8 Funkcje wielu zmiennych

Najczęściej będziemy mieli do czynienia z funkcjami dwu lub 3 zmiennych, których wartości oznaczamy zazwyczaj w ostatnim przyadku $f(x,y,z)$. W istocie można je traktować jako funkcje zmiennej wektorowej przypisujące punktowi $P \in \mathbb{R}^3$ w współrzędnych (x,y,z) wartość $f(x,y,z)$. Można też rozważać odwzorowania o wartościach wektorowych: $F : D \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$, wtedy $F(P)$ można traktować jako zestawienie k funkcji o wartościach skalarnych $f_j : D \to \mathbb{R}$, gdy współrzędnymi wektora $F(P)$ są $(f_1(P), f_2(P), \dots f_k(P))$. Okaże się jednak, że istota trudności dotyczy przypadku $k = 1, g > 1$. Na czym polegają te trudności zobaczymy wkrótce. Na początek podamy parę definicji i własności bez trudu i prawie dosłownie przenoszących się z przypadku 1-wymiarowego (gdy $d = 1$).

Wektory w przestrzeni $\mathbb{R}^d$ zapisywać będziemy w postaci $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_d)$ (lub np. dla $d = 3$ w postaci $\mathbf{v_n} = (x_n, y_n, z_n)$ gdzie $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Symbolem $K(\mathbf{a}, r)$, gdzie $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d, r > 0$ oznaczamy kulę otwartą

$$K(\mathbf{a}, r) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \|\mathbf{a} - \mathbf{x}\| < r\}.$$

Jak zwykle, $\|\cdot\|$ oznacza tu normę euklidesową, czyli

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \cdots + (x_d - a_d)^2}$$

i jest to odległość punków $\mathbf{a}$, $\mathbf{x}$.

Dla punktu $\mathbf{P_0} \in \mathbb{R}^d$ jego odległość od zbioru (niepustego) $E \subset \mathbb{R}^d$ definiujemy jako liczbę

$$\mathrm{dist}(\mathbf{P_0}, E) := \inf\{\|\mathbf{P_0} - \mathbf{Q}\| : \mathbf{Q} \in E\}.$$

Definicja. Zbiór $D \subset \mathbb{R}^d$ jest otwarty, gdy każdy jego punkt zawiera się w tym zbiorze D wraz z pewną kulą. Czyli $\forall_{\mathbf{a} \in D} \exists_{r>0} K(\mathbf{a}, r) \subset D$. (Jak można łatwo zauważyć, istnienie takiej kuli jest równoważne temu, że $\mathrm{dist}(\mathbf{a}, (\mathbb{R}^d \setminus D)) > 0$.) Mówimy o takich $\mathbf{a}$, że są punktami wewnętrznymi zbioru D.

Korzystając z nierówności trójkąta można nietrudno sprawdzić, że każda kula $K(\mathbf{a}, r)$ jest zbiorem otwartym[1].

Mówimy, że zbiór $E \subset \mathbb{R}^d$ jest domknięty, gdy jego dopełnienie, czyli $\mathbb{R}^d \setminus E$ jest zbiorem otwartym. Warunkiem równoważnym domkniętości zbioru E jest zachodzenie implikacji:

$$(\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d, \mathrm{dist}(\mathbf{a}, E) = 0) \Rightarrow \mathbf{a} \in E.$$

Definicja. Ciąg wektorów $\mathbf{P_n} \in \mathbb{R}^d$ zmierza do granicy $\mathbf{P_0} \in \mathbb{R}^d$, co zapisujemy $\mathbf{P_0} = \lim \mathbf{P_n}$, lub: " $\mathbf{P_n} \to \mathbf{P_0}$ przy $n \to \infty$", jeżeli ciąg liczbowy $\|\mathbf{P_n} - \mathbf{P_0}\|$ zmierza do zera, czyli gdy

$$\lim \|\mathbf{P_n} - \mathbf{P_0}\| = 0.$$

Z definicji granicy ciągu liczbowego (tych norm różnic) i z definicji kuli wynika, że

$$\mathbf{P_0} = \lim \mathbf{P_n} \Leftrightarrow \forall_{\epsilon>0} \exists_M \forall_{n \geqslant m} \mathbf{P_n} \in K(\mathbf{P_0}, \epsilon).$$

