14 Całki powierzchniowe

Przez powierzchnię, lub płat powierzchni będziemy rozumieli w tym wykładzie podzbiór M przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^3$ opisany na jeden z trzech sposobów:

- jako wykres $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, z = f(x, y)\}$ funkcji klasy C^1 dwu zmiennych $f : D \to \mathbb{R}$, gdzie D jest pewnym obszarem normalnym w $\mathbb{R}^2$
- w postaci uwikłanej -jako zbiór typu $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : G(x, y, z) = 0\}$ gdzie G jest funkcją klasy C^1 na pewnym otwartym obszarze w $\mathbb{R}^3$.
- lub jako powierzchnię określoną parametrycznie równaniami $x = x(s, t), y = y(s, t), z = z(s, t)$, gdzie $(s, t) \in D$ dla pewnego obszaru normalnego $D \subset \mathbb{R}^2$. W tym przypadku często przez $\vec{r}(s, t)$ -tak zwany promień wodzący- oznaczamy punkt o współrzędnych $(x(s, t), y(s, t), z(s, t)) \in \mathbb{R}^3$.

W pewnym sensie powierzchnie są dwuwymiarowe- gdyż lokalnie można je opisywać przy użyciu dwu niezależnych współrzędnych. Mieliśmy już do czynienia z powierzchniami obrotowymi i nawet wyliczaliśmy ich pole powierzchni. Brzegiem powierzchni będą pewne krzywe. Decydującą rolę przy mierzeniu pola powierzchni krzywoliniowych odegra wektor normalny $\vec{n} = \vec{n}(P_0)$ w punkcie $P_0 \in M$ oraz jednostkowy wektor normalny $\frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n})$. Są to wektory w kierunku prostopadłym do powierzchni M, czyli prostopadłe do płaszczyzny stycznej. Na przykład, dla postaci uwikłanej równanie płaszczyzny stycznej w punkcie P_0 opisuje tę prostopadłość poprzez zerowanie się iloczynu skalarnego wektora $\vec{P_0P} = P - P_0$ o początku P_0 i końcu P leżącym na tej płaszczyźnie przez wektor $\nabla_{P_0}G$: gdy współrzędne punktu P zapiszemy jako (x, y, z), $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, to równanie płaszczyzny stycznej do M w P_0 ,to

$$(x - x_0)G'_x(P_0) + (y - y_0)G'_y(P_0) + (z - z_0)G'_(P_0) = 0, \tag{1}$$

gdzie jak zazwyczaj, np $G'_z = \frac{\partial G}{\partial z}$. Od razu widać, że wektorem normalnym jest tu gradient funkcji G w punkcie P_0. Natomiast unotmowany wektor normalny, to ten wektor $\vec{n}(P_0)$ podzielony przez jego normę, czyli przez $\|\vec{n}(P_0)\| = \sqrt{(G'_x(P_0))^2 + (G'_y(P_0))^2 + (G'_z(P_0))^2}$. Zakładamy, że w każdym punkcie $P \in M$ istnieje taki **niezerowy** wektor normalny $\vec{n}(P)$, który zależy w sposób ciągły od P, czyli gdy odwzorowanie $M \ni P \to \vec{n}(P) \in \mathbb{R}^3$ jest ciągłe. Takie założenie będzie konieczne przy liczeniu całki zorientowanej, zwanej też strumieniem wektora przez powierzchnię. Wektor normalny wskazuje na stronę powierzchni -możemy na przykład mówić o zewnętrznej stronie sfery, czy innej powierzchni zamkniętej. W przypadku powierzchni będącej wykresem funkcji f wybieramy zazwyczaj górną stronę powierzchni. Wektor normalny wskazujący dolną stronę powierzchni uzyskamy zapisując równanie powierzchni w postaci $f(x, y) - z = 0$, gdzie $G(x, y, z) = f(x, y) - z$. Wektor normalny, to w tym przypadku $(f'_x, f'_y, -1)$. Jeżeli w odpowiedni sposób[1] zdefiniować pole powierzchni, to różniczką powierzchni na płacie będącym wykresem f będzie

$$dS(x, y) = \|\vec{n}(x, y)\|\, dxdy = \sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1}\, dxdy.$$

