2 Miara Jordana, całka oznaczona (Riemanna)

2.1 Miara zbioru

Ze względu na zastosowania omówimy od razu d–**wymiarową miarę Jordana zbioru ograniczonego** $D \subset \mathbb{R}^d$. To, co niewątpliwie możemy wyliczyć, to miara kostki $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_d, b_d]$, najczęściej będziemy rozważać przypadki $d = 1, 2$ lub 3. Dla $d = 2$ mówimy o polu prostokąta Q –równym $(b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2)$, dla $d = 3$- o objętości prostopadłościanu Q, a dla $d = 1$ -o długości odcinka $[a_1, b_1]$. Dla uproszczenia tę miarę kostki Q oznaczmy przez $|Q|$. Oczywiście, rozważamy tylko kostki o krawędziach równoległych do osi układu. Kostka może być zdegenerowana, gdy któryś z jej boków ma długość zero i wtedy gdy Q jest zdegenerowana (i tylko wtedy), mamy $|Q| = 0$.

Ogólnie definiujemy więc **miarę kostki** jako liczbę

$$|Q| := (b_1 - a_1) \times \cdots \times (b_d - a_d) = \prod_{k=1}^{d} (b_k - a_k).$$

Zbiór pusty też traktujemy jako kostkę, przyjmując $|\emptyset| = 0$. Mówimy, że kostki z danego $Q_1, \ldots, Q_m$ układu mają wnętrza parami rozłączne, gdy dla każdej pary indeksów $j, n \in \{1, \ldots, m\}$

$$j \neq n \ \Rightarrow \ |Q_j \cap Q_n| = 0. \tag{1}$$

Jest to zgodne z ogólną definicją wnętrza- które będzie dla kostki Q iloczynem kartezjańskim odpowiednich przedziałów otwartych (lub zbiorem pustym -dokładnie dla kostek zdegenerowanych). Część wspólna dwu kostek jest kostką, ale może ona być zdegenerowana. Gdy $d = 2$, założenie (1) oznacza, że prostokąty z danego układu mogą albo być rozłączne albo mogą stykać się jedynie wzdłuż boku lub wierzchołka. Sumę mnogościową $\Omega = Q_1 \cup \cdots \cup Q_m$ skończonej ilości kostek o wnętrzach parami rozłącznych nazwiemy **figurą prostą** i dla takich zbiorów definiujemy ich **miarę d-wymiarową** $m_d(\Omega)$ wzorem

$$m_d(\Omega) = \sum_{j=1}^{m} |Q_j|. \tag{2}$$

Każda suma skończonej ilości kostek nawet niespełniających warunku (1) jest figurą prostą. Każdą figurę prostą można (nawet na wiele sposobów) przedstawić jako sumę układu kostek o wnętrzach parami rozłącznych. Co najważniejsze, otrzymana suma ich miar będzie taka sama -więc definicja (2) nie zależy od sposobu przedstawienia figury Ω jako sumy układu kostek spełniających postulat rozłączności (1). Ten dość oczywisty fakt geometryczny wymaga jednak ścisłego dowodu, który pominiemy. Można to robić metoda indukcji ze względu na ilość kostek, lub metodą wspólnych rozdrobnień (dzielimy kostki na mniejsze fragmenty).

Oczywiście, większość zbiorów $E \subset \mathbb{R}^d$ nie da się przedstawić jako figurę prostą- nawet trójkąt lub obrócony o 45 stopni kwadrat -nie są skończonymi sumami kostek (bo zakładamy równolgłość krawędzi kostek do osi układu). Możemy dowolny zbiór ograniczony przybliżać figurami prostymi na dwa sposoby, które prowadzą do potencjalnie dwu miar: wewnętrznej i zewnętrznej tego zbioru:

Definicja. Miarę wewnętrzną $m_*(E)$ zbioru $E \subset \mathbb{R}^d$ definiujemy wzorem

$$m_*(E) := \sup\{m_d(\Omega) : \Omega \subset E, \Omega = \texttt{figura prosta}\}.$$

Miarę zewnętrzną $m^*(E)$ definiujemy jako kres dolny $\inf m_d(\Omega_1)$ miar figur prostych Ω_1 zawierających zbiór E. Mówimy, że zbiór E jest mierzalny (w sensie Jordana), gdy $m_*(E) = m^*(E)$ i wówczas piszemy $m_d(E) = m_*(E)$.