Zbieżność $\mathbf{P_n} \to \mathbf{P_0}$ jest równoważna tzw. "zbieżności po współrzędnych", czyli zbieżności do zera rzutów wektorów $\mathbf{P_n} - \mathbf{P_0}$ na każdą z osi. Wyjaśnimy to dla $d = 2$, gdzie $\mathbf{P_n} = (x_n, y_n)$ i np. rzutem $\mathbf{P_n} - \mathbf{P_0}$ na oś OX jest $x_n - x_0$, więc zbieżność po współrzędnych oznacza, że $x_n \to x_0$ oraz $y_n \to y_0$. Dowód,

[1] Gdy $\mathbf{x} \in K(\mathbf{a}, r)$, to $r_1 := \|\mathbf{a} - \mathbf{x}\| < r$ i gdy $\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| < r - r_1$, to $\|\mathbf{a} - \mathbf{z}\| < r_1 + (r - r_1) = r$, czyli $K(\mathbf{x}, r - r_1) \subset K(\mathbf{a}, r)$.

że jest to równoważne warunkowi $\|\mathbf{P_n} - \mathbf{P_0}\| \to 0$ wynika z twierdzenia o 3 ciągach i z oczywistych nierówności:

$$0 \leqslant \max(|x_n - x_0|, |y_n - y_0|) \leqslant \|\mathbf{P_n} - \mathbf{P_0}\| \leqslant |x_n - x_0| + |y_n - y_0|.$$

Analogicznie jest dla dowolnej skończonej ilości d zmiennych.

Można dość łatwo sprawdzić, że zbiór $E \subset \mathbb{R}^d$ jest domknięty wtedy i tylko wtedy, gdy jeżeli dla dowolnego ciągu zbieżnego (w $\mathbb{R}^d$), którego wszystkie wyrazy należą do E, również jego granica musi być w zbiorze E.

Podobnie, jak w przypadku jednej zmiennej, granicę funkcji możemy definiować jedynie w punktach skupienia jej dziedziny.

Definicja. Punkt $\mathbf{P}_0$ jest punktem skupienia zbioru $D \subset \mathbb{R}^d$, gdy

$$\forall_{\delta>0}\exists_{P\in D}\, 0 < \|P - \mathbf{P}_0\| < \delta.$$

Warunek ten zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg o wyrazach $P_n \in D \setminus \{\mathbf{P}_0\}$, ktorego granicą jest punkt $\mathbf{P}_0$.

Definicja. Jeżeli $\mathbf{P}_0$ jest punktem skupienia dziedziny odwzorowania $F : D \to \mathbb{R}^k$, to wektor $Y \in \mathbb{R}^k$ nazywamy granicą odwzorowania F w punkcie $\mathbf{P}_0$, co zapisujemy $Y = \lim_{P\to P_0} F(P)$, gdy

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{P\in D}\, 0 < \|P - \mathbf{P}_0\| < \delta \Rightarrow \|Y - F(P)\| < \epsilon. \tag{1}$$

F nazwiemy odwzorowaniem ciągłym w punkcie $\mathbf{P}_0$, gdy albo nie jest to punkt skupienia dziedziny, albo

$$\lim_{P\to\mathbf{P}_0} F(P) = F(\mathbf{P}_0).$$

Tak samo, jak w przypadku funkcji jednej zmiennej, mamy następujące podstawowe własności granic:

Twierdzenie.

