12 Całki wielokrotne

Podobnie jak przy różniczkowaniu, w rachunku całkowym będziemy stosowali metodę ustalania zmiennych z wyjątkiem jednej, co prowadzi do tzw. całki iterowanej. Na przykład, dla dwu zmiennych $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ możemy wyliczyć całkę $\int_a^b f(x, y_0)\, dx$, której wartość oznaczmy $h(y_0)$. Jeśli f jest ciągła w prostokącie $[a, b]\times[c, d]$, to jest też ona jednostajnie ciągła. Funkcje jednej zmiennej: $f(\cdot, y) : [a, b] \ni x \to f(x, y) \in \mathbb{R}$ oraz $f(x, \cdot) : y \mapsto f(x, y)$ polegające na ustaleniu jednej ze zmiennych -są ciągłe, więc całkowalne. (W pierwszym przypadku ustalamy y_0, zaś kropka symbolizuje "aktywną zmienną", w drugim -ustalamy zmienną x.) Wykażemy teraz np. ciągłość funkcji h na odcinku $[c, d]$. (Wówczas będzie można wyliczyć jej całkę, zwaną całką iterowaną dla f.) Ponieważ z jednostajnej ciągłośi f wynika w szczególności, że dla kazdego $\epsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że gdy $|y - y_0| < \delta$, to $\forall_{x\in[a,b]}|f(x, y) - f(x, y_0)| < \epsilon$, więc

$$|h(y) - h(y_0| = |\int_a^b (f(x, y) - f(x, y_0))\, dx| \leqslant (b - a)\epsilon.$$

Analogicznie wykazujemy ciągłość funkcji $g(x) := \int_c^d f(x, y)\, dy$. Funkcje g, h możemy więc całkować na ich dziedzinach. Można wykazać, że całki te są równe. Jedną z metod dowodu jest tu wykazanie, że obydwie są równe tak zwanej całce podwójnej z f po prostokącie $P = [a, b] \times [c, d]$, którą teraz zdefiniujemy.

Definicja. Rodzinę prostokątów $P_j \subset P$, gdzie $j \in \{1, 2, \ldots, M\}$ nazwiemy podziałem P, jeśli ich boki są równoległe do boków P, wnętrza -są parami rozłączne, zaś $\bigcup_{j\leqslant M} P_j = P$. Oznaczmy przez $|P_j|$ pole prostokąta z podziału i wybierzmy układ punktów "pośrednich" $Q_j \in P_j$. Mówimy, że funkcja $f : P \to \mathbb{R}$ jest całkowalna po prostokącie P, zaś liczba I oznaczana $I = \iint_P f(x, y)\, dxdy$ jest całką podwójną z f po tym prostokącie P, jeżeli dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że gdy średnice wszystkich prostokątów P_j z danego podziału są mniejsze od δ, to dla sumy całkowej $S := \sum_{j=1}^M f(Q_j)|P_j|$ mamy $|S - I| < \epsilon$.

Zamieniając prostokąty na prostopadłościany P_j i oznaczając przez $|P_j|$ ich objetości -otrzymamy analogiczną definicję całki potrójnej. Ogólniej, możemy całkować funkcje n zmiennych po kostkach typu $P = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, zamieniając pole, czy objętość- na n-wymiarową miarę Jordana równą iloczynowi długości wszystkich krawędzi. Granicą sum całkowych przy maksimum średnic kostek podziału dążącym do zera będzie całka wielokrotna (Riemanna) po danej kostce P. W każdym przypadku można wykazać, że tak, jak w przypadku funkcji jednej zmiennej, funkcje ciągłe na kostkach są jednostajnie ciągłe oraz całkowalne (w sensie Riemanna). Dowody są analogiczne, jak dla jednej zmiennej, ale dość żmudne, więc odnotujmy jedynie podstawowe dla nas dwa fakty w postaci twierdzenia:

Twierdzenie. Całka wielokrotna z funkcji ciągłej na kostce w $\mathbb{R}^n$ istnieje i jest równa całce iterowanej, gdzie całkowanie względem poszczególnych zmiennych można wykonać w dowolnej kolejności. Na przykład, dla całek podwójnych, jeżeli $f : P = [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to istnieje

$$\iint_P f(x, y)\, dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy\right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx\right) dy. \quad (1)$$

Twierdzenie pozostaje prawdziwe dla funkcji ograniczonych f, jeżeli n-wymiarowa miara zbioru punktów nieciągłości f wynosi zero.

