15 Przekształcenie całkowe Fouriera

15.1 Całki zależne od parametru

Załóżmy, że mamy funkcję dwu zmiennych, powiedzmy $f(x,t)$ określoną w iloczynie kartezjańskim $D \times [a,b]$ gdzie $D = [\alpha, \beta]$, $-\infty < a < b < +\infty$. Załóżmy też, że przy dowolnie ustalonym $x \in D$ funkcja $[a,b] \ni t \mapsto f(x,t) \in \mathbb{R}$, którą można zapisać w postaci $f(x,\cdot)$ jest całkowalna. Możemy wtedy badać funkcję

$$\phi : D \ni x \mapsto \phi(x) := \int_a^b f(x,t)\,dt \in \mathbb{R}.$$

-czyli całkę z parametrem x. Możemy badać ciągłość, różniczkowalność i obliczać całkę względem tego parametru x. W dalszym ciągu istotna dla zastosowań będzie też sytuacja całek niewłaściwych, gdy zamiast przedziału domkniętego ograniczonego$[a,b]$ występuje zbiór $\mathbb{R}$ (lub w przypadku przekształceń Laplace'a- zbiór $\mathbb{R}_+$). Korzystając z jednostajnej ciągłości f ciągłych na domkniętych i ograniczonych podzbiorach $\mathbb{R}^2$ łatwo otrzymamy następujące:

Twierdzenie 1. (O ciągłej zależności całki od parametru.) Feżeli f jest ciągła w zbiorze $D \times [a,b]$, to jej całka $\phi(x)$ jest ciągła względem zmiennej x.

Z kolei, zastosowanie twierdzeń o wartości średniej dla całek po odcinkach podziału i definicji całki podwójnej po prostokącie implikuje

Twierdzenie 2.(O iterowaniu całki.) Feżeli f jest ciągła[1] w zbiorze $D \times [a,b]$, to funkcja $\phi(x)$ jest całkowalna i zachodzi równość

$$\int_\alpha^\beta \Big(\int_a^b f(x,t)\,dt\Big)\,dx = \int_a^b \Big(\int_\alpha^\beta f(x,t)\,dx\Big)\,dt. \tag{15.1}$$

Jak już wiemy, obydwie strony wrówności (15.1) są równe całce podwójnej po tym prostokącie.

Następne twierdzenie wynika z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej stosowanego do ilorazu różnicowego $\frac{1}{h}(\phi(x+h) - \phi(x))$, równego dzięki liniowości całki wyrażeniu

$$\int_a^b \frac{1}{h}(f(x+h,t) - f(x,t))\,dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x + \lambda_{x,t}h, t)\,dt.$$

Tu $\lambda_{x,t} \in (0,1)$ określa punkt pośredni między x oraz $x+h$. Gdy $\frac{\partial f}{\partial x}$ jest ciągła, to przy $h \to 0$ wartość tej pochodnej cząstkowej w punktach pośrednich $(x + \lambda_{x,t}h, t)$ zmierza do jej wartości w (x,h), dzięki twierdzeniu 1. Niewiele wiemy o postaci punktu $x + \lambda_{x,t}h$, ale całkowalność wynika dla prawej strony (15.1) stąd, że ta funkcja podcałkowa jest równa $\frac{1}{h}(f(x+h,t) - f(x,t))$. Rozumując w ten sposób dochodzimy do następującego wniosku:

Twierdzenie 3.(O różniczkowaniu całki względem parametru.) Gdy funnkcje f oraz $\frac{\partial f}{\partial x}$ są ciągłe w $[\alpha,\beta] \times [a,b]$, to

$$\frac{d}{dx}\Big(\int_a^b f(x,t)\,dt\Big) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\,dt.$$

Odpowiedniki twierdzeń 1,2,3 dla całek niewłaściwych (ograniczmy się do $\int_a^\infty$) wymagają silniejszych założeń, niż tylko zbieżność całki niewłaściwej.

Definicja Całka $\int_a^\infty f(x,t)\,dt$ jest zbieżna jednostajnie względem parametru $x \in D$ do wartości $\Phi(x)$, jeżeli dla $\Phi_M(x) := \int_a^M f(x,t)\,dt$ granica $\Phi(x) = \lim_{M\to\infty} \Phi_M(x)$ jest jednostajna.

[1] Wystarczy zamiast ciągłości założyć całkowalność f oraz $|f|$ po tym prostokącie, wówczas całkowalność $f(x,\cdot)$ mamy dla prawie wszystkich x (czyli poza zbiorem miary zero).