1. Granica, jeśli istnieje, jest wyznaczona jednoznacznie.

2. Granica sumy dwu odwzorowań jest sumą granic. Jeśli dla $D \subset \mathbb{R}^d$ funkcja $\varphi : D \to \mathbb{R}$ oraz odwzrowanie $F : D \to \mathbb{R}^d$ mają granice w punkcie $\mathbf{w}$, to ich iloczyn ma granicę będącą iloczynem granic.

3. Definicja granicy jest równoważna "warunkowi ciągowemu" Heinego:

$$\big(P_n \in D \setminus \{\mathbf{P}_0\}, P_n \to \mathbf{P}_0\big) \Rightarrow F(P_n) \to Y. \tag{2}$$

4. Gdy $\mathbf{F} = (f_1, \ldots, f_k) : D \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k, \mathbf{g} = (g_1, \ldots g_k) \in \mathbb{R}^k$, to

$$\lim_{\mathbf{v}\to\mathbf{w}} \mathbf{F}(\mathbf{v}) = \mathbf{g} \Leftrightarrow (\forall_{j\in\{1,2,\ldots,k\}}\, g_j = \lim f_j(\mathbf{v}) \quad \texttt{przy} \quad \mathbf{v} \to \mathbf{w})$$

5. Suma, złożenie odwzorowań ciągłych -są również ciągłe

W szczególności, dzięki tezie 4., granice, ciągłość odwzorowania o wartościach w $\mathbb{R}^k$ (czyli zestawienia $\mathbf{F} = (f_1, \ldots, f_k)$ funkcji o wartościach skalarnych wystarczy zbadać oddzielnie dla każdej ze składowych (czyli dla wszystkich $f_j, j = 1, \ldots, k$). Ma to oczywisty związek ze "zbieżnością po współrzędnych". Z drugiej strony, mamy (np. dla $d = 2$) warunek Heinego i przy badaniu granicy w punkcie (x_0, y_0) funkcji $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ rozpatrujemy ciągi punktów $(x_n, y_n) \in D$ zbieżne do (x_0, y_0). To może i pojęcie granicy podwójnej da się "rozłożyć na współrzędne"? -NIESTETY, NIE!

Przykład. Jeśli $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ dla $(x,y) \neq (0,0)$ oraz $f(0,0) = 0$, to $\forall_y$ funkcja $\mathbb{R} \ni x \to f(x,y)$ (w zapisie bezargumentowym oznaczamy ją $f(\cdot, y)$)oraz $\forall_x$ funkcja $f(x,\cdot)$ -są ciągłe, zmierzają do zera w zerze. Tak więc, istnieje tzw. granica iterowana (od włoskiego *iterare* = powtarzać):

$$\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y)) = 0.$$

Ale dla zbieżnego do zera ciągu $\mathbf{w}_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ mamy $f(\mathbf{w}_n) = \frac{1}{2} \not\to 0$.

Wykres f z tego przykładu możemy sobie wyobrazić jako pewną powierzchnię zakrzywioną w $\mathbb{R}^3$. Na osiach OX,OY jest ona równa zero, na każdej prostej przechodzącej przez punkt $(0,0)$ (z jego wyjątkiem) jest stała (np.$-\frac{1}{2} \leqslant f(x,ax) = \frac{a}{1+a^2} \leqslant \frac{1}{2}$), wartości ekstremum mamy gdy $a = \pm 1$. W punkcie (0,0) wykres jest "rozerwany"- zachowuje się trochę tak, jak powierzchnia schodów kręconych w pobliżu ich osi - ma przyrosty bliskie 1 dla dowolnie małych przyrostów argumentu. We współrzędnych biegunowych $(x,y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ jej wartość wyraża się jako funkcja $\cos\varphi\sin\varphi$, niezależąca od r. Można powiedzieć, że jest to funkcja jednorodna stopnia 0, gdzie jednorodność stopnia p oznacza, że $f(r\mathbf{w}) = r^p f(\mathbf{w})$. Takie funkcje, o ile nie są stałe (a są stałe na prostych przechodzących przez $\vec{0}$ z wyjętym tym początkiem układu), nie mogą mieć granicy w zerze! W większości zadań o granicach podwójnych występuje tego typu problem -ale czasami dopiero podstawienie (np. typu $z = y^2$) sprowadzi f do postaci jednorodnej. Przykładem jest $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$ -stała na parabolach $y = ax^2$. Ta funkcja nie ma granicy w zerze, choć na każdej prostej przechodzącej przez początek układu -zmierza do zera (proszę sprawdzić!)