Podstawową własnością miary powinna być jej addytywność. Można wykazać, że gdy dwa zbiory mierzalne $A, B \subset \mathbb{R}^d$ są rozłączne:

$$A \cap B = \emptyset, \quad \texttt{to wówczas} \ m_d(A \cup B) = m_d(A) + m_d(B). \tag{3}$$

Suma skończonej ilości zbiorów mierzalych jest zbiorem mierzalnym. Natomiast dla sumy przeliczalnej ilości- już tak nie jest. Na przykład, w przypadku $d = 1$ zbiór liczb wyiernych z oscinka [0,1], czyli $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ jest niemierzalny, chociaż jest sumą ciągu zbiorów 1-elementowych mierzalnych $\{r_j\}$, bo liczby wymierne z odcinka $[0,1]$ można ustawić w ciąg. Ponadto $\forall_j \, m_*(\{r_j\}) = m^*(\{r_j\}) = 0$. Miara wewnętrzna tego zbioru $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ jest równa zero, zewnętrzna jest równa 1. Dla miary wewnętrznej odpowiednik własności (3) nie zachodzi (bo dla $A = \mathbb{Q} \cap [0,1], B = [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ jest $m_*(A) = 0 = m_*(B)$, podczas gdy $A \cup B = [0,1]$ ma miarę 1).

Dla funkcji $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ fragment płaszczyzny "pod wykresem funkcji", czyli ograniczony osią OX, prostymi x=a, x=b i wykresem f nazywamy trapezem krzywoliniowym. Oznaczmy go T_f. Tak więc

$$T_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b], 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}.$$

- Mierzalność tego zbioru można dość łatwo wykazać korzystając z twierdzenia Cantora o jednostajnej ciągłości funkcji ciągłych na przedziale domkniętym. Twierdzenie to mówi, że gdy $f \in C[a,b]$, to

$$\forall_{\epsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{s,t\in[a,b]} |s-t| < \delta \Rightarrow |f(s) - f(t)| < \epsilon. \tag{4}$$

Tam jako figury proste zawarte w tym zbiorze T_f możemy wziąć sumy prostokątów $[t_{j-1}, t_j] \times [0, m_j]$, gdzie $m_j = \inf\{f(x) : x \in [t_{j-1}, t_j]\}$, zaś figura prosta zawierająca zbiór T_f, to suma prostokątów $[t_{j-1}, t_j] \times [0, M_j]$, gdzie $M_j = \sup\{f(x) : x \in [t_{j-1}, t_j]\}$. Te dwie figury są wyznaczone przez układ punktów t_j podziału odcinka $[a,b]$, gdzie $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ na n części. Te części są odcinkami o długości $t_j - t_{j-1}$ i jeżeli (przy ustalonym $\epsilon > 0$) dobierzemy na tyle gęsto punktów podziału, by dla stałej δ spełniającej warunek (4) było $\forall_j t_j - t_{j-1} < \delta$, to będziemy mieli $M_j - m_j < \epsilon$. Faktycznie, jak wiemy (z Tw. Weierstrassa) f osiąga na każdym z przedziałów $[t_{j-1}, t_j]$ swoje wartości największe: M_j w pewnych punktach $\beta_j \in [t_{j-1}, t_j]$. Wartości najmniejsze: m_j są równe $f(\alpha_j)$ dla pwenych $\alpha_j \in [t_{j-1}, t_j]$. A ponieważ $|\beta_j - \alpha_j| < \delta$, z warunku jednostajnej ciągłości (4) wynika, że $M_j - m_j < \epsilon$. Różnica między miarą górną i miarą dolną naszego zbioru D jest więc nie większa, niż

$$\sum_{j=1}^{n} (M_j - m_j)(t_j - t_{j-1}) \leqslant \sum_{j=1}^{n} \epsilon (t_j - t_{j-1}) = \epsilon \cdot (b-a).$$

Różnica ta jest więc dowolnie mała, a ponieważ jest nieujemna, musi być zerem, co świadczy o mierzalności zbioru D.