Dla całek niewłaściwych ostatnia równość może nie zachodzić, potrzebne są pewne dodatkowe założenia. Na przykład- skończoność niewłaściwej całki iterowanej z modułu ("bezwzględna zbieżność całki iterowanej") będzie tu warunkiem wystarczającym, mówi o tym Twierdzenie Fubiniego którego należy używać w tandemie z twierdzeniem Tonellego, które mówi, że dla całek niewłaściwych z funkcji **nieujemnych** zawsze zachodzą równości (1)) (choć mogą to być wartości równe $+\infty$). Twierdzenie Tonellego potrzebne jest do sprawdzania **kluczowego założenia** w twierdzeniu Fubiniego, jakim jest warunek zbieżności całki podwójnej z $|f(x,y)|$. Obydwa te twierdzenia zachodzą też dla ogólniejszego pojęcia całek Lebesgue'a (nawet względem dowolnej miary produktowej na iloczynie kartezjańskim abstrakcyjnych przestrzeni z miarą -np. stosować to można w rachunku prawdopodobieństwa, gdzie całkę ze zminnej losowej interpretujemy jako jej wartość oczekiwaną).

Przykład liczenia całki po prostokącie: Nasz prostokąt będzie nawet kwadratem, ale niestety, obróconym o 45 stopni: $P = \{(x,y) : |x| + |y| \leqslant 1\}$. Powiedzmy, że chcemy policzyć $I := \iint_P x^2\,dxdy$. Możemy "sztucznie dodać zero" określając funkcję na większym kwadracie $P_1 := [-1,1] \times [-1,1]$ wzorem: $f(x,y) = x^2$ dla $(x,y) \in P$ oraz $f(x,y) = 0$ dla $(x,y) \in P_1 \setminus P$. Porównując definicje całek podwójnych widzimy, ze faktycznie nasza całka I jest równa całce $\iint_{P_1} f(x,y)\,dxdy$. Co prawda, f ma punkty nieciągłości- są to punkty brzegu kwadratu P, ale brzeg ten ma płaską miarę zero, bo jest sumą czterech odcinków. Teraz możemy iterować całkę w kierunkach osi. Ponieważ funkcja f jest parzysta względem zmiennej x i względem drugiej zmiennej, jej wykres ma dwie osie symetrii i można policzyć całkę tylko po kwadracie $[0,1] \times [0,1]$ a wynik pomnożyć przez 4. Wyliczmy więc pierwszą iteratę tej całki, czyli $h(y) = \int_0^1 f(x,y)\,dx$. Ponieważ $f(x,y) = x^2$ dla $0 \leqslant x \leqslant y$ oraz $f = 0$ dla $y \leqslant x \leqslant 1$, mamy $h(y) = \int_0^y x^2\,dx = \frac{y^3}{3}$ Z naszego twierdzenia i z uwag o symetrii wynika, że $I = 4\int_0^1 h(y)\,dy = 4\big[\frac{1}{12}y^4\big]_0^1 = \frac{1}{3}$. Możemy jeszcze sprawdzić, jaką wartość da iterowanie w innej kolejności: Najpierw policzmy $g(x) = \int_0^1 f(x,y)\,dy = \int_0^{1-x} x^2\,dy = x^2(1-x) = x^2 - x^3$. Teraz $\int_0^1 g(x)\,dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$, co pomnożone przez 4 daje ten sam wynik: $I = \frac{1}{3}$.

