) Wniosek: Rozkład ortogonalny w przestrz. Hilberta wzgl. domkniętej podprzestrzeni $M \subset H$

17. Zbieżność szeregu Fouriera wzgl. układu ortonormalnego, 3 warunki równoważne zupełności układu ortonormalnego. Zupełność układu trygonometrycznego w $L^2(-\pi, \pi)$.

18. Definicja operatora sprzężonego T^* dla $T : D \subset H \to H$ (gęsto określonego), elementarne własności operacji sprzężenia w przypadku ograniczonym (gdy $T \in B(H)$). Warunek *wkw*, by $TT^* = T^*T$.

19. Wykazać, że widmo operatora samosprzężonego jest rzeczywiste, a w przypadku zwartego samosprzężonego $T \in B(H)$ -co najwyżej przeliczalne i równe widmu punktowemu $\sigma_p(T)$ (z dokładnością do punktu 0).

20. Oszacowanie normy operatora samosprzężonego przez promień numeryczny $w(T) := \sup\{|\langle Tx, x\rangle|, \ \|x\| = 1\}$.

21. Kresy obrazu numerycznego należą do widma operatora samosprzężonego. Wówczas $\|T\| \leqslant \sup\{|\lambda| : \ \lambda \in \sigma(T)\}$.

22. Twierdzenie spektralne dla operatora zwartego $T = T^* \in B(H)$.

23. Podać (szkicując bez dow. konstrukcję $E(\cdot)$) tw. spektralne dla ograniczonych operatorów samosprzężonych. Co to znaczy, że operator S jest całką $\int \phi(z) E(dz)$ z funkcji borelowskiej ϕ wzgl. miary spektralnej $E(\ )$, kiedy $x \in \mathcal{D}(S)$?

---

[1] Carl Gottfried Neumann (1832-1925) specjalista od równań różniczk. (zagadnienie Neumanna-Dirichleta). Chodzi o $I + \sum_1^\infty (I-T)^n$. Należy sprawdzić, że wzór ten wyraża T^{-1}, uzasadniając, dlaczego można np. lewostronnie mnożyć szereg przez $(I-T)$ „wyraz-po-wyrazie".

[2] Można przyjąć bez wyliczania, że dla funkcjonałów $s_n(f) := \sum_{k=-n}^n \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt}\, dt$ wyrażających wartość w zerze n. sum częściowych szer. Fouriera mamy $\|s_n\| \to \infty$. Wywnioskować, że $\{f \in C([-\pi,\pi]) : f(-\pi) = f(\pi), \exists \lim s_n(f)\}$ jest zbiorem "małym" (I katgorii). Dla bardziej dociekliwych, s_n jest funkcjonałem wyrażanym przez operator całkowy z jądrem Dirichleta $D_n(t)$, czyli przez miarę $D_n(t)\, dt$ absolutnie ciągłą, której wahanie całkowite jest normą L^1 z funkcji D_n, czyli $\|s_n\| = \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\, dt$, asymptotycznie $\asymp \log(n+1)$ przy $n \to \infty$.