[1] Ze względu na brak czasu wspomne jedynie, że dzielimy M na małe kawałki i otoczenie punktu będące takim kawałkiem rzutujemy na płaszczyznę styczną do M w danym punkcie. Przybliżamy pole otoczenia punktu na płacie przez miarę płaską Jordana takiego rzutu. Potem miary takich kawałków o rozłącznych wnętrzach sumujemy otrzymując przybliżoną wartość pola powierzchni M. Gdy średnice fragmentów podziału zmierzają do zera, w granicy otrzymamy dokładną wartość pola. Metoda wpisywania trójkątów w powierzchnię płata nie da nawet po przejściu granicznym właściwej wartości, o czym świadczy przykład z powierzchnią boczną walca podany w książce Fichtencholza "Rachunek różniczkowy i całkowy tom 3."

Twierdzenie Gdy płat jest obrazem obszaru normalnego $D \subset \mathbb{R}^2$ przez odwzorowanie $D \ni (x, y) \to (x, y, f(x, y)) \in M$ -czyli wykresem $f : D \to \mathbb{R}$, to pole płata M wynosi $S(M) = \iint_D dS(x, y) = \iint_D \sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1}\, dxdy$.

Dla powierzchni o równaniu parametrycznym $M = \{\vec{r}(s, t) : (s, t) \in D\}$ wektorem normalnym w punkcie $P_0 = \vec{r}(s_0, t_0)$ będzie iloczyn wektorowy $\vec{r'_s} \times \vec{r'_t}$, który wyliczamy jako (rozwinięty względem pierwszego wiersza) formalny wyznacznik macierzy:

$$\vec{n}(P_0) = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'_s & y'_s & z'_s \\ x'_t & y'_t & z'_t \end{bmatrix}, \tag{2}$$

gdzie pochodne liczone są w punkcie (s_0, t_0). Jest to więc wektor o współrzędnych (A, B, C) będących odpowiednio jakobianami (liczonymi w tym punkcie (s_0, t_0):

$$A = \frac{\partial(y, z)}{\partial(s, t)} \left(\texttt{czyli} \ = \det \begin{pmatrix} y'_s & z'_s \\ y'_t & z'_t \end{pmatrix} \right), \quad B = \frac{\partial(z, x)}{\partial(s, t)}, \quad C = \frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)}.$$

Te współrzędne A, B, C są funkcjami -zmienną jest tu parametr dwuwymiarowy (s, t) opisujący położenie punktu $\vec{r}(s, t) \in M$. Stosując ponownie zasadę, w myśl kórej różniczką dS powierzchni jest norma wektora $\vec{n}$, mamy

$$dS(s, t) = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, dsdt.$$

Analogicznie do powyższego twierdzenia mamy

wzór na pole M: jest to $S(M) = \iint_D dS(s, t) = \iint_D \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, dsdt.$

Możemy obecnie zdefiniować całki powierzchniowe 1. typu (niezorientowane) z funkcji $h : M \to \mathbb{R}$, jako granicę sum postaci

$$\sum_{n=1}^{K} S(M_n) h(P_n),$$

gdzie M_n są fragmentami, na jakie podzielimy powierzchnię M, $S(M_n)$, to pole n-tego fragmentu, $P_n \in M_n$ jest wybranym "punktem pośrednim". Jeśli przy zmierzaniu do zera średnic zbiorów M_n istnieje granica takich sum całkowych, to nazywamy ją całką powierzchniową z funkcji h po obszarze M, oznaczaną $\iint_D h\, dS$. Można wykazać następujące

Twierdzenie. Gdy h jest ciągła, powierzchnia M jest zbiorem domkniętym i ograniczonym, to h jest całkowalna, czyli istnieje wspomniana granica i jest ona równa całce

$$\iint_D h(\vec{r}(s, t))\, dS(s, t).$$

Przykładem jest liczenie masy powierzchni wykonanej z różnorodnego materiału, którego centymetr kwadratowy w punkcie $P \in M$ ma wartość $h(P)$ gramów na cm^2. Przy podziale na małe fragmenty, jeśli h jest ciągła, uzyskujemy w przybliżeniu stałą wartość równą $h(P_n)$ w punktach $P \in M_n$. Sumując tak policzone masy fragmentów -obliczymy przybliżoną masę M. Natomiast gdy funkcja h jest stała równa 1, to bezpośrednio suma całkowa będzie równa polu powierzchni M.

