Matematyka na kier. "MIiIŚ" - wykład nr 1. (28.02. 2022.)

1 Liczby zespolone

Liczby zespolone pojawiły się w pewnym sensie przypadkowo -podczas rozwiązywania równań 3. stopnia o współczynnikach rzeczywistych. Pomocnicze równanie drugiego stopnia prowadziło do pierwiastków z liczb ujemnych w przypadku, gdy wyjściowe równanie miało 3 pierwiastki rzeczywiste. Wstawianie tych pierwiastków z liczb ujemnych do kolejnych etapów procedury algebraicznej dawało w końcu poprawny wynik. Nie wiedziano, z jakiej przyczyny i nazwano te liczby typu $\sqrt{-b^2}$ (oznaczane ib) liczbami urojonymi. Dopiero pod koniec XVIII w. zaczęto traktować liczby zespolone jako "pełnoprawne liczby" przedstawiając je na jeden z dwu sposobów: w postaci algebraicznej:

$$z = a + ib, \quad \texttt{gdzie} \quad a, b \in \mathbb{R}, \tag{1.3}$$

równoważnie traktując to z jako parę (a, b) lub w post. trygonometrycznej:

$$z = r(\cos\phi + i\sin\phi), \quad \texttt{gdzie} \quad r \geqslant 0, \phi \in [0, 2\pi). \tag{2.3}$$

W układzie współrzędnych kartezjańskich na płaszczyźnie traktujemy liczby zespolone z jako punkty o współrzędnych (a, b). Na przykład, a jest rzutem prostopadłym z na oś OX, tak zwaną częścią rzeczywistą liczby z, co oznaczmy $a = \Re z$ zaś $b = \Im z$ - to część urojona = rzut z na OY. Z kolei, w postaci trygonometrycznej, R jest odległością punktu z od początku ukadu, CZYLI $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Ostatnią wartość nazywamy modułem liczby z. Definiujemy :

$$|z| := \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \phi = \arg(z).$$

Tutaj ϕ jest kątem między osią OX a półprostą przechodząca przez początek układu oraz przez punkt z. nazywany argumentem głównym liczby z. Ze wzgledu na okresowość, mamy dla wszystkich liczb całkowitych $k \in \mathbb{Z}$ równość $\cos\phi + i\sin\phi = \cos(\phi + 2k\pi) + i\sin(\phi + 2k\pi)$, więc zbiór

$$Arg(z) := \{\phi + 2k\pi : \, k \in \mathbb{Z}, \phi = \arg(z)\}$$

"wszystkich argumentów z" jest nieskończony. Stąd nazwa "argument główny".

Definicja. Symbolem $\mathbb{C}$ oznaczamy zbiór liczb zespolonych, z działaniami: dodawania i mnożenia określonymi dla $z_n = a_n + ib_n, n = 1, 2$ następująco:

$$z_1 + z_2 = (a + a_1) + i(b_1 + b_2), \qquad z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

Elementem zerowym w $\mathbb{C}$ (zapisywanym też jako 0) bedzie $0+i0$, zaś elementem jednostkowym- liczba $1+i0$. Jednostką urojoną będzie $i := 0+i1$, co odpowiada parze $(0, 1) \in \mathbb{R}^2$.

Twierdzenie. Zbiór $\mathbb{C}$ z tak określonymi działaniami jest ciałem. Oznacza to, że działania + oraz $\cdot$ są przemienne, łączne, zachodzi rozdzielność: $w\cdot(z_1+z_2) = wz_1 + wz_2$, ponadto $0+z = z, 1\cdot z = z$ oraz $\forall_{z\in\mathbb{C}}\exists_{-z\in\mathbb{C}}\, z+(-z) = 0$, natomiast $\forall_{w\in\mathbb{C}\setminus\{0\}}\exists_{\frac{1}{w}\in\mathbb{C}}\, w\cdot\frac{1}{w} = 1$.

