# 7 Elementy geometrii analitycznej

Zacznijmy od zastosowania wyznaczników do ustalania tzw. orientacji dla układów $d$ wektorów liniowo niezależnych w przestrzeni $\mathbb{R}^d$ względem kanonicznej bazy zero-jednkowej. Umieszczając współrzędne w bazie kanonicznej kolejnych wektorów (tworzą one inną bazę) jako wiersze macierzy, otrzymujemy tak zwaną macierz przejścia (z bazy kanonicznej do tej nowej bazy). Możemy następnie policzyć jej wyznacznik. Jeżeli jest on dodatni, mówimy, że układ ten jest dodatnio zorientowany, a jeżeli jest on ujemny -to mówimy o ujemnie zorientowanym układzie (względem bazy kanonicznej). Są więc w przestrzeni tylko dwie orientacje: dodatnia i ujemna. Ze względu na liniową niezależność -wyznacznik nie może być zerem.

W fizyce istotne jest np. w jakim kierunku będzie działała siła elektoromagnetyczna powstała na skutet przepływu prądu w polu magnetycznym. Dokładniej, chodzi o jej zwrot, bo wiadomo, że będzie ona prostopadła do wektorów prądu ("p") i pola magnetycznego ("m"). Jeśli w sposób naturalny rozprostijemy palce prawej ręki: kciuk, wskazujący, serdeczny ponumerujemy "p", "m", "s", to przy ich naturalnym rozstawieniu w 3 kierunkach wzajemnie porstopadłych, wyznaczymy kierunek (dokładniej, zwrot) siły.

W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^3$ oprócz iloczynu skalarnego można zdefiniować iloczyn wektorowy par wektorów oznaczany $\vec{u} \times \vec{w}$. Jeżeli $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ oznaczają kanoniczną bazę zerojedynkową w $\mathbb{R}^3$, zaś $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$, to możemy używając rozwinięcia Laplace'a względem pierwszego wiersza zdefiniować ten iloczyn wektorowy jako formalny wyznacznik:
**Definicja.**

$$\vec{u} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}.$$

Czyli $\vec{u} \times \vec{w} = (u_2 w_3 - w_2 u_3\ ,\ u_3 w_1 - w_3 u_1\ ,\ u_1 w_2 - w_1 u_2) \in \mathbb{R}^3$. Na przykład,

$$(1,2,3) \times (4,5,6) = (2 \cdot 6 - 3 \cdot 5, 3 \cdot 4 - 1 \cdot 6, 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4) = (-3, 6, -3).$$

Mamy ważną interpretację geometryczną: iloczyn $\vec{u} \times \vec{w}$ dwu wektorów z $\mathbb{R}^3$ jest zerem wtedy i tylko wtedy, gdy są one liniowo zależne. W przeciwnym przypadku jest to wektor prostopadły do obydwu, przy czym układ $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{u} \times \vec{w})$ jest dodatnio zorientowany. Długość tego wektora, czyli $\|\vec{u} \times \vec{w}\|$ jest równa polu równoległoboku o bokach $\vec{u}, \vec{w}$.

Należy podkreślić, że iloczyn wektorowy nie jest przemienny: $\vec{w} \times \vec{u} = -\vec{u} \times \vec{w}$. Nie jest też łączny, za to jest dwuliniowy, czyli rozdzielny względem dodawania wektorów i "jednorodny względem mnożenia przez skalar", tzn.

$$\alpha \cdot (\vec{u} \times \vec{w}) = (\alpha \vec{u}) \times \vec{w} = \vec{u} \times (\alpha \vec{w}),\ \ (\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$$