Przypuśćmy teraz, że statek rybacki pływający po morzu zarzucił sieć (w kształcie powierzchni M) i chce złowić ile się da z ławicy ryb. Te ryby, które płyną prostopadle do sieci -zostaną złowione, te -które poruszają się w kierunku stycznym -mogą się z tej pułapki wyślizgnąć, zwłaszcza, gdy sieć nie stanowi powierzchni zamkniętej, tak jest zresztą najczęściej. Efekt zerowy -gdy cosinus kąta =0 , maksymalny -gdy cosinus jest równy 1- chodzi o sam kąt, nie o długość wektora normalnego. Analogicznie można wyliczać energię uzyskaną przez żagiel od wiatru. Znów będzie to zależało od iloczynu skalarnego jednostkowego wektora normalnego i wektora prędkości wiatru. Dzieląc powierzchnię na małe fragmenty zyskujemy na nich przybliżoną stałość wektora "przepływającego przez powierzchnię", przybliżoną stałość wektora jednostkowego normalnego. Stąd taka postać sum całkowych dla strumienia pola wektorowego $\vec{F}$ przez powierzchnię M. Do tego potrzebny jest jednostkowy wektor normalny -który oznaczymy $\vec{\eta}$.

Mówimy, że powierzchnia M jest orientowalna, gdy istnieje odwzorowanie ciągłe przypisujące każdemu punktowi $w \in M$ wektor normalny o długości 1, zwany jednostkowym wektorem normalnym $\vec{\eta}(w)$. Wówczas dla odwzorowania ciągłego $M \ni w \to \vec{F}(w) \in \mathbb{R}^3$, zwanego polem wektorowym definiujemy "strumień wektora $\vec{F}$ przez stronę powierzchni M wyróżnioną przez zwrot wektora $\vec{\eta}$" jako granicę sum $\sum_{n=1}^{K} S(M_n)\vec{F}(w_n) \cdot \vec{\eta}(w_n)$, w których $S(M_n)$ -to pola powierzchni fragmentów M_n, na kóre dzielimy M, w_n- to punkty dowolnie wybrane z M_n, kropka oznacza iloczyn skalarny. Otrzymaną granicę (zwaną też całką powierzchniową 2. rodzaju) oznaczamy symbolem

$$\iint_M \vec{F} \cdot \eta \, dS.$$

Gdy (P, Q, R) są współrzędnymi pola wektorowego $\vec{F}$, innym -dość często używanym symbolem dla tej całki jest

$$\iint_m P \, dydz + Q \, dzdx + R \, dxdy.$$

Przestawienie kolejności z alfabetycznej: $dxdz$ na $dzdx$ jest celowe- odzwierciedla znak -1 w środkowym składniku rozwinięcia Laplace'a. Zamiana kolejności kolumn w jakobianie daje właśnie taki znak -1.

Twierdzenie. Przy wprowadzonych powyżej oznaczeniach i założeniu o orientowalności M określonej parametrycznie, strumień wektora $\vec{F} = (P, Q, R)$ przez powierzchnię zorientowaną M jest równy całce

$$\iint_D \vec{F}(\vec{r}(s,t)) \cdot \vec{\eta}(\vec{r}(s,t)) dS(s,t) = \iint_S \det \begin{bmatrix} P(r(s,t)) & Q(r(s,t)) & R(r(s,t)) \\ x'_s(s,t) & y'_s(s,t) & z'_s(s,t) \\ x'_t(s,t) & y'_t(s,t) & z'_t(s,t) \end{bmatrix} dsdt$$