2.2 Całka Riemanna

Jesteśmy w zasadzie już przygotowani do wprowadzenia definicji całki Riemanna. Na początku określmy pojęcia:

- podziału $\mathcal{T}$ odcinka $[a,b]$,
- średnicy $\delta(\mathcal{T})$ tkiego podziału,
- normalnego ciągu podziałów $\mathcal{T}_n$,
- Układu Λ punktów pośrednich dla $\mathcal{T}$
- sum całkowych $S(f, \mathcal{T}, \Lambda)$

Definicja. (1) Skończony układ punktów $\mathcal{T} = (t_0, t_1, \ldots, t_n)$ nazywamy **podziałem odcinka** $[a,b]$, gdy $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$. (2) Liczbę $\delta(\mathcal{T}) := \max\{t_j - t_{j-1} : 1 \leqslant j \leqslant n\}$ nazywamy **średnicą tego podziału**. (3) Mówimy, że ciąg podziałów $(\mathcal{T}_n)$ jest **normalny**, gdy $\lim_{n\to\infty} \delta(\mathcal{T}_n) = 0$. (4) Zbiór skończony $\Lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \subset [a,b]$ nazywamy układem **punktów pośrednich** dla podziału $\mathcal{T}$, gdy $\forall_j \, \lambda_j \in [t_{j-1}, t_j]$. (4) **Sumę całkową** $S(f, \mathcal{T}, \Lambda)$ dla funkcji f, podziału $\mathcal{T}$ i układu punktów pośrednich Λ definiujemy jako liczbę

$$S(f, \mathcal{T}, \Lambda) := \sum_{j=1}^{n} f(\lambda_j)(t_j - t_{j-1}). \tag{5}$$

Przykład normalnego ciągu podziałów, to podziały $[a,b]$ na n równych części, czyli podziały punktami $t_j = a + \frac{j(b-a)}{n}$. Tutaj $\forall_j t_j - t_{j-1} = \frac{b-a}{n}$ i taka jest też średnica tego podziału. Dla funkcji $f(x) = x$ i dla punktów pośrednich $\lambda_j = t_j$ sumą całkową przy równomiernym podziale $[a,b]$ na n równych części jest

$$\sum_{j=1}^{n} \left(a + \frac{j(b-a)}{n}\right)\frac{b-a}{n} = a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{n^2}\sum_{j=1}^{n} j = a(b-a) + \frac{(b-a)^2 n(n+1)}{2n^2}.$$

Ostatnie wyrażenie dąży przy $n \to \infty$ do $(a+\frac{b-a}{2})(b-a) = \frac{1}{2}(b+a)(b-a) = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$. Podobna sytuacja ma miejsce dla funkcji $f(x) = x^2$ i w pewnym miejscu trzeba znać wzór na $\sum_{j=1}^{n} j^k$ dla $k = 2$. Taki wzór znamy jedynie dla $k = 1, 2, 3$ ale dla pozostałych $k \in \mathbb{N}$ z można też wyznaczyć granicę $\lim \frac{1}{n^{k+1}} \sum_{j=1}^{n} j^k = \frac{1}{k+1}$. Dla większości funkcji takie obliczenia nie są jednak możliwe.

Najprostsze jest wyliczenie sum całkowych dla funkcji stałej: $f(x) = c$. Wartości $f(\lambda_j)$ stale równe c można wyłaczyć przed znak sumy, a pomieważ dla każdego podziału mamy

$$\sum_{j=1}^{n} (t_j - t_{j-1}) = b - a, \tag{6}$$

więc suma całkowa dla funkcji stałej równej c na odcinku [a,b] wynosi $c(b-a)$ niezalenie od wyboru punktów podziału i punktów pośrednich.

Definicja. Funkcję $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ nazywamy funkcją całkowalną w sensie Riemanna, co oznaczamy pisząc $f \in R[a,b]$, jeśli dla każdego normalnego ciągu podziałów $\mathcal{T}_n$ oraz układów punktów pośrednich Λ_n dla $\mathcal{T}_n$ istnieje granica skończona ciągu sum całkowych: $\lim S(f, \mathcal{T}_n, \Lambda_n)$. Wówczas, jak można wykazać granice te są jednakowe dla wszystkich ciągów normalnych podziałów. Tę wspólną granicę oznaczamy symbolem $\int_a^b f(t)\,dt$ i nazywamy calką oznaczoną z funkcji f od a do b (lub całką po przedziale $[a,b]$).