Warunek Cauchy'ego zbieżności całki niewłaściwej oraz kryterium porównawcze mają swój oczywisty odpowiednik dla zbieżności jednostajnej całek:

Twierdzenie 4. Całka niewłaściwa $\int_a^\infty f(x,t)\,dt$ jest zbieżna jednostajnie względem $x \in D$ wtedy i tylko wtedy gdy

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_{M>a}\forall_{\alpha,\beta>M}\forall_{x\in D}\,\Big|\int_\alpha^\beta f(x,t)\,dt\Big| < \epsilon.$$

Warunkiem wystarczającym dla takiej zbieżności jest istnienie "majoranty całkowalnej", czyli takiej funkcji $g : [a, +\infty] \to \mathbb{R}_+$, że

$$\forall_{x\in D, t\geqslant a}\,|f(x,t)| \leqslant g(t) \text{ oraz } \int_a^\infty g(t)\,dt < \infty. \tag{15.2}$$

Wnioskiem z odpowiednich twierdzeń (o ciągłości granicy jednostajnej ciągu funkcji ciągłych, o całce z takiej granicy, czy o zbieżności jednostajnej wraz z pochodnymi) jest następujący rezultat (teza (ii), to Twierdzenie Fubiniego).

Twierdzenie 5.

(i) Jeżeli funkcja ciągła $f(x,t)$ spełnia warunek (15.2) dla pewnej majoranty całkowalnej $g(t)$, to jej całka niewłaściwa $\Phi(x)$ zależy w sposób ciągły od x.

(ii) Załóżmy, że $f : [a, +\infty] \times [b, +\infty] \to \mathbb{C}$ jest ciągła[2] oraz

$$\int_a^\infty \Big(\int_b^\infty |f(s,t)|\,ds\Big)\,dt < +\infty. \tag{15.3}$$

Wówczas całki iterowane niewłaściwe z f są równe:

$$\int_a^\infty \Big(\int_b^\infty f(s,t)\,ds\Big)\,dt = \int_b^\infty \Big(\int_a^\infty f(s,t)\,dt\Big)\,ds.$$

(iii) Jeżeli D jest otoczeniem punktu x, zaś funkcja $f : D \times [a,\infty]$ ma całki $\Phi(x) := \int_a^\infty f(x,t)\,dt$ zbieżne oraz całki $\Psi(x) := \int_a^\infty \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\,dt$ są jednostajnie zbieżne, to $\Phi'(x) = \Psi(x)$, czyli "można zamieniać kolejność operacji: całkowania i rózniczkowania".

Teza (ii) (formułowana w ogólniejszej postaci dla całek Lebesgue'a z funkcji mierzalnych spełniających (15.3)) znana jest jako "**Twierdzenie Fubiniego**".

Będziemy w dalszym ciągu mieli do czynienia z funkcjami o wartościach zespolonych, gdzie całkę możemy interpretować jako sumę całek: całki z części rzeczywistej $\mathrm{Re}(f)$ plus całka z cześci urojonej $\mathrm{Im}(f)$ pomnożona przez i -jednostkę urojoną ($i^2 = -1$). Ponadto $\int_{\mathbb{R}} f(x,t)\,dt := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t)\,dt$ definiujemy jako sumę:
$\int_{-\infty}^0 f(x,t)\,dt + \int_0^{+\infty} f(x,t)\,dt$, wszystkie dotychczas sformułowane własności przenoszą się be zmian na ten przypadek.

15.2 Transformata Fouriera

Jeśli $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ jest funkcją, której części: rzeczywista i urojona spełniają na wszystkich przedziałach skończonych warunki Dirichleta i taką, że $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx < +\infty$, to definiujemy jej transformatę Fouriera $\mathcal{F}f = \hat{f}$ wzorem

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\cdot t} f(t)dt. \tag{15.4}$$

W wielu podręcznikach podaje się nieco inną definicję -bez stałej $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, wówczas (inna, niż 1) stała (równa $\frac{1}{2\pi}$) pojawia się we wzorze na transformatę

[2] Założenie ciągłości można bardzo osłabić- do tzw. mierzalności z założeniem (15.3)

odwrotną. W naszym przypadku jeżeli zarówno $|f|$, jak i $|\hat{f}|$ mają całki po całym zbiorze $\mathbb{R}$ skończone, to można wykazać następujący

$$\texttt{wzór Fouriera:} \quad f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} f(\omega) d\omega =: (\mathcal{F}^{-1}(\hat{f})(t). \tag{15.5}$$

Gdyby zdefiniować operację r przypisującą funkcji g funkcję $r(g)$, gdzie

$$(r(g))(x) := g(-x), \quad \texttt{to} \quad \mathcal{F}^{-1}(g) = \mathcal{F}(r(g)). \tag{15.5a}$$