Już ten przykład pokazał, jak możemy liczyć całkę z funkcji f po dowolnym obszarze ograniczonym $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ zawartym w jakiejś kostce P. Najpierw definiujemy przedłużenie F funkcji f przyjmując jego wartości równe zero na $P \setminus \Omega$ orz $F = f$ na zbiorze Ω Wtedy definiujemy $\int_\Omega f\,dx_1 \dots dx_n := \int_P F\,dx_1 \dots dx_n$. Najważniejsze dla nas będą całki po obszarach normalnych. Zacznijmy od dwu zmiennych.

Definicja Mówimy, że obszar $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ jest normalny względem osi OX, jeżeli istnieje przedział $[a,b] \subset \mathbb{R}$ oraz dwie funkcje ograniczone $y_1 \leqslant y_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ takie, że $\forall_x\, y_1(x) \leqslant y_2(x)$ oraz

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b], y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)\}.$$

W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ możemy rozważać obszar normalny D zadany przez pewien obszar normalny $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ oraz przez parę funkcji z_1, z_2 określonych na tym obszarze Ω. Obszar normalny (względem płaszczyzny OXY), to będzie zbiór D postaci:

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ (x,y) \in \Omega, z_1(x,y) \leqslant z \leqslant z_2(x,y)\}.$$

Całkowanie po takich obszarach odbywa się w taki sposób, jak w poprzednim przykładzie, czyli przez iterowanie całki. Najpierw liczona całka ("całka wewnętrzna") powinna być całką względem ostatniej ze zmiennych (tej opisanej nierównościami. W przypadku obszaru Ω opisanego powyżej przez nierówności $y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)$, najpierw liczymy funkcję $g(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$, następnie wyliczamy $\int_a^b g(x)\,dx$ i to jest szukana wartość całki podwójnej $\iint_\Omega f(x,y)\,dxdy$. Faktycznie, gdy $c \leqslant \inf\{y_(x) : x \in [a,b]\}$, $d = \sup\{y_2(x) : x \in [a,b]\}$, to $\Omega \subset P := [a,b] \times [c,d]$ i funkcję F przedłużającą f definijemy nadając jej wartości zero na $P \setminus \Omega$. Stąd $G(x) := \int_c^d F(x,y)\,dy = \int_c^{y_1(x)} 0\,dy + \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y) + \int_{y_2(x)}^d 0dy$. Teraz

$$\int_a^b G(x)\,dx = \iint_P F(x,y)\,dxdy = \iint_\Omega f(x,y)\,dxdy.$$

Aby uniknąć pisania dużych nawiasów okalających całkę wewnętrzną, co określa kolejność całkowań, używana jest inna metoda: np.

$$\texttt{zamiast} \quad \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx \quad \texttt{-piszemy} \quad \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy.$$

Jeśli dla funkcji trzech zmiennych obszar D jest normalny względem OXY i rzutem na tę płaszczyznę jest Ω -obszar normalny względem OX opisany jak wyżej, to

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz.$$

Na przykład, obliczmy całkę podwójna

$$J = \iint_\Omega \frac{x^2}{y^2}\,dxdy,$$

gdzie Ω jest obszarem zawartym pomiędzy prostymi: $x = 2, y = x$ oraz hiperbolą $yx = 1$. Jest to obszar normalny względem OX. Aby ustalić jego rzut $[a, b]$ na oś OX najlepiej sporządzić rysunek, z którego wyniknie, że jedyny obszar ograniczony, którego fragmentami brzegu są te 3 linie jest obszar nad odcinkiem [a,2], gdzie a jest pierwszą współrzędną punktu przecięcia prostej $y = x$ oraz naszej hiperboli, leżący w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych. Wyliczamy z równania $x = \frac{1}{x}$, że $x^2 = 1$, a ponieważ $x > 0$, mamy x=1=y. Na odcinku $[1, 2]$ prosta $y = c$ leży nad hiperbolą, więc $J = \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2}\,dy$ a ponieważ funkcją pierwotną względem zmiennej y dla funkcji podcałkowej jest $-\frac{x^2}{y}$, jej przyrost od punktu $\frac{1}{x}$ do x wynosi $x^3 - x$, tę wartość całkujemy po dx od dolnej granicy całkowania 1 do górnej =2, otrzymując jako wynik

$$J = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_1^2 = 2 + \frac{1}{4}.$$

