

24 Zastosowania całki Riemanna

24.1 Długość krzywej

Możemy rozważać krzywe na płaszczyźnie \mathbb{R}^2 , w przestrzeni \mathbb{R}^3 , lub w \mathbb{R}^d . Najpierw trzeba określić metodę mierzenia odległości dwu punktów tej przestrzeni wektorowej. Zazwyczaj jest to **odległość euklidesowa**, np. dla punktów $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ liczymy tzw. **normę euklidesową** wektora $P_2 - P_1$, oznaczmy ją symbolem $\|P_2 - P_1\|_2 := \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Można też używać odległości w sensie normy "metryki taksówkowej" $\|P_2 - P_1\|_1 := |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$. Gdy w danym mieście wszystkie ulice przecinają się pod kątem prostym, a punkty P_1, P_2 znajdują się na jakichś dwu skrzyżowaniach, to jadąc taksówką można na parę sposobów wybrać najkrótszą drogę, będzie nią właśnie $\|P_2 - P_1\|_1$. Podstawowe własności każdej **normy**: $\|\cdot\|$ w przestrzeni wektorowej X , to:

- (1) **dodatniość**: $\forall v \in X \ v \neq 0 \Rightarrow \|v\| > 0$,
- (2) **nierówność trójkąta**: $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$,
- (3) **jednorodność**: $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$ zachodzące dla wszystkich $v, w \in X, \alpha \in \mathbb{R}$.

W dalszym ciągu będziemy używać normy euklidesowej, zamiast $\|v\|_2$ pisząc dla uproszczenia $\|v\|$. Łamana o wierzchołkach $P_0, P_1, P_2, \dots, P_k$, to suma odcinków $\overline{P_0 : P_1}, \overline{P_1 : P_2}, \dots, \overline{P_{k-1} : P_k}$. **Długość łamanej** określamy jako sumę długości jej odcinków, czyli $\sum_{j=1}^k \|P_j - P_{j-1}\|$.

Krzywą płaską nazywamy odwzorowanie ciągłe $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ -choć krzywą nazywany bywa czasem też zbiór punktów postaci

$$\gamma^* = \{\gamma(t) = (x(t), y(t)) : t \in [\alpha, \beta]\},$$

gdzie $x, y : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ są funkcjami ciągłymi. Chcąc być bardziej precyzyjnym, ten zbiór γ^* nazwiemy **obrazem geometrycznym krzywej γ** . Parę funkcji (x, y) , czyli funkcję $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ o wartościach wektorowych $\gamma(t)$, nazwiemy parametryzacją tego zbioru. (Każdy taki zbiór γ^* ma wiele parametryzacji, np. okrąg o promieniu R i o środku w początku układu współrzędnych - ma parametryzacje:

$$\gamma_1(t) = (R \cos t, R \sin t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

oraz

$$\gamma_2(t) = (R \cos(2\pi t), R \sin(2\pi t)), \quad t \in [0, 1],$$

jak również

$$\gamma_3(t) = (R \sin 2\pi t, R \cos 2\pi t), \quad t \in [0, 1].$$

Przy pierwszych dwu parametryzacjach, wraz ze wzrostem t , punkt porusza się po okręgu w kierunku przeciwnym do biegu wskazówek zegara (ten kierunek przyjmujemy jako naturalny), zaś w trzecim przypadku -w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara, dokonując jednego pełnego obiegu tego okręgu. Można też parametryzować okrąg w sposób "wielokrotny" -np. biorąc $\gamma_1(t)$ $t \in [-6\pi, 6\pi]$ -6-krotnie. Przy mierzeniu długości γ musimy, rzecz jasna, uwzględnić te krotności. Stąd taka, a nie inna definicja:

Krzywą w przestrzeni d -wymiarowej nazwiemy funkcję ciągłą $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$. Wówczas punkt $\gamma(t)$ ma d współrzędnych: $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_d(t))$ i ciągłość γ oznacza ciągłość każdej z jej współrzędnych. Krzywa jest klasy C^1 , gdy wszystkie funkcje $x_1(\cdot), \dots, x_d(\cdot)$ są klasy C^1 . Wektorem prędkości krzywej w punkcie $\gamma(t_0)$ nazwiemy wektor pochodnych: $(x'_1(t_0), \dots, x'_d(t_0)) \stackrel{\text{def}}{=} \gamma'(t)$.