UWAGA: W odróżnieniu od całki nieoznaczonej, zmienna t w zapisie $\int_a^b f(t)\,dt$ jest zmienną "pozorną", czyli "związaną" -wartość całki jest liczbą i nie zależy od t. Zamiast t możemy zresztą wpisać inną zmienną, co nie zmieni wartości całki, np. $\int_a^b x\,dx = \int_a^b t\,dt = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$. Całka ta jest "całką po odcinku skierowanym", istotna jest kolejność: punkt a jest początkiem, zaś punkt b -końcem. Definiuje się nawet $\int_a^b f(t)\,dt$ w przypadku, gdy $b < a$ wzorem $\int_a^b f(t)\,dt = -\int_b^a dt$. Ponadto przyjmujemy, że $\int_a^a f(t)\,dt = 0$. Zapis $\int_{[a,b]} f(t)\,dt$ będzie zarezerwowany dla ogólniejszego pojęcia całki Lebesgue'a.

Można wykazać, że f o wartościach nieujemnych jest całkowalna wtedy i tylko wtedy, gdy związany z nią trapez krzywoliniowy T_f jest mierzalny, przy czym całka $\int_a^b f(t)\,dt$ jest równa mierze Jordana $m_2(T_f)$.

Miara zbioru znajdującego się pomiędzy wykresami dwu funkcji $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ takich, że $\forall_t\ f(t) \leqslant g(t)$, czyli zbioru $T_f^g := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b], f(x) \leqslant y \leqslant g(x)\}$ jest natomiast dana wzorem

$$m_2(T_f^g) = \int_a^b g(t) - f(t)\,dt.$$

Często szukamy miary obszaru ograniczonego przez wykresy dwu funkcji, to bedzie fragment płaszczyzny, którego brzegiem są kawałki wykresów tych funkcji- ale leżące pomiędzy punktami przecięcia. Te wyznaczamu rozwiązując równanie $f(x) = g(x)$. Jeśli są takie 2 punkty, $x = a, x = b$ gdzie $a < b$, to po przedziale $[a,b]$ całkujemy funkcję $|f(t) - g(t)|$, o ile między nimi jest stale taka sama nierówność dla $x \in [a,b]$. Gdy jest więcej punktów przecięcia, często znak różnicy może się zmieniać i bez wstawionego modułu, całka z $f - g$ może być zerem -np. $f(t) = \sin t, g(t) = 2\sin t, a = -\pi, b = \pi$.

2.3 Podstawowe własności całki oznaczonej

Można wykazać, że **funkcje całkowalne muszą być ograniczone**.

Najważniejsze dla nas klasy funkcji będą całkowalne:

Twierdzenie. Wszystkie funkcje ciągłe oraz wszystkie funkcje monotoniczne są całkowalne.

Zbiór $R[a,b]$ funkcji całkowalnych na przedziale $[a,b]$ jest więc duży. Jest to przestrzeń wektorowa, w kórej wektorami są funkcje, suma funkcji f, g to "zwykła suma", czyli funkcja: $f+g : [a,b] \ni x \mapsto f(x)+g(x)$. Iloczynem wektora f przez skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ jest funkcja $[a,b] \ni x \mapsto \alpha f(x)$. Należy oczywiście udowodnić, że gdy $f, g \in R[a,b]$, $\alpha \in \mathbb{R}$, to również $f+g \in R[a,b]$ oraz $\alpha f \in R[a,b]$. Wynika to z arytmetyki granic dla ciągów sum całkowych, bo

$$S(f+g, \mathcal{T}_n, \Lambda_n) = S(f, \mathcal{T}_n, \Lambda_n) + S(g, \mathcal{T}_n, \Lambda_n), \quad S(\alpha f, \mathcal{T}_n, \Lambda_n) = \alpha S(f, \mathcal{T}_n, \Lambda_n).$$

Przechodząc do granicy w tych równościach otrzymujemy dodatkowo tezę o liniowości odwzorowania $R[a,b] \ni f \to \int_a^b f(x)\,dx$, czyli następujące:

Twierdzenie. Suma i iloczyn przez stałą $\alpha \in \mathbb{R}$ funkcji całkowalnych- są całkowalne. Ponadto, gdy $f, g \in R[a,b]$ oraz $\alpha \in \mathbb{R}$, to

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx, \qquad \int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx.$$

Można też wykazać, że iloczyn dwu funkcji całkowalnych jest całkowalny, ale nie ma już żadnej zależności między całką iloczynu a iloczynem całek. Dla $f, g \in R[a,b]$ zapis $f \leqslant g$ oznacza, że $\forall_{x \in [a,b]}\, f(x) \leqslant g(x)$. Ponieważ wynika stąd analogiczna nierówność dla sum całkowych, więc z twierdzenia o przechodzeniu do granicy z nierównościami otrzymujemy wówczas nierówność dla całek: $\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$. Tę własność nazywamy możliwością "**całkowania nierówności stronami**". Na przykład, gdy porównamy $f \in R[a,b]$ z funkcjami stałymi równymi $m, M \in \mathbb{R}$ tak, że $m \leqslant f \leqslant M$, czyli $\forall_{x \in [a,b]} m \leqslant f(x) \leqslant M$, to całkując stronami otrzymamy: $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$, skąd wynika następujące

Twierdzenie o Średniej Całkowej. Załóżmy, że $f \in R[a,b]$ spełnia nierówności $m \leqslant f \leqslant M$. Wówczas liczba $\sigma = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$, zwana **średnią całkową** z funkcji f na odcinku $[a,b]$ również należy do przedziału $[m, M]$. Gdy ponadto f jest ciągła, ta średnia całkowa σ jest równa $f(c)$ dla pewnego $c \in [a,b]$.

Ważną własnością całek jest tzw. "addytywna zależność od drogi całkowania" opisana w następującym twierdzeniu, gdzie zakładamy, że $a < b, c$.

Twierdzenie. Funkcja f jest całkowalna po całym odcinku $[a,c]$ wtedy i tylko wtedy gdy jest całkowalna po każdym z jego fragmentów: $[a,b]$ oraz $[b,c]$. Ponadto w takim przypadku

$$\int_a^c f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt. \tag{3}$$

.

Mając do dyspozycji te własności już łatwo możemy wykazać najważniejsze twierdzenie w rachunku różniczkowym i całkowym:

Twierdzenie (Newtona-Leibniza). Jeżleli dla funkcji ciągłej $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ określimy dla $x \in [a,b]$ wartości

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt, \tag{4}$$

to $F'(t) = f(t)$. Ponadto gdy Φ jest jakąś funkcją pierwotną dla f, czyli gdy $\int f(t)\,dt = \Phi(t) + C$, to całka oznaczona z f jest równa przyrostowi Φ między punktami a oraz b:

$$\int_a^b f(t)\,dt = \Phi(b) - \Phi(a). \tag{5}$$

Dowód. Gdy $h > 0$, to stosując (3) do $F(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt$ mamy

$$F(x+h) = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt = F(x) + \int_x^{x+h} f(t)\,dt.$$

Stąd iloraz różnicowy $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ jest równy $\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$, czyli średniej całkowej z f po odcinku $[x, x+h]$. Z Pierwszego tw. o wartości średniej, istnieje punkt $c_h \in [x, x+h]$ taki, że $\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(c_h)$. Przy $h \to 0^+$ mamy $c_h \to x$, więc z ciągłości $f(c_h) \to f(x)$. Dla $h < 0$ możemy zastosować wzór (3) dla punktów $a < x+h < x$, co da równości $F(x) = F(x+h) + \int_{x+h}^x f(t)\,dt$. Zapisując x jako $(x+h)-h$, mamy dla $-h > 0$ równość $\frac{1}{h}(F(x+h) - F(x)) = \frac{1}{-h}\int_{x+h}^{(x+h)-h} f(t)\,dt$, co ponownie jest średnią całkową z f po odcinku $[x+h,x]$, zmierzającą do $f(x)$ przy $h\to 0^-$. Reasumując, $f(x)$ jest granicą obustronną ilorazów różnicowych dla F, czyli pochodną $F'(x)$. Teraz F oraz Φ, jako dwie funkcje pierwotne dla tej samej f -różnią się tylko o pewną stałą C w tym sensie, że $\forall x\in[a,b]\ F(x)=\Phi(x)+C$. Ale $F(a)=\int_a^a f(t)\,dt=0=\Phi(a)+C$. Stąd $C=\Phi(a)$ oraz $\int_a^b f(t)\,dt=F(b)=\Phi(b)+C=\Phi(b)-\Phi(a)$. $\square$

Dopiero teraz możemy, znając całki nieoznaczone z danej funkcji, wyliczać ich całki oznaczone i pola powierzchni związanych z nimi figur.