W języku algebry abstrakcyjnej oznacza to, że $\mathbb{C}$ z działaniem dodawania jest grupą przemienną, $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ jest grupą przemienną względem mnożenia oraz mnożenie jest rozdzielne względem dodawania.

Używając wzorów trygonometrycznych można dość łatwo sprawdzić, że dla $z_n = r_n(\cos\phi_n + i\sin\phi_n)$, $n = 1, 2$ mamy

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\phi_1+\phi_2)+i\sin(\phi_1+\phi_2)), \quad |z_1 z_2| = |z_1|\cdot|z_2|, \; \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}.$$

Ostatnia równość wiąże się z pojęciem liczby sprzężonej do $z = a+ib$, oznaczanej $\bar{z} := a - ib$. Geometrycznie, jest to odbicie symetryczne względem osi rzeczywistej $\{(a, 0) : \, a \in \mathbb{R}\}$ punktu o współrzędnych kartezjańskich $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Mamy równości $|\bar{z}| = |z|, Arg(\bar{z}) = \{-\phi : \phi \in Arg(z)\}$ oraz $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

Zauważmy, że liczby zespolone o module 1, czyli takie $a+ib$, że $a^2+b^2=1$ tworzą okrąg jednostkowy. Jeśli parametr ϕ przebiega odcinek $[0,2\pi]$, to krzywa będąca tym okregiem ma w $\mathbb{R}^2$ równanie parametryczne $(x(\phi),y(\phi)) = (\cos\phi,\sin\phi)$ i obiegana jest w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Jest to tak zwana dodatnia orientacja która dla krzywej zamkniętej w $\mathbb{R}^2$, obiegającej pewien obszar ograniczony D, oznacza, że stojąc na krzywej w kierunku jej obiegu widzimy punkty obszaru D po lewej stronie.

Mnożenie liczby $z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ przez liczbę o module 1 i argumencie ϕ polega na obrocie o kąt ϕ, bo jego wynikiem jest punkt $r(\sin(\alpha+\phi)+i\sin(\alpha+\phi))$. Kluczowa dla mnożenia (czy np. dla potęgowania) liczby zespolonej postaci $a+ib$ jest wiec znajomość jej argumentu (niekoniecznie głównego).

$$\varphi=\begin{cases}\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right), & \text{gdy } a>0 \qquad \texttt{albo:} \quad (\cos\phi=\frac{a}{|z|},\ \sin\phi=\frac{b}{|z|})\\ \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)+\pi, & \text{gdy } a<0\\ 0, & \text{gdy } a=0 \text{ oraz } b>0\\ \pi, & \text{gdy } a=0 \text{ oraz } b<0\end{cases}$$

Przykład. Jeśli $z=-1+i\sqrt{3}$, to mamy $|z|=\sqrt{1+3}=2$, więc szukamy $\phi\in[0,2\pi)$ takiego, że $\cos(\phi)=\frac{1}{2}, \sin\phi=\frac{\sqrt{3}}{2}$, wnioskując, że $\phi=\frac{2}{3}\pi$.

Potęgowanie jest szczególnie proste w postaci trygonometrycznej (=biegunowej). Mamy następujący wzór de Moivre'a:

$$\big[r(\cos\phi+i\sin\phi)\big]^n=r^n(\cos n\phi+i\sin n\phi).$$

Może się wydawać, że gdy $r=1$, to pierwiastkowanie w stopniu n polega jedynie na dzieleniu argumentu głównego przez n. W rzeczywistości -mamy jednak dokładnie n pierwiastków zespolonych $w_0,w_1,\dots,w_{n-1}$ liczby z, czyli rozwiązań równania $w^n=z$:

$$w_k=\sqrt[n]{r}(\cos(\frac{\phi+2k\pi}{n})+i\sin(\frac{\phi+2k\pi}{n}))$$

Wszystkie te pierwiastki leżą w wierzchołkach n-kąta foremnego wpisanego w koło o promieniu $\sqrt[n]{r}$, gdzie $z=|z|>0$. (Pomijamy trywialny przypadek $z=0$.) Na przykład, gdy $r=1,\phi=0$, mamy zbiór pierwiastków stopnia n z jedynki $\lambda_0=1,\lambda_1=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n},\lambda_2=\lambda_1^2$ itp., zaś mając jeden z pierwiastków stopnia n z liczby z, np. w_0, uzyskamy pozostałe $w_k=w_0\lambda_k=w_0\lambda_1^k$. Co więcej, $\lambda_j\lambda_k=\lambda_{j+k}$ gdy $j+k<n$ oraz $=\lambda_{j+k-n}$ w przeciwnym przypadku. Jako ciekawe zadanie można sprawdzić, że suma wszystkich pierwiastków stopnia n z liczby z jest równa zero. Zbiór $\{\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1}\}$ pierwiastków zespolonych stopnia n z jedynki z działaniem mnożenia tworzy grupę skończoną.

Wzór Eulera: $e^{i\phi}=\cos\phi+i\sin\phi$, który wynika z rozwinięcia w szereg Taylora funkcji e^z dla $z=e^{i\phi}$ i porównania go z szreregami Taylora dla $\cos,\sin$ -daje jeszcze jedną wygodną reprezentację ("wykładniczą") liczb zespolonych:

$$z=|z|e^{i\phi}, \qquad \phi=\arg z,$$

która również uzasadnia wzory na ich mnożenie i pierwiastkowanie.

Liczby zespolone wprowadzono, by rozwiązać jedno równanie algebraiczne: $z^2=-1$, a okazuje się, że otrzymujemy istnienie rozwiązań wszystkich równań wielomianowych o współczynnikach zespolonych. Wielomianem zespolonym nazwiemy funkcję postaci

$$p(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0, \quad ,gdzie \quad a_n\neq 0,\ \forall_{k\in\{1,\dots,n\}}\, a_k\in\mathbb{C}.$$

Wówczas liczbę n nazywamy stopniem tego wielomianu (ang. *degree*), pisząc $n=\deg(p)$.

ZASADNICZE TWIERDZENIE ALGEBRY: Wielomian stopnia $n>0$ ma zawsze pierwiastki zespolone. Uwzględniając krotności[1], jest dokładnie n takich pierwiastków $z_1,z_2,\dots,z_n$. Mamy **postać kanoniczną wielomianu**:

$$p(z)=a_n(z-z_1)(z-z_2)\cdot\dots\cdot(z-z_n).$$

[1] Mówimy, że λ jest pierwiastkiem krotności k wielomianu p, gdy istnieje wielomian Q taki, że $p(z)=(z-\lambda)^kQ(z)$, przy czym $Q(\lambda)\neq 0$.

Zachodzi też znane nam z przypadku rzeczywistego

Twierdzenie Bezouta: Wielomian $p(z)$ jest podzielny w zbiorze wielomianów zespolonych) przez $z - \lambda$ wtedy i tylko wtedy gdy $p(\lambda) = 0$.

Przydatny też jest następujący

Lemat: Jeżeli liczba zespolona $z = a + ib$ jest pierwiastkiem wielomianu p o współczynnikach rzeczywistych, to również liczba sprzężona: $\bar{z} = a - ib$ jest pierwiastkiem p. (faktycznie, ponieważ sprzężenie sumy jest sumą sprzężeń, sprzężenie iloczynu jest iloczynem sprzężeń, więc w tym przypadku $\overline{p(z)} = p(\overline{z})$