Przykładem obrazu krzywej jest wykres funkcji ciągłej $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Tu $x(t) = t, y(t) = f(t), \gamma(t) = (t, f(t)) \in \mathbb{R}^2$.

Podziałowi $\tau = (t_0 = \alpha < t_1 < \dots < t_n = \beta)$ odcinka $[\alpha, \beta]$ odpowiada układ punktów $\gamma(t_j) = (x(t_j), y(t_j))$ na tej krzywej. Łamaną przechodzącą kolejno przez punkty $\gamma(t_0), \gamma(t_1), \dots, \gamma(t_n)$ nazwiemy **łamaną wpisaną w krzywą**. Wraz ze wzrostem „dokładności podziału τ (czyli wraz z maleniem jego średnicy), te łamane wpisane coraz dokładniej przybliżają kształt naszej krzywej (w pewnym momencie nie są rozróżnialne dla naszego oka od krzywej- gdy jest ona zaznaczona graficznie linią o jakiejś dodatniej grubości). Z nierówności trójkąta

wynika, że długość łamanej odpowiadającej drobniejszemu od τ podziałowi jest większa, od długości łamanej wyznaczonej punktami podziału τ .

Definicja. Długością $\ell(\gamma)$ krzywej γ nazywamy kres górny długości łamanych wpisanych w tę krzywą. Gdy $\ell(\gamma) < \infty$, krzywą nazwiemy prostowalną.

Na przykład, wykres funkcji danej wzorem $f(0) = 0, f(t) = t \sin \frac{1}{t}, 0 < t \leq 1$ jest krzywą, która nie jest prostowalna. Tym niemniej, mamy

Twierdzenie. Każda krzywa klasy C^1 , czyli taka, że jej współrzędne mają pochodne ciągłe ($x', y' \in C[a, b]$) jest prostowalna, przy czym jej długość wynosi

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \quad (1)$$

W przypadku d -wymiarowej krzywej $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ jej długość

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt,$$

gdzie $\|\gamma'(t)\|$ oznacza normę euklidesową (długość) wektora złożonego z pochodnych w punkcie t funkcji składowych γ , czyli jest to pierwiastek kwadratowy z sumy $\sum_{j=1}^d \left(\frac{d\gamma_j}{dt}\right)^2$, jeśli $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_d(t)) \in \mathbb{R}^d$.

Szkic dowodu: Dla podziału τ punktami t_j użyliśmy oznaczeń $\Delta_j t := t_j - t_{j-1}$ (=przyrost argumentu). Niech $\Delta_j x := x(t_j) - x(t_{j-1}), \Delta_j y := y(t_j) - y(t_{j-1})$ - oznaczają odpowiednie przyrosty wartości funkcji x, y . Z twierdzenia Pitagorasa, długość j -tego odcinka łamanej wpisanej w krzywą, wyznaczonej przez nasz podział, wynosi $\sqrt{\Delta_j x^2 + \Delta_j y^2}$. Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej (dla funkcji na przedziale $[t_{j-1}, t_j]$), istnieje punkt pośredni $\alpha_j \in (t_{j-1}, t_j)$ taki, że $x'(\alpha_j) = \frac{\Delta_j x}{\Delta_j t}$, więc $\Delta_j x = x'(\alpha_j)\Delta_j t$. Podobnie, $\Delta_j y = y'(\beta_j)\Delta_j t$ dla pewnych punktów $\beta_j \in (t_{j-1}, t_j)$. Sumy długości odcinków naszej łamanej przyjmują więc postać

$$\sum_{j=1}^n \Delta_j t \cdot \sqrt{x'(\alpha_j)^2 + y'(\beta_j)^2}.$$

Gdyby było $\alpha_j = \beta_j$, mielibyśmy dokładnie sumy całkowite dla całki z naszego wzoru. Aby więc zakończyć dowód, wystarczy, korzystając z jednostajnej ciągłości funkcji ciągłych na przedziałach domkniętych, wykazać, że różnice między sumami $\sum_j \Delta_j t \sqrt{x'(\alpha_j)^2 + y'(\beta_j)^2}$ oraz sumami $\sum_j \Delta_j t \sqrt{x'(\beta_j)^2 + y'(\beta_j)^2}$ zmierzają do zera wraz ze zmierzaniem do zera średnicy podziału τ .