Na przykład, pole pod "garbem sinusoidy" ($f(x)=\sin x,\ x\in[0,\pi]$) wynosi 2. Faktycznie, funkcją pierwotną jest $-\cos(x)$, zaś $(-cos\pi)-(-cos0)=1+1=2$.

Obliczmy pole ćwiartki koła, którego brzeg ma równanie $x^2+y^2=R^2$. To pole, to całka $\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}\,dx$. Najpierw wyliczmy całkę nieoznaczoną, całkując przez części iloczyn naszej funkcji przez $1=x'$.

$$J_R:=\int\sqrt{R^2-x^2}\,dx=x\sqrt{R^2-x^2}-\int x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{R^2-x^2}}\,dx.$$

Ostatnią całkę zapiszmy w postaci

$$\int\frac{(R^2-x^2)-R^2}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx=J_R-R^2\int\frac{1}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx.$$

Ponieważ $\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\arcsin x+C$ całkę zawierającą R^2 zamiast 1 sprowadzimy do takiej postaci podstawiając $t=\frac{x}{R}$, gdzie $dt=\frac{1}{R}\,dx$. Przenosząc J_R na lewą stronę otrzymujemy więc $2J_R=x\sqrt{R^2-x^2}+R^2\arcsin\frac{x}{R}+C$. Wzór Newtona- Leibniza daje więc (ze wgledu na zerowanie się pierwszej funkcji na końcach przedziału $[0,R]$ i na fakt, że $\arcsin 0=0,\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$) równość: $\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}\,dx=\frac{1}{4}\pi R^2$ i rzeczywiście, to jest $\frac{1}{4}$ pola koła. Dla elipsy o brzegu opisanym równaniem $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ mielibyśmy całkę z funkcji $\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ po odcinku $[0,a]$, czyli $\frac{1}{4}\pi ab$ - jako pole $\frac{1}{4}$ tej elipsy.

Policzmy jeszcze pole obszaru leżącego między prostą o równaniu $y=x$ oraz parabolą $y=7x-x^2$. Ich punkty przecięcia, powiedzmy o współrzędnych na osi OX równych a,b znajdyhemy rozwiązując układ równań, co daje równanie $x=7x-x^2$, czyli $x(6-x)=0$. Stąd $a=0,b=6$ parabola ma ramiona zwrócone w dół, więc na tym jej "środkowym fragmencie" leży nad prostą $y=x$, a szukane pole wynosi

$$\int_0^6(7x-x^2-x)\,dx=\left[3x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^6=36.$$

Jeśli szukamy pola ,którego brzegiem jest fragment wykresu funkcji logarytm naturalny, oś Ox oraz proste $x=\frac{1}{e},x=e$, to nie liczymy całki z $\ln x$, tylko całkę z modułu, bo ten zbiór jest sumą dwu obszarów A,B złożonych z tych par $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, dla których odpowiednio $\frac{1}{e}\leqslant x\leqslant 1,\ln x\leqslant y\leqslant 0$ oraz $1\leqslant x\leqslant e,0\leqslant y\leqslant\ln x$, ze względu na zmianę znaku z $-$ na $+$ przez logarytm w punkcie 1. Stąd

$$m_2(A\cup B)=\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|\,dx=-1\int_{\frac{1}{e}}^{e}\ln x\,dx+\int_1^e\ln x\,dx$$

Licząc najpierw całkę nieoznaczoną z logarytmu, całkujemy przez części, pisząc

$$\int(x')\ln x\,dx=x\ln x-\int x\cdot\frac{1}{x}\,dx=x\ln x-x+C$$

Stąd szukane pole wynosi

$$\Big[x(1-\ln x)\Big]_{\frac{1}{e}}^{1}+\Big[x(\ln x-1)\Big]_1^e=2-\frac{2}{e}.$$