Często łatwiej jest opisywać dany obszar w jakimś krzywoliniowym układzie współrzędnych. Przykładem są współrzędne biegunowe (r, φ) punktu A na płaszczyxnie $\mathbb{R}^2$. Tu r jest odległością punktu $A = (x, y)$ od początku układu, czyli normą euklidesową wektora (x, y), więc $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ Natomiast φ, to współrzędna kątowa podawana w radianach i opisuje kąt między osią OX a półprostą wyznaczoną przez ten wektor (przy czym $\phi \in [0, 2\pi)$. Tak więc, $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$. W tych współrzędnych takie figury płaskie, jak koło o środku $(0, 0)$, wycinek tego koła, pierścień (koncentryczny) i jego wycinek - wszystkie opisują się w tych współrzędnych przez prostokąty. Np. wycinek koła o promieniu R leżący między kątami α, β, to zbiór punktów o współrzednych biegunowych (r, φ) takich, że $0 \leqslant r \leqslant R$ oraz $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$. Równanie okręgu będącego brzegiem tego koła, to po prostu: $r = R, 0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Czasami równania we współrzędnych biegunowych nie są tak oczywiste. Na przykład dla okręgu o równaniu $x^2 + y^2 = 2x$, czyli $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ promień =1, środek ma współrzędne (1,0), a równanie biegunowe otrzymamy wstawiając $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$ otrzymując $r^2 = 2r\cos\varphi$, czyli $r = 2\cos\varphi$. Ale tym razem punkty z tego okręgu są widziane tylko pod kątem $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3}{2}\pi, 2\pi]$, POZOSTAŁE KĄTY DAŁY BY $r < 0$, co jest niemożliwe. Dla tego okręgu wygodniejsze jest równanie w przesuniętych współrzędnych biegunowych. Na przykład, okrąg o środku o współrzędnych kartejańskich $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ o promieniu R opiszemy równaniem $r = R$ w układzie przesuniętych współrzednych biegunowych:

$$x = a + r\cos\phi, y = b + r\sin\phi. \tag{2}$$

Ogólnie, krzywoliniowym układem współrzędnych w $\mathbb{R}^n$ (lub w pewnym otwartym podzbiorze D_1 tej przestrzeni) nazwiemy odwzorowanie bijektywne

$$X : D \ni w = (w_1, \ldots, w_n) \to X(w) = (x_1(w), \ldots, x_n(w)) \in D_1$$

klasy C^1 określone na zbiorze otwartym $D \subset \mathbb{R}^n$ o tej własności, że w każdym punkcie $w \in D$ jakobian, czyli wyznacznik macierzy Jacobiego tego odwzorowania X oznaczany $J_w(X)$ lub $\frac{\partial(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial(w_1,w_2,\ldots w_n)}$, czyli wyznacznik różniczki, $\det(d_w X)$ jest niezerowy. Ale jak wyliczyć całkę w takim układzie współrzędnych? -odpowiada na to pytanie następujące

Twierdzenie o zmianie zmiennych. Jeżli funkcja $f : D_1 \to \mathbb{R}$ jest całkowalna na obszarze D_1, zaś $X : D \to D_1$ jest krzywoliniowym układem współrzędnych o niezerowym jakobianie $J_w(X)$, to funkcja złożona $f \circ X$ jest całkowalna na obszarze D oraz

$$\int_{D_1} f\, dx_1 \ldots dx_n = \int_D (f \circ X)(w)|J_w(X)|\, dw_1 \ldots dw_n. \tag{3}$$

Funkcję z podstawieniem $X(w)$ mnożymy więc pod całką przez wartość bezwzględną jakobianu tego odwzorowania X.