Na przykład, chcąc rozłożyć wielomian $z^4 + 1$ na czynniki niższych stopni o współczynnikach rzeczywistych napotykamy na trudność w postaci braku pierwiastków rzeczywistch. Pierwiastki 2. stopnia z liczby -1, to dwie liczby urojone: $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ oraz $-i = e^{i\frac{3\pi}{2}}$. Znajdując ich pierwiastki kwadratowe znajdziemy wszystkie pierwiastki 4. stopnia z liczby -1. Mamy $\sqrt{i} = \pm e^{i\frac{\pi}{4}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} + i(\frac{1}{\sqrt{2}})$. Natomiast $\sqrt{-i} = \pm e^{i\frac{3\pi}{4}} = \pm(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}})$ Są to więc wierzchołki kwadratu wpisanego w okrąg jednostkowy, o bokach równoległych do osi. Można też bezpośrednio dzielić $\arg(-1) = \pi$ przez 4 i obracać o wielokrotności $\frac{\pi}{2}$ mnożąc przez kolejne pierwiastki stopnia 4 z jedynki. Dobieramy pary wzajemnie sprzężonych pierwiastków i np. iloczyn $(z - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}})(z - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}) = (z^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}z + \frac{1}{2} + \frac{1}{2})$. Analogicznie dla znaku "+", więc będą dwa czynniki drugiego stopnia nierozkładalne nad $\mathbb{R}$ (czyli o wyróżnikach $\Delta < 0$). Otrzymujemy rozkład

$$z^4 + 1 = (z^2 - \sqrt{2}z + 1)(z^2 + \sqrt{2}z + 1).$$

Analogicznie do funkcji o wartościach rzeczywistych, możemy całkować w sensie Riemanna funkcje $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ o wartościach zespolonych. Jeżli wydzielimy części: rzeczywistą i zespoloną dla f,np. gdy $u(t) := \Re f(t)$ oraz $v(t) = \Im f(t)$, to $f(t) = u(t) + iv(t)$, całkowalność f możemy zdefiniować koniunkcję: $u \in R[a, b]$ oraz $v \in R[a, b]$, przy czym zdefiniujemy

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt.$$

Można wykazać, że dla analogicznie zdefiniowanych sum całkowych dla f tak zdefiniowana całka jest ich granicą przy normalnych ciągach podziałów i dowolnie dobranych układach punktów pośrednich. Oczywiście, do tego potrzebne jest pojęcie granicy ciągów liczb zespolonych.

Definicja. Mówimy, że **ciąg** liczb $z_n = a_n + ib_n$ **zmierza do granicy** $z_0 = a_0 + ib_0$ przy $n \to \infty$, co zapisujemy $z_n \to z_0$ lub $z_0 = \lim z_n$, gdy ciąg (liczb rzeczywistych) $|z_n - z_0|$ zmierza do zera.
Liczba zespolona γ jest **granicą funkcji** $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ w punkcie $z_0 \in \overline{D}$, czyli $\lim_{z\to z_0} f(z) = \gamma$ gdy

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{z\in D}\ \ 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - \gamma| < \epsilon.$$

Podobnie, jak w przypadku zmiennej rzeczywistej, zakładamy przy tym, że z_0 jest punktem skupienia zbioru D, co oznacza, że $\forall_{\delta>0}\exists_{z\in D}\, 0 < |z - z_0| < \delta$. Mówimy, że f jest ciągła w punkcie z_0, gdy albo z_0 nie jest punktem skupienia dziedziny f, albo $f(z_0) = \lim_{z\to z_0} f(z)$. W odróżnieniu od osi rzeczywistej, nie ma w $\mathbb{C}$ naturalnej relacji porządku, w związku z tym nie definiujemy granic w punktach niewłaściwych $+\infty, -\infty$, a jedynie granice przy $|z| \to \infty$ poprzez postulat, by $|f(z) - \gamma|$ było dowolnie małe, jeżeli $|z|$ jest dostatecznie duże.

Twierdzenia z teorii granic ciągów i funkcji rzeczywistych nieodwołujące się do relacji porządku w $\mathbb{R}$ mają swoje odpowiedniki w $\mathbb{C}$. Na przykład, twierdzenia o arytmetyce granic, o jednoznaczności granic, o granicach podciągów ciągu zbieżnego. Tu kluczowym narzędziem jest (podobie, jak dla liczb rzeczywistych) **nierówność trójkąta**:

$$|z + w| \leqslant |z| + |w|.$$

Jeżeli $z = a+ib, w = c+id$, to nierówność ta oznacza, że $\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} \leqslant \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}$, co po podniesieniu stronami do kwadratu i po uproszczeniu jest równoważne nierówności

$$ac + bd \leqslant \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}.$$

Jest to nierówność między iloczynem skalarnym dwu wektorów, a iloczynem ich norm euklidesowych, kórą w $\mathbb{R}^2$, a nawet w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ niedługo wykażemy.