Oto detale tego fragmentu dowodu: Funkcja $x \mapsto \sqrt{x}$ nie spełnia, niestety, warunku Lipschitza, bo w żadnym sąsiedztwie zera jej pochodna nie jest ograniczona. Ale tu mamy do czynienia z funkcją trochę innej postaci: $x \mapsto \sqrt{c+x^2}$, gdzie $c \geq 0$ jest jakąś stałą -może nawet równą 0. Jej pochodna ma moduł $\frac{2|x|}{2\sqrt{c+x^2}} \leq 1$, bo mianownik jest $\geq 2\sqrt{x^2} = 2|x|$. Dzięki temu zachodzi warunek Lipschitza ze stałą 1. Teraz warunek $|\alpha_j - \beta_j|$, jako $\leq \delta$, gdzie δ jest (dowolnie małą) średnicą podziału implikuje, dzięki ciągłości [jednostajnej!] funkcji $x'(t), y'(t)$, że dla δ dostatecznie małych (dobranych do zadanego $\epsilon > 0$) mamy $|x'(\alpha_j) - x'(\beta_j)| < \epsilon$. Wspomniany warunek Lipschitza ze stałą 1 daje wówczas nierówność

$$|\sqrt{x'(\alpha_j)^2 + y'(\beta_j)^2} - \sqrt{x'(\beta_j)^2 + y'(\beta_j)^2}| < \epsilon.$$

Moduł różnicy między $\sum_j \Delta_j t \sqrt{x'(\alpha_j)^2 + y'(\alpha_j)^2}$ oraz $\sum_j \Delta_j t \sqrt{x'(\beta_j)^2 + y'(\beta_j)^2}$ szacujemy więc przez $\epsilon \cdot (b-a)$. Dla normalnych ciągów podziałów różnice te zmierzają więc do zera, a druga z sum -zmierza do całki Riemanna podanej w naszej tezie.

Większa, niż 2 ilość zmiennych też nie stanowi problemu - możemy punkty pośrednie "wyrównywać krok po kroku" -czyli dla każdej pary zmiennych $k, k+1 \in \{1, 2, \dots, d\}$ z osobna, zamieniając w końcu sumy otrzymane dzięki zastąpieniu $\Delta_j \gamma_k$ przez $\Delta_j t \cdot \gamma'_k(t_{k,j})$, gdzie pochodne liczone są w pewnych (zależnych od k, j) punktach pośrednich $t_{k,j} \in (t_{j-1}, t_j)$.

W szczególności, długość linii wykresu dla $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, czyli krzywej $\{(t, f(t)) : t \in [a, b]\}$, to liczba $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt$.

Często krzywe płaskie opisane są we współrzędnych biegunowych, gdzie zmienną niezależną jest kąt $\phi \in [\alpha, \beta]$, funkcja $r(\phi)$ opisuje odległość punktu od początku układu. Czyli $\gamma(\phi) = (r(\phi) \cos \phi, r(\phi) \sin \phi) \in \mathbb{R}^2$. Korzystając ze wzoru (1), gdzie np. $x(\phi) = r(\phi) \cos \phi$ i z jedyńki trygonometrycznej łatwo sprawdzić że w tym przypadku (gdy $r \in C^1[\alpha, \beta]$), mamy

$$\ell(\gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\phi) + (r'(\phi))^2} d\phi. \quad (2).$$

24.2 Objętość bryły obrotowej

Obrót w \mathbb{R}^3 wykresu funkcji $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ dookoła osi OX tworzy zbiór

$$\Omega := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [a, b], y^2 + z^2 \leq (f(x))^2\}. \quad (3)$$

Przekrojami tej bryły płaszczyznami $\{(x, y, z) : x = x_0\}$ równoległymi do OYZ są koła o środku w zerze, promieniu $f^2(x_0)$. Przybliżenia z niedmiarem objętości $|\Omega|$ otrzymamy sumując objętości walców