Sprawdźmy, jak to działa w przesuniętym układzie wsp. biegunowych (2). Mamy tu współrzędne $x(r,\phi) = a + r\cos\phi, y(r\phi) = b + r\sin\phi$. Więc $x'_r = \cos\phi$, $x'_\phi = -r\sin\phi$, $y'_r = \sin\phi, y'_\phi = r\cos\phi$. Wyznacznik macierzy Jacobiego, to jak łatwo sprawdzić $r\cos^2\phi + r\sin^2\phi = r$. Stąd dla obszaru D jeśli $D_1 := \{(r\cos\phi, r\sin\phi) \in \mathbb{R}^2 : (r,\phi) \in D\}$, to

$$\iint_{D_1} f(x,y) = \iint_D f(a + r\cos\phi, b + r\sin\phi)\, r dr d\phi.$$

Pamiętajmy o "rdr"! Na przykład gdy $D = [0,R] \times [0, 2\pi]$, to D_1 jest kołem o promieniu R. Jeśli całkujemy po obszarze D_1 funkcję stałą 1, to wynikiem będzie pole (miara Jordana obszaru D_1), czyli, jak wiemy, πR^2. Liczymy przy użyciu naszego wzoru: (dla funkcji stałej 1 podstawienie $f \circ X$ też jest stałą 1, tylko na innej dziedzinie). Więc

$$\iint_{D_1} 1\, dxdy = \iint_D 1 r dr d\phi = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^r r\, dr = 2\pi\frac{R^2}{2} = \pi R^2.$$

Bardziej nietrywialnym zastosowaniem jest wyliczenie całki niewłaściwej $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx$. Jak wiemy, $I = \lim_{M\to\infty} I_M$, gdzie $I_M = \int_{-M}^{M} e^{-x^2}\, dx$, ale niestety funkcja podcałkowa nie ma pierwotnej wyrażalnej przez funkcje elementarne. Zamiast I_M zajmijmy się wartościami

$$I_M^2 = \iint_{[-M,M]\times[-M,M]} e^{-x^2} e^{-y^2}\, dxdy.$$

Pod całką jest funkcja równa $e^{-(x^2+y^2)}$, czyli we współrzędnych biegunowych e^{-r^2}. Gdyby całkować nie po kwadratach $Q_M := [-M,M] \times [-M,M]$, tylko po kołach $K_M := \{(x,y) : x^2 + y^2 \leqslant M^2\}$ to r przed dr daje bardzo dużo:

$$\iint_{K_M} e^{-(x^2+y^2)}\, dxdy = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^M e^{-r^2} r\, dr.$$

W ostatniej całce $2r\, dr$, to różniczka ds podstawienia $r^2 = s$. Stąd $\int_0^M e^{-r^2}\, rdr = \frac{1}{2}\int_0^{M^2} e^{-s}\, ds = \frac{1}{2}[-e^{-s}]_0^{M^2} = \frac{1}{2}(1 - e^{-M^2})$, zaś cała całka z funkcji $e^{-(x^2+y^2)}$ po kole K_M, to $\pi(1 - e^{-M^2})$. Liczymy granice przy $M \to \infty$. Całki po zbiorach K_M zmierzają do π. Co więcej, na każdym kwadracie Q_M można opisać koło i wpisań weń koło. Promienie tych kół zmierzają do nieskończoności gdy $M \to \infty$, stąd -z twierdzenia o trzech granicach, również $\lim_{M\to\infty} I_M^2 = \pi$. Wynika stąd, że $I = \sqrt{\pi}$.