8.1 Badanie granic podwójnch

Ponieważ pojęcie granicy podwójnej będzie kluczowe dla badania różniczkowalności, prześledźmy na przykładach metodę badania, czy takie granice istnieją. Ponieważ $(x,y) \to (x_0,y_0)$ dokładnie wtedy, gdy $(x-x_0, y-y_0) \to (0,0)$, czyli gdy równocześnie $x - x_0 \to 0$ oraz $y - y_0 \to 0$, ograniczymy się do badania granic w zerze ($\mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$ jest początkiem układu współrzędnych).

Przykład 1 $f(x,y) = \frac{\sqrt[3]{x}\sin(xy^2)\sqrt[3]{(y^2)}}{x^2+y^4}$ dla $(x,y) \neq (0,0)$. Czy trudno jest wykazać, że f zmierza do zera przy $(x,y) \to \mathbf{0}$? -zależy (od metody). Spróbujmy metody oszacowań: Niech M oznacza mianownik. ($M = M(x,y)$ zmierza do zera, podobnie jak licznik.) Szacujemy: $|x| \leqslant M^{\frac{1}{2}}, |y| \leqslant M^{\frac{1}{4}}$. Możemy to wykorzystać do oszacowania licznika przez M^r. Jeśli uda się takie oszacowanie dla pewnego $r > 1$, to $|f(x,y)| \leqslant M^{r-1}$, co zmierza do zera przy $M \to 0$ (a tak jest gdy $(x,y) \to \mathbf{0}$), bo $r - 1 > 0$. Licznik jest tu iloczynem, jeśli każdy z czynników oszacujemy z osobna przez pewne potęgi M, to r otrzymamy sumując wykładniki. Np. $|\sqrt[3]{x}| \leqslant M^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = M^{\frac{1}{6}}$. Natomiast $|\sin t| \leqslant |t|$ dla $t = xy^2$ daje $|\sin(xy^2)| \leqslant M^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot 2} = M$. Na koniec - jeszcze $y^2 \leqslant M^{\frac{1}{2}}$. Otrzymamy $r = \frac{1}{6} + 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{3} > 1$, więc szukaną granicą jest zero.

Trochę gorzej jest w przypadku ułamków o mianowniku zmiennego znaku (np. $x - y^3$). W takich przypadkach należy szukać raczej ciągów, dla których mianownik szybciej zmierza do zera niż licznik, wówczas granicy (skończonej) nie będzie. (Czynnik zmierzający do zera może czasami się uprościć np. dzięki wzorom skróconego mnożenia.) Nie będziemy się jednak tego typu granicami zajmowali, bo do badania różniczkowalności na ogół wystarcza granica o mianowniku typu $(x^2+y^2)^s$ dla $s > 0$.

Przykład 2 $g(x,y) = \frac{x(1-\cos y)}{x^2+y^4}$. Ponieważ $g(0,y) = 0 = g(x,0)$, granice iterowane istnieją i są równe zero. Aby wykazać nieistnienie granicy, wystarczy znaleźć ciąg $(s_n,t_n) \to (\mathbf{0})$, dla którego $g(s_n,t_n)$ nie zmierza do zera. Trzeba pamiętać, że $1 - \cos y = \cos 0 - \cos y = -2\sin\frac{0+y}{2}\sin\frac{0-y}{2} = 2\sin^2\frac{y}{2}$, więc $\lim_{y\to 0}\frac{y^2}{1-\cos y} = 2$, co pozwoli na pozbycie się funkcji trygonometrycznej. Dla $g_1(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ znajdziemy odpowiednie s_n, t_n. Podstawienie $s_n = t_n = \frac{1}{n}$ nie będzie skuteczne. Ale dla $s_n = \frac{1}{n^2}$, $t_n = \frac{1}{n}$ mamy $g_1(t_n^2, t_n) = \frac{1}{2}$. Więc granica nie istnieje! Ale jak można do tego dojść?