Zauważmy jeszcze jeden bardzo ważny fakt: zbieżność ciągów $z_n = a_n + ib_n$ do granicy $z_0 = a_0 + ib_0$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy równocześnie $a_0 = \lim a_n$ oraz $b_0 = \lim b_n$.

Jeżeli ciąg (z_n) liczb zespolonych jest ograniczony, tzn. gdy $\exists_{M>0}\forall_n |z_n| \leqslant M$, to ograniczone są ciągi (a_n) oraz (b_n) jego części rzeczywistych (odp. zespolonych) i dzięki twierdzeniu Bolzano-Weierstrassa można z nich wybrać podciągi zbieżne. Najpierw wybieramy podciąg wskaźników n_k dający zbieżność a_{n_k}, później już z tego podciągu wybieramy dalszy podciąg zapewniający zbieżność części urojonych. W ten sposób otrzymujemy zbieżność pewnego podciągu dla ciągu ograniczonego $(z_n) \subset \mathbb{C}$, czyli zespoloną wersję twierdzenia Bolzano-Weierstrassa.

Warunkiem równoważnym temu, że $\gamma = \lim_{z\to z_0} f(z)$ jest warunek ciągowy Heinego:

$$\Big(z_n \in D \setminus \{z_0\}, z_n \to z_0\Big) \Rightarrow f(z_n) \to \gamma.$$

Ta równoważność pozwala przenosić twierdzenia znane dla granic ciągów na grunt teorii granic funkcji zmiennej zespolonej o wartościach zespolonych. Na przykład, granica sumy (odp. iloczynu) dwu funkcji jest sumą (iloczynem) ich granic. Suma i iloczyn oraz złożenie funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.

Nieco większym problemem jest odwracanie funkcji ciągłych. Na przykład poruszając się wzdłuż okręgu z punktem z widzimy, że wartość z^2 porusza się wzdłuż okręgu dwa razy szybciej: $\arg(z^2) = 2\arg(z)$, funkcja ta przeskakuje z wartości zmierzającej do 2π przy $z \to e^{i\pi}$ na wartość zero. To tak, jakby wędrując po schodach kręconych po przejsciu jednego ich obiegu znaleźć się o kondygnację wyżej. Powoduje to nieciągłość funkcji $\sqrt{z}$ przy $\arg(z) \to 2\pi$. Z tego względu mówimy o tzw. gałęziach jednoznacznych dla funkcji typu pierwiastek, czy logarytm. Można je zdefiniować jako funkcje ciągłe na zbiorach otwartych niezawierających punktu zero i nie okrążających go - na przykład usuwając z koła o środuku w punkcie 0 (zero) jakiś promień wychodzący z punktu 0. Inne podejście do tego problemu przedstawił Bernhardt Riemann, konstruując powierzchnie dwuwymiarowe odpowiadające takim funkcjom.

Mając definicję granicy funkcji w punkcie, możemy zdefiniować pochodną zespoloną z funkcji określonej w pewnym otoczeniu D punktu z_0 jako granicę ilorazów różnicowych:

$$f'(z_0) := \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Okazuje się, że gdy taka pochodna istnieje w każdym punkcie obszaru, to musi ona być ciągła i wówczas f posiada pochodne wszystkich rzędów. Jest to wysoce kontrastujące z własnościami funkcji zmiennej reczywistej, na przykład $f(t)$ równa t^2 dla $t \geqslant 0$ oraz równa $-t^2$ dla $t < 0$ ma pochodną $2|t|$, ale w punkcie $t = 0$ nie ma już drugiej pochodnej.