Ta dwuliniowość wraz z tabelką mnożenia wektorów bazowych: $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$ pozwala też algebraicznie wyznaczyć iloczyny dowolnej pary wektorów $\mathbb{R}^3$.
**Definicja.** Iloczyn mieszany 3 wektorów , oznaczany czasami $\vec{u}\vec{v}\vec{w}$ definiowany jest jako iloczyn skalarny (tu oznaczany przez $\circ$ ) pierwszego przez iloczyn wektorowy drugiego i trzeciego wektora:

$$\vec{u}\vec{v}\vec{w} := \vec{u} \circ (\vec{v} \times \vec{w}) \quad \big(= (\vec{u} \times \vec{v}) \circ \vec{w},\ \texttt{jak można wykazać}\big).$$

Jak wynika z prostego przeliczenia opartego na rozwinięciu Laplace'a, taki iloczyn mieszany jest równy wyznacznikowi macierzy o kolumnach $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$. Jego zerowanie się jest więc równoważne liniowej zależności tych wektorów. Ponadto jego moduł, $|\vec{u}\vec{v}\vec{w}|$ jest równy objętości równoległościanu wyznaczonego przez te 3 wektory. Jest to również sześciokrotna wartość objętości czworościanu rozpiętego na tych wektorach.

Rzut prostopadły $P_M w$ wektora $w$ na podprzestrzeń wektorową $M$, to taki wektor $y = P_M w$, który należy do $M$ oraz dla którego odległość od wektorów $v \in M$ jest minimalna: $\forall_{v\in M} \|v - w\| \geqslant \|w - y\|$. Warunkiem równoważnym tej minimalizacji odległości jest dla $y \in M$ postulat prostopadłości różnicy $w - y$ do $M$ (czyli $w - y \perp v$ dla każdego z wektorów $v \in M$).

Równoważność ta wynika z następującej obserwacji: Gdy $v \in M$, to prosta zawierająca wektory $v, y$ zawiera się w $M$, czyli dla każdego $t \in \mathbb{R}$ mamy

$$y_t := y + t(v - y) \in M,$$

więc funkcja $\mathbb{R} \ni t \mapsto \|w - y_t\|^2$ osiąga wartość najmniejszą gdy $t = 0$, bo $y_0 = y$ jest w najbliższej odległości od $w$ . Pochodna, o ile istnieje, musi być zerem dla $t = 0$. Ponieważ

$$\|w - y_t\|^2 = \|w - y + t(y - v)\|^2 = \|w - y\|^2 + 2t\langle w - y, y - v\rangle + t^2\|y - v\|^2,$$

wartość pochodnej w zerze dla badanej funkcji, to pomnożony przez 2 iloczyn skalarny: $\langle w-y, y-v\rangle$. To dowodzi prostopadłości: $w-y \perp y-v$. Ponieważ $\{y-v : v \in M\} = M$, wiec $w - y \perp M$. Równie łatwo sprawda się implikację w drugą stronę -wykazując, że funkcja $\|w - y_t\|^2$ jest niemalejąca. Jej druga pochodna jest stała $\geqslant 0$, a pierwsza $= 0$ dla $t = 0$, więc ta pierwsza pochodna musi być nieujemna. Wartość badanej funkcji dla $t = 1$ musi być nie mniejsza, ale $y_1 = v$. Stąd $\|w - y\| \leqslant \|w - v\|$.

Jak można wykazać, operator $P_M$ rzutu na podprzestrzeń $M \subset \mathbb{R}^d$ jest liniowy -czyli przekształca sumy wektorów na sumy wartości na tych wektorach i spełnia warunek jednorodności: $P_M(\alpha w) = \alpha P_M(w)$ dla wszystkich $\alpha \in \mathbb{R}, w \in \mathbb{R}^d$. Macierz tego operatora jest macierzą symetryczną. Ponadto $\|P_M w\| \leqslant \|w\|$, Jednym z ważniejszych zastosowań operatora $P_M$ rzutu na podprzestrzeń $M$ jest

**Twierdzenie o rozkładzie ortogonalnym** Każdy wektor $w \in \mathbb{R}^d$ można zapisać w postaci sumy $w = y+z$, gdzie $y \in M$ oraz $z \perp M$ (czyli $\forall_{v\in M}\ z \perp v$).