Ponieważ dS powstaje przez pomnożenie $dsdt$ przez $\|\vec{n}(r(s,t))\|$, zaś $\eta(r(s,t))$ powstaje przez podzielenie wektora $\vec{n}$ przez jego normę, całka $\iint_D \vec{F}(\vec{r}(s,t)) \cdot \eta(\vec{r}(s,t)) dS(s,t)$ ma prostszy zapis -jest równa

$$\iint_D \vec{F}(\vec{r}(s,t)) \cdot \vec{n}(\vec{r}(s,t)) \, dsdt.$$

Jeszcze bardziej uprości się całka po górnej stronie wykresu $f(s,t)$ z pola o składowych $(0, 0, R)$:

$$\iint_M R \, dxdy = \iint_D R(\vec{r}(s,t)) \, dsdt.$$

Faktycznie, iloczyn skalarny wektora (0,0,R) przez wektor normalny, którego ostatnią składową jest 1 -wynosi R. Całka po M z takiego pola jest więc równa zwykłej całce podwójnej po rzucie M na płaszczyznę OXY. Całkę $\iint_M P \, dydz$ możemy policzyć jako całkę op rzucie M na płaszczyznę oYZ itp.

Są dwa twierdzenia łączące strumień pola z całkami innego typu. Dla pola wektorowego $\vec{F} = (P, Q, R)$ klasy C^1 na obszarze domkniętym $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ zdefiniujmy źródłowość, lub dywergencję tego pola wzorem

$$\mathtt{div}(\vec{F}) = \mathtt{div}(P, Q, R) := P'_x + Q'_y + R'_z.$$

Jest to więc ślad macierzy Jacobiego -czyli pierwszej różniczki odwzorowania $\vec{F}$. Jest to już funkcja (ciągła) o wartościach skalarnych. Niech teraz $M = \partial\Omega$

oznacza brzeg obszaru Ω i zakładamy, że jest to regularna powierzchnia, zaś sam obszar jest normalny względem każdej z osi. Części brzegu są więc wykresami funkcji ciągłych i zakładamy istnienie ciągłego jednostkowego wektora normalnego $\vec{\eta}$ na tym brzegu, zwróconego na zewnątrz (ang. "*outward unit normal vector*") Zachodzi wtedy bardzo ważny wzór wiążący strumień pola wektorowego przez brzeg obszaru z całką potrójną po wnętrzu tego obszaru

Twierdzenie Ostrogradskiego -Gaussa

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \eta \, dS = \iiint_{\Omega} \mathtt{div}(\vec{F}) \, dxdydz.$$

Pola wektorowe o zerowej dywergencji nazywamy też polami bezźródłowymi. Dla takiego pola "ile wektora wpływa do obszaru -tyle go też z niego wypływa.

Inną ważną wielkością związaną z polem wektorowym jest jego rotacja, o której już wspomnieliśmy przy okazji wzoru Greena. Przypomnijmy, że definiujemy dla pola wektorowego klasy C^1 jego rotację (będącą też polem wektorowym) jako formalny wyznacznik

$$\mathtt{rot}(P,Q,R) = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{bmatrix} = \vec{i}(R'_y - Q'_z) + \vec{j}(P'_z - R'_x) + \vec{k}(Q'_x - P'_y).$$

Przypuśćmy, że mamy płat powierzchniowy M, którego brzeg ∂M jest gładką krzywą Jordana. Ponadto postulujemy zgodność orientacji powierzchni M i tej krzywej: gdy stoimy na krzywej mając skierowany ku górze wektor normalny dla M, to patrząc w kierunku przebiegu krzywej powinniśmy mieć obszar po lewej stronie. W przypadku powierzchni płaskiej $M \subset \mathbb{R}^2$ będzie to obszar z brzegiem dodatnio zorientowanym (przebieganym w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara) Na powierzchni M wraz z jej brzegiem mamy określone pole wektorowe klasy C^1 zachodzi wówczas drugi z bardzo ważnych wzorów

Twierdzenie Stokesa. Przy powyższych założeniach całka krzywoliniowa z pola po brzegu M jest równa strumieniowi rotacji pola przez powierzchnię M:

$$\int_{\partial M} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_M \mathtt{rot}(P,Q,R) \cdot \vec{\eta}\, dS.$$

W innym zapisie,

$$\int_{\partial M} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_M (R'_y - Q'_z)\,dydz + (P'_z - R'_x)\,dzdx + (Q'_x - P'_y)\,dxdy.$$

Zwróćmy uwagę na to, że kolejności: liczenia pochodnych cząstkowych i występowania różniczek są tu jednakowe.