1 Całki niewłaściwe

Załóżmy, że $a < b \leqslant +\infty$ i dla każdej liczby β takiej, że $a < \beta < b$ jest $f \in R[a, \beta]$. Jeśli istnieje granica skończona

$$\lim_{\beta \to b^-} \int_a^\beta f(t)\, dt, \quad \texttt{którą oznaczamy symbolem} \int_a^b f(t)\, dt \tag{1}$$

to mówimy, że całka niewłaściwa jest zbieżna i tę granicę nazywamy całką niewłaściwą (z punktem niewłaściwym b).

Na przykład, $\int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt = \lim_{\beta\to+\infty}[-e^{-t}]_0^\beta = \lim_{\beta\to+\infty}(e^0 - e^{-\beta}) = 1$. Gdy $p > 1$, to $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}$ jest zbieżna (ile wynosi jej wartość?), a dla $p \leqslant 1$ - taka całka jest rozbieżna.

Sama funkcja f nie musi być ani zbieżna do zera, ani nawet ograniczona, aby zapewnić zbieżność całki $\int_1^\infty f(t)\, dt$. Przykładem może być funkcja "schodkowa" na każdym z odcinków $[n, n + 3^{-n}]$ równa 2^n, w pozostałych punktach równa zero. Ogólniej, zauważmy, że dla funkcji niejujemnej, całka nieoznaczona jest zbieżna wtedy i tylko wtedy, gdy wartoci $\int_a^\beta f(t)\, dt$ są wspólnie ograniczone. Faktycznie, jako funkcja zmiennej β, ta wartość jest niemalejąca, a dla funkcji monotonicznej istnienie skończonej granicy jednostronnej (podobnie, jak dla ciągów) jest równowżne z ograniczonością.

Zauważmy jeszcze, że gdy zwykła całka Riemanna istnieje, to istnieje też całka niewałściwa po tym samym przedziale i jest ona równa całce Rieanna. Faktycznie, z addytywnej zależności od drogi całkowania wynika, że różnica między całkami Riemanna $\int_a^b f(t)\, dt - \int_a^\beta f(t)\, dt$ jest równa całce $\int_\beta^b f(t)\, dt$, która zmierza do zera. Tutaj musi być $b < +\infty$, ponadto $f \in R[a, b]$ jest ograniczona, powiedzmy $|f(x)| \leqslant M$. Wówczas ograniczeniem dla modułu z ostatniej całki będzie $M \cdot (b - \beta)$, co zmierza do zera, gdy $\beta \to b^-$. Nie ma więc problemu z użyciem tego samego symbolu dla całki Riemanna i całki niewłaściwej.

Z warunku Cauchy'ego (równoważnego istnieniu granic skończonych) wynika jego odpowiednik:

Warunek Cauchy'ego dla całek niewłaściwych: Całka niewłaściwa (1) jest zbieżna $\Leftrightarrow \forall_{\epsilon>0} \exists_{\gamma\in(a,b)} \forall_{\alpha,\beta}\, \gamma < \alpha < \beta < b \Rightarrow |\int_\alpha^\beta f(t)\, dt| < \epsilon$. Faktycznie, ostatnia całka jest równa różnicy całek $\int_a^\beta f(t)\, dt - \int_a^\alpha f(t)\, dt$, więc jest to zwykły warunek Cauchy'ego dla granicy funkcji.

Całki niewłaściwe mogą też mieć punkt niewłaściwy na lewym końcu przedziału -wtedy rozważamy $\lim_{\alpha\to a^+} \int_\alpha^b f(t)\, dt$. Albo w środku -np. gdy f ma asymtptę pionową w punkcie $c \in (a, b)$. W tym ostatnim przypadku dzielimy przedział na 2 fragenty i liczymy osobno całki niewłaściwe $\int_a^c$ oraz $\int_c^b$.

Najczęściej dla badania zbieżności całek niewłaściwych stosujemy następujące

Kryterium porównawcze: Jeżeli istnieje funkcja nieujemna g o zbieżnej całce niewłaściwej $\int_a^b g(t)\, dt$ taka, że $|f(t)| \leqslant g(t)$ dla wszystkich $t \in [a, b)$ (lub tylko w jakimś w lewostronnym sąsiedztwie punktu niewłaściwego b), to całka niewłaściwa $\int_a^b f(t)\, dt$ jest zbieżna.

Kryterium to jest łatwym wnioskiem z warunku Cauchy'ego i nierówności:

$$|\int_\alpha^\beta f(t)\, dt| \leqslant \int_\alpha^\beta |f(t)|\, dt \leqslant \int_\alpha^\beta g(t)\, dt.$$

Ostatnia z całek jest $< \epsilon$ dla α, β "dostatecznie bliskich punktowi niewłąściwemu" -z warunku Cauchy'ego dla całki niewłaściwej z g.

Zanim przejdziemy do dalszych kryteriów dla całek niewłaściwych, przypomnijmy "pokrewną" teorię szeregów liczbowych.