Faktycznie, wystarczy przyjąć $y = P_M x$, $z = w - y$. Jeśli odległość punktu $w$ od podprzestrzeni $M$ zdefinijemy jako liczbę

$$\mathrm{dist}(w, M) := \inf\{\|w - v\| :\ v \in M\},$$

to już wiemy, że

$$\mathrm{dist}(w, M) = \|w - P_M y\| = \|z\|. \tag{$*$}$$

Przypomnijmy, że $\ker(\phi)$ oznacza jądro (=przestrzeń zerową) odwzorowania liniowego $\phi$, określoną jako $\{w \in \mathbb{R}^d : \phi(w) = 0\}$. Jest to podprzestrzeń wektorowa, której wymiar dodany do wymiaru obrazu $\phi(\mathbb{R}^d)$ w sumie daje wartość $d$. Gdy $\phi$ przyjmuje wartości w $\mathbb{R}$, czyli jest funkcjonałem, to w przypadku $d = 2\phi \neq 0$, zbiór $\ker(\phi)$ jest prostą $M_1$ na płaszczyźnie o równaniu $a_1x_1 + a_2x_2 = 0$, gdzie $(a_1, a_2)$- jest 1-wierszową macierzą $\phi$, jak również (jako element $\mathbb{R}^2$) jest wektorem prostopadłym do $M_1$. Gdy $d = 3$, to równanie $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ określa podprzestrzeń dwuwymiarową $M_2 \subset \mathbb{R}^3$ będącą zbiorem zaczepionych w zerze wektorów prostopadłych do wektora $(a_1, a_2, a_3)$. Tym razem płaszczyzna $M_2$ jest jądrem funkcjonału działającego jako mnożenie skalarne przez wektor o współrzędnych $(a_1, a_2, a_3)$. W obydwu przypadkach (prostej $M_1$ i płaszczyzny $M_2$) możemy działanie takiego funkcjonału zapisać w jednolitej postaci

$$\phi(v) = \langle v, u\rangle,$$

gdzie $u \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ jest wektorem[1] "generującym funkcjonał $\phi$". Dla dowolnie wybranego wektora $w \in \mathbb{R}^d$ (tu $d = 2$ lub $d = 3$) wykażemy, że

$$\mathrm{dist}(w, \ker(\phi)) = \frac{|\phi(w)|}{\|u\|},\ \texttt{gdy}\ \phi = \langle\cdot, u\rangle,$$

co da nam wzory na odległość punktu od prostej (odp. od półpłaszczyzny) z wykorzystaniem rzutu i wzoru (*). Zauważmy, że gdy zdefiniujemy wektor

[1] $u \neq 0$, bo zakładamy, że $\phi \neq 0$, czyli, że $\exists_w\ \phi(w) \neq 0$.

$u_* := \frac{1}{\phi(u)}u$, to $\phi(u_*) = 1$, $u_* \perp \ker(\phi)$, zaś $\|u_*\| = \frac{1}{\|u\|}$, ponieważ $\phi(u) = \|u\|^2$. Natomiast dla dowolnego wektora $w$ jest

$$\phi\big(w - \phi(w)u_*\big) = \phi(w) - \phi(w)\phi(u_*) = 0, \texttt{ więc } w - \phi(w)u_* \in \ker(\phi).$$

Suma $w = (w - \phi(w)u_*) + \phi(w)u_*$ jest więc rozkładem ortogonalnym wektora $w$, jego rzutem prostopadłym na $M = \ker(\phi)$ jest $w - \phi(w)u_*$, zaś $w - P_M w = \phi(w)u_*$ jest "resztą"- wektorem, którego długość jest na podstawie wzoru (*) równa odległości $w$ od $\ker(\phi)$. Ponieważ $\|u_*\| = \frac{1}{\|u\|}$, więc $\|\phi(w)u_*\| = \frac{|\phi(w)|}{\|u\|}$. $\square$