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [t_{j-1}, t_j], y^2 + z^2 \leq m_j^2\},$$

czyli sumując liczby $\Delta_j t \cdot \pi \cdot m_j^2$, gdzie m_j są, jak w przypadku obliczeń dla trapezów krzywoliniowych, wartościami najmniejszymi f na przedziałach $[t_{j-1}, t_j]$ (kresami dolnymi w przypadku f nieciągłej). Przybliżenia z nadmiarem otrzymamy biorąc walce opisane na j -tych fragmentach zbioru Ω . Ich sumy objętości dają po przejściu do odpowiednich kresów całkę dolną (odp. górną) z funkcji $\pi(f(x))^2$. Stąd wynika, że w przypadku $f \in R[a, b]$ mamy

$$m_3(\Omega) = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx. \quad (4)$$

24.3 Pole powierzchni obrotowej

Powierzchnia obrotowa, to fragment brzegu bryły obrotowej (3), czyli zbiór

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [a, b], y^2 + z^2 = (f(x))^2\}.$$

Przybliżamy go odcinkami powierzchni bocznej stożka, otrzymując wzór

$$m_2(S) = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (5)$$

Zauważmy, że gdy przez $d\ell(x)$ oznaczymy różniczkę długości obracanej krzywej (czyli "to, co znajduje się po znaku całki we wzorze na długość łuku krzywej"), zaś $\delta(x)$ oznacza odległość od osi obrotu punktu $(x, f(x))$ danej krzywej, to wzór¹ na pole powierzchni obrotowej przyjmie postać

$$m_2(S) = 2\pi \int_a^b \delta(t) d\ell(t). \quad (5a)$$

Podobny wzór otrzymamy dla obrotu krzywej o równaniu parametrycznym $x = x(t), y = y(t), t \in [a, b]$. Zakładamy tu, że $x(t) \geq 0, y(t) \geq 0$. Np. gdy taką krzywą obracamy wokół OX , to

$$S = \{(x, y, z) : t \in [a, b], x = x(t), y^2 + z^2 = y(t)^2\}, \quad \delta(t) = y(t). \quad (6)$$

¹Krzywą przybliżamy przez łamane o segmentach L_j odpowiadające podziałowi $[a, b]$ punktami t_j . Gdy obracamy wokół osi odcinek o długości L_j , leżący na tej samej, co oś płaszczyźnie, zakreśli on powierzchnię boczną odcinka stożka, która jest nie mniejsza, niż powierzchnia boczna $(2\pi m_j L_j)$ walca o wysokości L i promieniu $m_j = \min\{\delta(t) : t_{j-1} \leq t \leq t_j\}$, a nie większa od $(2\pi M_j L_j)$, gdzie $m_j = \max\{\delta(t) : t_{j-1} \leq t \leq t_j\}$. Sumy takich pól zmierzają do całki (5a), jak łatwo sprawdzić -jak w dowodzie wzoru(1).

w przypadku obrotu wokół osi OY mamy $\delta(t) = x(t)$, zaś $S = \{(x, y, z) : t \in [a, b], y = y(t), x^2 + z^2 = x(t)^2\}$. W obydwu przypadkach $d\ell(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$. Na przykład, dla obrotu wokół OX , pole powierzchni opisanej w (6) wynosi

$$m_2(S) = 2\pi \int_a^b \delta(t) d\ell(t) = 2\pi \int_a^b y(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \quad (7)$$

Wracając na chwilę do pola obszaru ograniczonego na płaszczyźnie krzywą zadaną parametrycznie: $x = x(t), y = y(t), t \in [t_1, t_2]$, prostymi $x = x(t_1), x = x(t_2)$, oraz osią OX : Jeśli $x(\cdot)$ jest silnie rosnąca, klasy C^1 , $y \geq 0$, to pole tego obszaru jest równe

$$\int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t) dt. \quad (8)$$

Aby ten wzór uzasadnić przypomnijmy najpierw, jak zachowują się granice całkowania we wzorach na całkowanie przez podstawienie i przez części.

Zapis $F(x)|_a^b$ oznacza przyrost: $F(b) - F(a)$. Stosując wzór Newtona-Leibniza do wzorów dla całki nieoznaczonej, otrzymujemy

$$\int_a^b f'(t)g(t) dt = f(t)g(t)|_a^b - \int_a^b f(t)g'(t) dt, \quad (9)$$

$$\int_a^b f(g(t))g'(t) dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(s) ds \quad \boxed{\begin{array}{l} \text{podstawienie } s=g(t) \\ ds = g'(t) dt \end{array}}. \quad (10)$$

Gdy w parametrycznym równaniu krzywej $\gamma(t) = (g(t), h(t))$, czyli np. $x = g(t)$ podstawimy $t = g^{-1}(x)$, to $dx = g'(t) dt$, więc pole trapezu krzywoliniowego, to $\int_{x(t_1)}^{x(t_2)} h(x) dx = \int_{t_1}^{t_2} h(t)g'(t) dt$, ze wzoru (10), co po zamianie $g(t)$ na $x(t)$ oraz $h(t)$ na $y(t)$ daje (8).