Innym powodem użycia stałej $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ w definicji (15.4) jest izometryczność $\mathcal{F}$ względem normy $\|f\|_2 := \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt\right)^{\frac{1}{2}}$. Mamy bowiem następujące twierdzenie[3]:

$$\texttt{Twierdzenie Plancherela} \qquad \|\mathcal{F}(f)\|_2 = \|f\|_2. \tag{15.6}$$

Stosując ograniczenie przez 1 funkcji $\mathbb{R} \ni s \mapsto |e^{is}|$, co daje jednostajną zbieżność całki, wnioskujemy dzięki twierdzeniu 1. o ciągłości $\mathcal{F}(f)$. Ponadto funkcja ta zmierza do zera przy $|\omega| \to \infty$ (mówi o tym tzw. Lemat Riemanna-Lebesgue'a). Z tw. 4 wnioskujemy z kolei, że gdy zarówno $f(x)$, jak i $x^k f(x)$ są bezwzględnie całkowalne, to istnieje k-ta pochodna z $\hat{f}$, przy czym

$$(\widehat{f})^{(k)}(\omega) = \mathcal{F}\big((-ix)^k f(x)\big)(\omega). \tag{15.7}$$

Jeżeli $f \in C^k(\mathbb{R})$ oraz $f^{(k)}$ jest całkowalna, to

$$\mathcal{F}\big(f^{(k)}(x)\big)(y) = (iy)^k \hat{f}(y). \tag{15.8}$$

Oznaczmy przez τ_y operator przesunięcia argumentu funkcji: $\tau_y f(x) = f(x-y)$. Wówczas całkowanie przez podstawienie $x - y = t, dx = dt$ daje wzory

$$\mathcal{F}(\tau_y f)(\omega) = e^{-iy\omega} \hat{f}(\omega), \qquad \tau_b \widehat{f}(\omega) = \mathcal{F}(e^{ibx} f(x))(\omega). \tag{15.9}$$

Możemy też zdefiniować operator M_a mnożenia argumentu funkcji przez stałą $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ wzorem: $(M_a f)(x) = f(ax)$ wtedy

$$\widehat{(M_a f)}(\omega) = \frac{1}{|a|} \widehat{f}\Big(\frac{\omega}{a}\Big). \tag{15.10}$$

Definiuje się tak zwany splot (lub iloczyn splotowy) dwu funkcji całkowalnych na osi rzeczywistej [4] jako funkcję

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) g(t) \, dt.$$

Splot dwu funkcji całkowalnych jest funkcją ciągłą, a gdy ponadto jedna z funkcji jest klasy C^k, to również ich splot jest klasy C^k. Fakt ten służy do przybliżania danej funkcji funkcjami klasy C^∞. Ponadto mnożenie splotowe jest przemienne, łączne, a przez transformatę Fouriera przechodzi w zwykłe mnożenie funkcji, co można sprawdzić zamieniając kolejność całkowań dzięki tw. Fubiniego:

$$\widehat{(f \star g)}(\omega) = \sqrt{2\pi} \hat{f}(\omega) \, \hat{g}(\omega). \tag{15.11}$$

Dla funkcji $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ transformatę Fouriera oraz jej transformatę odwrotną określamy wzorami, w których $x = (x_1, \ldots x_n), \omega = (\omega_1, \ldots \omega_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\, x \cdot \omega} f(x) dx_1 \ldots dx_n, \quad f(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\, x \cdot \omega} \hat{f}(\omega) d\omega_1 \ldots d\omega_n,$$

[3] Zwane też twierdzeniem Parsevala, przez analogię do szeregów Fouriera

[4] angielska nazwa splotu, to *convolution product*

gdzie $x \cdot \omega = x_1\omega_1 + \ldots x_n\omega_n$ oznacza iloczyn skalarny, $\int_{\mathbb{R}^n}$ oznacza całkę n-krotną iterowaną $\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty}$. Własności (15.6) - (15.10) mają dosłowne odpowiedniki w sytuacji n- zmiennych.

Jest jeszcze inny sposób definiowania transformaty Fouriera, w którym przed całką nie występują stałe, za to w miejsce $e^{-i\,x\cdot\omega}$ występuje $e^{-2\pi i\,x\cdot\omega}$. Czyli wtedy $(Ff)(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\,x\cdot\omega} f(x)dx_1 \ldots dx_n$. oraz $\widehat{f \star g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$. W takim przypadku transformacja odwrotna działa na funkcji g dokładnie, jak $\mathcal{F}$ na funkcji $r(g)$, zdefiniowanej w (15.5a). We wzorach (15.7)-(15.9) zamiast i trzeba wstawić wtedy $2\pi i$. Dla bijekcji liniowej $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mamy $(\widehat{f \circ T}) = \frac{1}{|\det T|}\widehat{f} \circ (T^*)^{-1}$. To jest uogólnienie (15.10).