(1) Bardziej skomplikowane funkcje zamieniamy na asymptotycznie równoważne wielomiany. (np. dla $\phi(x)$ szukamy takiego $k \in \mathbb{N}$, aby $\lim_{x\to 0} \frac{\phi(x)}{x^k} = C$, gdzie $0 < C < +\infty$. Jeśli ϕ jest jednym z czynników licznika funkcji $g(x, y)$, funkcję g możemy pomnożyć przez iloraz $\frac{x^k}{\phi(x)}$, otrzymując prostszą w badaniu funkcję g_1, w której na miejscu ϕ występuje już x^k (na koniec stosując twierdzenie o granicy iloczynu).

(2) Przypuśćmy, że doprowadzimy do postaci, w której licznik i mianownik są wielomianami, lub iloczynami pewnych potęg, sumami takich iloczynów. Jeśli $M(tx, ty) = t^s M(x, y)$ dla dowolnych $t, x, y \in \mathbb{R}$, to -jak już wspomniałem, M jest funkcją jednorodną stopnia s. Czasami -jak w naszym ostatnim przykładzie, funkcja nie będzie jednorodna, lecz po podstawieniu nowej zmiennej ($x^a = X$,lub $Y := y^b$) stanie się jednorodną funkcją zmiennych X, Y.

Jeśli po takim „ujednorodnieniu" otrzymamy w liczniku funkcję postaci $X^k Y^l$, gdzie $k+l > s$, granica równa zero wyniknie z oszacowań jak w przykładzie 1, o ile składniki mianownika są nieujemne (w parzystych potęgach). Jeśli natomiast $k + l = s$, to licznik $L(x, y)$ i mianownik $M(x, y)$ mają jednakowy stopień jednorodności, zaś ich iloraz będzie stały na prostych przechodzących przez początek układu. Są to proste o równaniach $Ax + By = 0$, np. $y = cx$. Ciągi $(\frac{1}{n}, c\frac{1}{n})$ zmierzają do zera, więc $g(\frac{1}{n}, c\frac{1}{n})$ zmierza do granicy funkcji w punkcie $\mathbf{0}$, o ile taka istnieje. Ale $(\frac{1}{n})^s$ wyłączamy zarówno w liczniku, jak i w mianowniku, co się redukuje. Stąd wartości g na tych ciągach są stałe, równe $g(1, c)$. Jeśli granica w zerze istnieje, musi też być taka sama (równa $g(1, c)$). Funkcja jest stała na prostych przechodzących przez $\mathbf{0}$, ta wartość jest równa granicy w zerze, więc taka sama na każdej z tych prostych- w konsekwencji sama funkcja musi być stała. W przeciwnym razie- granica nie istnieje. Szukanie "kierunku podejścia do **0** podyktowane jest więc procesem "ujednorodnienia mianownika".

(3) Czasami funkcja zależy jedynie od pewnego wielomianu zmiennych x, y, pojawiającego się w jej różnych miejscach- jest to podstawienie do funkcji zmiennej takiego typu pozwoli znaleźć granicę metodami granicy funkcji złożonej.

Do granic podwójnych możemy stosować twierdzenia znane z teorii granic zwykłych, dzięki równoważności definicji z warunkiem HEINEGO. Na przykład, granica sumy jest sumą granic, nierówności słabe zachowują się przy przejściu do granic. Ostre nierówności między granicami utrzymują się w pewnym sąsiedztwie punktu.