24.4 Metoda przekrojów

Jżeli $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ jest jakimś obszarem ograniczonym zawartym w $\{(x, y, z) : a \leq x \leq b\}$, niech $S(x_0)$ oznacza pole przekroju zbioru Ω płaszczyzną $\{(x, y, z) : x = x_0\}$, czyli zbioru $\Omega(x_0) := \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : (x_0, y, z) \in \Omega\}$. Wówczas objętość jest całką z funkcji $S(x)$ po odcinku $[a, b]$. Mamy więc wzór będący częścią ogólniejszego twierdzenia Fubniego:

$$m_3(\Omega) = \int_a^b m_2(\Omega(x)) dx. \quad (11)$$

Środek ciężkości krzywej płaskiej $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ o długości L ma współrzędne x_C, y_C określone jako "średnie całkowite wzdłuż γ " funkcji x, y odpowiednio: $x_C = \frac{1}{L} \int_a^b x(t) d\ell(t)$, gdzie $d\ell(t)$ jest różniczką długości krzywej. Innymi słowy,

$$x_C = \frac{1}{L} \int_a^b x(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt, \quad \text{podobnie } y_C = \frac{1}{L} \int_a^b y(t) d\ell(t).$$

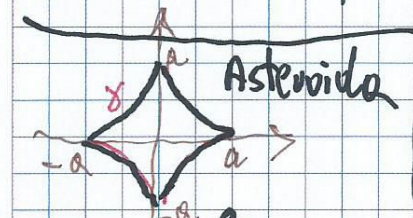
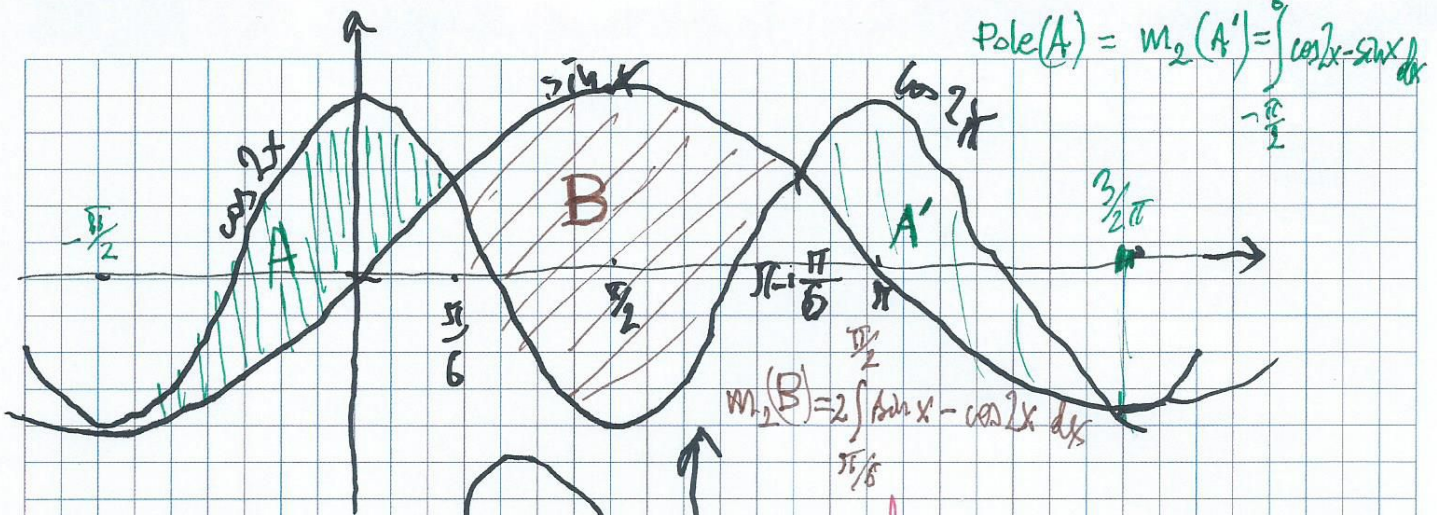
W następnym semestrze przy użyciu całek podwójnych zdefiniujemy też środek ciężkości obszaru płaskiego D . Można go nawet określić metodą przekrojów D_{x_0} zbioru D prostymi $x = x_0$. Środki ciężkości tych przekrojów urworzą krzywą i jej środek ciężkości będzie środkiem dla obszaru D .