W szczególności, na płaszczyźnie odległość punktu $w = (x_0, y_0)$ od prostej $L = \{(x,y) : Ax + By = 0\}$, to $\frac{|Ax_0+By_0|}{\sqrt{A^2+B^2}}$. W przestrzeni trójwymiarowej punkt $w = (x_0, y_0, z_0)$ jest oddalony od płaszczyzny $\Pi = \{(x,y,z) : ax + by + cz = 0\}$ o liczbę $\frac{|ax_0+by_0+cz_0|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$. Jeżeli mamy płaszczyznę bądź prostą przesuniętą (prostopadłą do wektora $u$ (równego $(A,B)$ lub $(a,b,c)$-odpowiednio)) i przechodzącą przez punkt $P_1$ o współrzędnych $x_1, y_1, z_1$, to można skorzystać z odwzorowania przesunięcia równoległego $\mathcal{T}_{P_1}$ o wektor $P_1$ -jest to odwzorowanie $\mathcal{T}_{P_1} : \mathbb{R}^d \ni P \mapsto P + P_1$, które jest izometrią, czyli zachowuje odległości, bo $\|(P_0+P_1)-(P+P_1)\| = \|P_0-P\|$. Prosta (odp. płaszczyzna) przechodąca przez punkt $P_1$ ma (w oznaczeniach j.w.) opis jako zbiór $M = \{P : \phi(P - P_1) = 0\}$. Odległość tego zbioru od punktu $P_0$, to tyle samo, co odległość od punktu $\mathcal{T}_{-P_1}(P_0) = P_0 - P_1$ od zbioru $\mathcal{T}_{-P_1}(M)$. Otrzymujemy więc ogólny wzór:

**Twierdzenie.** Odległością punktu $P_0 = (x_0, y_0)$ od prostej o równaniu

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$$

jest $\frac{|A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)|}{\sqrt{A^2+B^2}}$. W przypadku trójwymiarowym punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ jest oddalony od płaszczyzny o równaniu $a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$ o wartość $\frac{|a(x_0-x_1)+b(y_0-y_1)+c(z_0-z_1)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

**Inne równania prostej**: W równaniach tych uwzględniamy wektor kierunkowy. Załóżmy, że prosta w $\mathbb{R}^d$ ma przechodzić przez punkt $P_0$ (zamiast dotychczasowo rozważanego $P_1$) i ma być równoległa do danego wektora $\vec{w}$. Może to być np. wektor o początku $P_0$ i końcu $P_1$, czyli wektor $P_1 - P_0$. Punkty $P_t$ na prostej niech wyznacza parametr $t \in \mathbb{R}$. Wówczas każdej wartości $t \in \mathbb{R}$ można przypisać punkt $P_t \in \mathbb{R}^d$ dany jednym z tzw. **równań wektorowych prostej:**

$$P_t = P_0 + t\vec{w}, \quad albo \quad P_t = P_0 + t(P_1 - P_0).$$

W przypadku prostej w $\mathbb{R}^3$ jeśli punkty $P_1, P_0$ mają odpowiednio współrzędne $(x_1, y_1, z_1)$ oraz $(x_0, y_0, z_0)$, to punkt $P_t$ na prostej ma współrzędne

$$x_0 + t(x_1 - x_0), y_0 + t(y_1 - y_0), z_0 + t(z_1 - z_0)$$

i jest to **równanie parametryczne prostej**.

To, ze punkt $(x, y, z)$ leży na tej prostej można opisać rugując parametr $t$, co daje tzw. równanie zwyczajne (lub **kierunkowe**) prostej:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}.$$

Więc gdy $\alpha$, $\beta$, $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, to koniunkcja równości

$$\alpha(x - x_0) = \beta(y - y_0) = \gamma(z - z_0)$$

opisuje równanie kierunkowe prostej przechodzącej przez $P_0$ i równoległej do wektora $(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma})$.

