Matematyka na kier. "MIiIŚ" - wykład nr 6. (21.IV 2021.)

6 Równania liniowe, macierze -c.d.

Zacznijmy od paru przykładów. Wzór na odwracanie macierzy jest szczególnie prosty dla macierzy 2×2. Niech A będzie taką macierzą, zaś C-macierzą jej dopełnień algebraicznych. Minory, to wyrazy z przeciwległych rogów, bo wykreślając kolumnę i wiersz (czyli dwa "boki kwadratu" stykające się w danym elemencie otrzymujemy macierz 1×1,(czyli liczbę) której wyznacznikiem jest ta liczba. Minory z przekątnej głównej w macierzy C są mnożone przez 1, a pozostałe dwa- przez -1. Przy liczeniu A^{-1} transponujemy C i dzielimy przez $D := \det(A)$. Wygląda to tak:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \; D = ad - bc, \; C = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}, \; A^{-1} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Można podać jeszcze pewn interpretację geometryczną modułu wyznacznika macierzy 2×2: można wykazać, że

$$|det(A)| = \texttt{pole równoległoboku, którego bokami są wektory } (a, c), (b, d).$$

Przykładem ważnej macierzy o wyznaczniku 1 jest macierz R_α rotacji (obrotu) o kąt α (podany w radianach):

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}. \texttt{ (obrót w kierunku przeciwnym do wskazówek zegara)}$$

Przykładem rozwiązania metodą wyznaczników układu równań może być

$$\begin{aligned} 2x - y - 5z &= 0 \\ 3x + 4y - 2z &= 11 \\ 3x - 2y + 4z &= 11 \end{aligned}$$

Macierz układu ma wyznacznik D, zaś D_j oznacza wyznacznik macierzy z j-tą kolumną zastąpioną w macierzy układu przez kolumnę danych. Tak więc

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -5 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 132, \; D_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -5 \\ 11 & 4 & -2 \\ 11 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 396, \; D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -5 \\ 3 & 11 & -2 \\ 3 & 11 & 4 \end{vmatrix} = 132,$$

również $D_3 = 132$, więc $x = \frac{D_1}{D} = 3$, $y = \frac{D_2}{D} = 1 = z$, gdzie wyznaczniki liczymy np. metodą Sarrusa.

6.1 rząd macierzy

Rząd operatora liniowego (ang. *rank of* S) $S \in \mathcal{L}(X, Y)$, oznaczany $\mathrm{rk}(S)$, to wymiar podprzestrzeni $S(X)$ przestrzeni Y. Można wykazać, że rząd operatora sprzężonego S^* jest taki sam. Rząd macierzy można zdefiniować na parę sposobów: np. jako maksymalna liczba liniowo niezależnych kolumn (tzw. rząd kolumnowy) lub jako maksymalna ilość liniowo niezależnych wierszy (rząd wierszowy) lub jako rząd operatora liniowego skojarzonego z macierzą (to będzie dokładnie rząd kolumnowy, bo operator ten przekształca wektory bazy kanonicznej w kolumny macierzy. Ponieważ $\mathrm{rk}(S^*) = \mathrm{rk}(S)$, rząd kolumnowy to to samo, co rząd wierszowy.

Minor stopnia k, danej macierzy, to wyznacznik macierzy kwadratowej $k \times k$ powstałej przez wykreślenie pewnej ilości kolumn i wierszy (takiej, by otrzymać macierz kwadratową $k \times k$. Niezerowanie się wyznacznika oznacza liniową niezależność kolumn w przypadku macierzy kwadratowych, więc można stąd wywnioskować, że rząd macierzy, to nnajwiększa z liczb k, dla których istnieje pewien niezerowy minor stopnia k.

Dla układu m równań liniowych o n niewiadomych postaci

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 \cdots + a_{jn}x_n = b_j,\ j = 1, 2, \ldots, m \tag{R1}$$

oprocz macierzy A układu rozważmy **macierz rozszerzoną** M o kolumnę (b_j):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{ms} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{ms} & b_m \end{pmatrix}.$$

Twierdzenie Kroneckera-Capellego Układ równań (R1) jest niesprzeczny (czyli istnieje przynajmniej jedno jego rozwiązanie) wtedy i tylko wtedy gdy rząd $\mathrm{rk}(A) = r$ macierzy A tego układu jest równy rzędowi macierzy rozszerzonej M. W takim przypadku układ ten ma dokładnie jedno rozwiązanie w przypadku gdy $\mathrm{rk}(A) = n$ (czyli jet tyle niewiadomych, ile wynosi rząd tych dwu macierzy. W przypadku gdy $\mathrm{rk}(A) < n$, jest nieskończenie wiele rozwiązań i jego rozwiązanie ogólne zależy od $n - r$ parametrów.

Metodę eliminacji (metoda Gaussa) przedstawimy na przykładzie układu:

$$\begin{aligned} x + y - 4z &= 1 \\ x - y + z &= 2 \\ 3x - y - 2z &= 5 \end{aligned}$$

stosując przekształcenia wierszy niezmieniające wyznacznika i mnożenie wierszy przez stałe oraz ewentualnie zamianę ich kolejności-czcemy uzyskać równoważny układ z macierzą układu trójkątną górną. W naszym konkretnym przykładzie mnożymy pierwsze równanie przez -1, dodajemy do drugiego. Ponadto pierwsze równanie pomnożone przez -3 dodamy do trzeciego, otrzymując układ

$$\begin{aligned} x + y - 4z &= 1 \\ -2y + 5z &= 1 \\ -4y + 10z &= 2 \end{aligned}$$

Ostatnie z równań, jako równoważne drugiemu, można usunąć zastępując je równością $0 = 0$, otrzymując trójkątną macierz układu. mamy 3 niewiadome, 2 istitne równania, więc traktujemy "nadmiarową niewiadomą -tu z jako parametr, oznaczmy go $z = t$, przy czym wartość $t \in \mathbb{R}$ będzie dowolna. Stąd

$$x = \frac{3 + 3t}{2},\ y = \frac{-1 + 5t}{2},\ z = t.$$

Jest to więc 1-parametrowa rodzina rozwiązań.