Bardzo wygodnym narzędziem do mierzenia powierzchni i brył obrotowych (typu torus) są następujące twierdzenia:

Pierwsza reguła Guldina: Pole powierzchni powstałej przez obrót krzywej (jednorodnej) γ dookoła osi leżącej na tej samej płaszczyźnie, co γ i nieprzecinającej jej jest równe długości $\ell(\gamma)$ pomnożonej przez długość łuku okręgu opisanego przy obrocie przez jej środek ciężkości.

Na przykład, obracając okrąg o małym promieniu r i o środku odległym od osi obrotu o R otrzymamy powierzchnię boczną torusa \mathbb{T} o polu $2\pi r \cdot 2\pi R$.

Druga reguła Guldina: Objętość bryły powstałej przez obrót obszaru D dookoła osi leżącej w płaszczyźnie tej figury i nieprzecinającej jej, jest równa polu powierzchni D pomnożonemu przez długość łuku okręgu opisanego przy danym obrocie przez środek ciężkości obszaru D . Dla powyższego torusa \mathbb{T} objętość wynosi więc $(2\pi R) \cdot (\pi r^2)$.



$x(t) = a \cos^3 t$
 $y(t) = a \sin^3 t$

$\sqrt{(x')^2 + (y')^2} = \dots$

$3 \sin t \cos t = \frac{3}{2} \sin 2t$

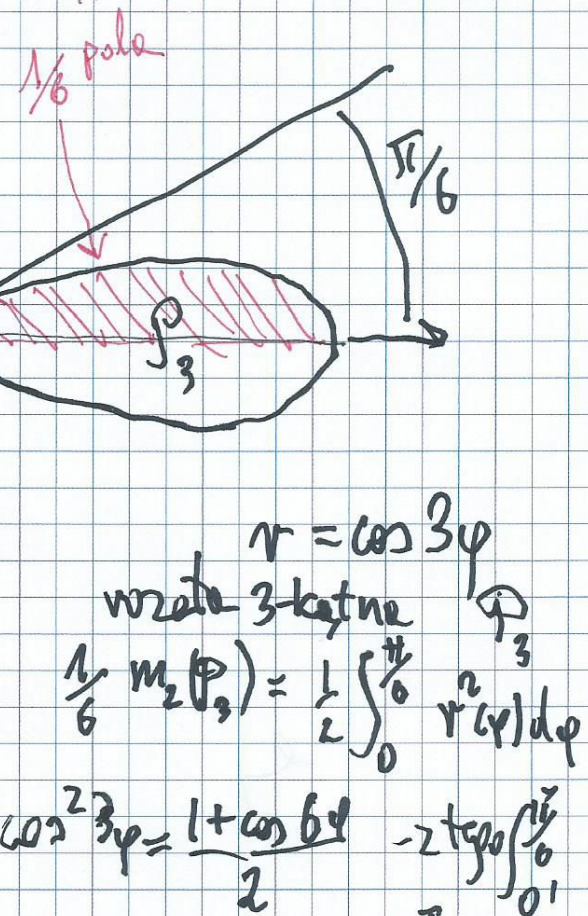
$x' = -3a \cos^2 t \sin t$

$y' = 3a \sin^2 t \cos t$

długość asteroide =

$4 \int_0^{\pi/2} \frac{3}{2} a \sin 2t dt = -3a \cos 2t \Big|_0^{\pi/2} = 6a$

Pole wólki = $\frac{\pi}{4}$



$\int_0^{\pi/3} \left[\frac{\phi}{2} + \frac{\sin 6\phi}{12} \right] d\phi$

cykloida

$x(t) = a(t - \sin t)$
 $y(t) = a(1 - \cos t)$

$(x'(t) = y'(t))$
 $m_2(C)$

$m_2(C) = \int_0^{2\pi} y(t) x'(t) dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = 3\pi a^2$