Można też opisać też prostą podając równania dwu płaszczyzn w $\mathbb{R}^3$, których przecięciem będzie ta prosta, czyli tzw. równanie krawędziowe. Jest to układ dwu równań płaszczyzn przechodzących przez wspólny punkt $P_0$ i prostopadłych odpowiednio do dwu niewspółliniowych wektorów (np. $(A, B, C), (a, b, c)$). Równanie krawędziwe ma wtedy postać:

$$\begin{cases} A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) & = 0 \\ a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) & = 0. \end{cases}$$

Odległość $d$ punktu $P_1$ od prostej o równaniu kierunkowym $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ wyraża się (szczegóły dowodu pomijamy) wzorem:

$$d = \frac{1}{\|\vec{u}\|}\|\vec{P_1 P} \times \vec{u}\|,$$

w którym $\vec{u} = (a, b, c)$ jest wektorem kierunkowym tej prostej, $P$ jest dowolnym punktem na prostej, $\vec{P_1 P}$ -wektorem o początku $P$ i końcu $P_1$. (Zauważmy tylko, że $\|\vec{P_1 P} \times \vec{u}\|$ jest iloczynem długości tych wektorów przez $|\sin \angle(\vec{P_1 P}, \vec{u})|$ -moduł sinusa kąta zawartego między nimi i reszta wynika z z definicji sinusa.)

Iloczyn wektorowy można też wykorzystać w zadaniu polegającym na szukaniu równania płaszczyzny przechodzącej przez punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ i równoległej do dwu niewspółliniowych wektorów $\vec{u}, \vec{v}$. Poza dość naturalnym równaniem parametrycznym, możemy podać równanie typu $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0) = 0$. Wystarczyznaleźć wektor $(a, b, c)$ prostopadły do tej płaszczyzny. Takim wektorem będzie, rzecz jasna, iloczyn wektorowy $\vec{u} \times \vec{v}$.

Z kolei, równanie płaszczyzny zawierającej trzy różne punkty o współrzędnych $(x_k, y_k, z_k)$, $k = 1, 2, 3$ można uzyskać używając wyznacznika. Wektory zaczepione punkcie $(x_1, y_1, z_1)$ o końcach $(x, y, z), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)$ leżą na tej płaszczyźnie wtedy i tylko wtedy gdy są one liniowo zależne czyli gdy zeruje się wyznacznik

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Kąt $\alpha = \angle(u, v)$ między wektorami $u, w \in \mathbb{R}^d$ możemy wyznaczyć poprzez badanie wartości $\cos\alpha$ dzieląc iloczyn skalarny $u \circ v$ przez iloczyn ich norm euklidesowych:

$$\cos\angle(u, v) = \frac{u \circ v}{\|u\|\|v\|}.$$

Wzór ten, ze względu na parzystość funkcji cos wyznaczy taki kąt jedynie z dokładnością do kierunku, nie uwzględniając zwrotu, czyli kąt nieskierowany. Można też długość iloczynu wektorowego dzielić przez iloczyn długości wektorów, otrzymując moduł z sinusa $\alpha$.

Do wyznaczania kąta między prostymi wystarczy podać kąt nieskierowany, a nawet $|\cos\angle(u, v)|$, jeżeli $u, v$ są kątami kierunkowymi dla tych prostych. W przypadku dwu prostych na płaszczyźnie można też zmierzyć kąt pomiędzy wektorami normalnymi (czyli prostopadłymi) do tych prostych.

Analogicznie, kąt między parą płaszczyzn w $\mathbb{R}^3$ wyznaczymy jako kąt ich wektorów normalnych. Przekstłcając algebraicznie równania na ich postać wygodniejszą do znajdywania kątów możemy sobie poradzić w bardziej skomplikowanych sytuacjach (np. gdy proste zadane są równaniami krawędziowymi).