2 Szeregi liczbowe

Zacznijmy od definicji szeregu liczbowego. Chodzi nam o to, by używać pojęcia „szeregu formalnego” niezależnie od tego, czy jego suma istnieje, czy też nie, gdyż będziemy czasami mieli do czynienia z szeregami rozbieżnymi.

Definicja 1 *Szeregiem liczbowym o wyrazach* $x_n \in \mathbb{C}$ *będziemy nazywać ciąg „sum częściowych”* $(S_k)_{k=0,1,\ldots}$*, gdzie*

$$S_k := \sum_{n=0}^{k} x_n \; = x_0 + x_1 + \cdots + x_k.$$

Czyli szereg, to ciąg:

$$x_0,$$

$$x_0 + x_1,$$

$$x_0 + x_1 + x_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_k,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Czasami wygodnie jest pisać $S_k(x_n)$ *zamiast* S_k*. Mówimy, że ten szereg jest zbieżny, o sumie równej* S*, co zapisujemy symbolem* $S = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$*, gdy ciąg* (S_k) *jest zbieżny do granicy skończonej, przy czym* $S = \lim_{k\to\infty} S_k$*. Skrótowo, mamy więc*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} x_n.$$

Możemy też zdefiniować $\sum_{n=p}^{\infty} x_n$ jako szereg $\sum_{j=0}^{\infty} y_j$, gdzie $y_0 = \ldots = y_{p-1} = 0, y_n = x_n$ dla $n \geqslant p$. W szczególności często będziemy spotykali $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. W takim przypadku $S_k = x_1 + \ldots + x_k$.

Zacznijmy od „trywialnych przykładów”, gdy $x_1 = x_2 = \ldots = 0$, to S_k jest ciągiem stałym równym x_0 i taka jest też suma badanego szeregu. Podobnie, gdy ciąg x_n jest równy zero od pewnego miejsca (dla $n \geqslant M$), to ciąg S_k jest stały od tego miejsca, zaś suma szeregu jest wtedy równa sumie skończonej $x_0 + \ldots + x_M$.

Bez wątpienia, najważniejszym szeregiem jest *szereg geometryczny* (o wyrazach zespolonych). Odpowiada on ciągowi geometrycznemu postaci

$$x_n = aq^n,$$

gdzie $q \neq 0$ jest tzw. ilorazem ciągu geometrycznego. (Faktycznie, $\forall_{n\in\mathbb{N}}\, q = \frac{x_n}{x_{n-1}}$). Dla ciągu samych zer możemy przyjąć $a = 0, q = 1$. Ogólnie, $q^0 = 1$, więc $a = x_0, x_1 = aq, x_2 = aq^2, \ldots$. Tu mamy $qS_k = S_k + aq^{k+1} - a$, więc dla $q \neq 1$ otrzymujemy $S_k = \frac{a(1-q^{k+1})}{1-q}$. Szereg jest więc zbieżny do $\frac{a}{1-q}$ gdy $|q| < 1$. (Ciąg geometryczny aq^{k+1} jest zbieżny do zera przy $|q| < 1$, stały dla $q = 1$ i rozbieżny gdy $q \neq 1, |q| \geqslant 1, a \neq 0$. Ciąg S_k jest rozbieżny dla $a \neq 0$, $|q| \geqslant 1$, bo w tym przypadku gdy $q = 1$, mamy $x_n = a$, zaś $S_k = (k+1)a$. Na przykład, $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^n = 2$. Jak łatwo zauważyć, pomnożenie przez q^m tylko ”przesuwa wyrazy ciągu aq^n o m miejsc w prawo” oraz

$$\sum_{n=m}^{\infty} aq^n = \frac{aq^m}{1-q} \quad \texttt{gdy} \quad |q| < 1.$$

Zauważmy, że dla $n \in \mathbb{N}$ mamy $x_n = S_n - S_{n-1}$. Jeśli istnieje granica skończona $S = \lim S_n$, to również $S = \lim S_{n-1}$, więc wówczas $\lim x_n = S - S = 0$. Stosując arytmetykę granic, możemy więc sformułować następujące tezy:

Twierdzenie 1 *Dla szeregów zbieżnych mamy następujące własności:*

1. Warunek konieczny zbieżności *Wyrazy szeregu zbieżnego muszą dążyć do zera*

2. Liniowość *Gdy szeregi $\sum a_n$ oraz $\sum b_n$ są zbieżne, to zbieżny jest też szereg sum $a_n + b_n$, przy czym $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$. Podobnie, dla dowolnej stałej C mamy $\sum_{n=0}^{\infty} Ca_n = C\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.*

3. *Zbieżność szeregu nie zależy od początkowych wyrazów: Gdy tylko istnieje $M \in \mathbb{N}$ takie, że $\forall_n\, n \geqslant M \Rightarrow x_n = y_n$, to ze zbieżności $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ wynika zbieżność $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$.*

4. Warunek Cauchy'ego równoważny zbieżności *Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_{M\in\mathbb{N}}\forall_{k\in\mathbb{N}} \quad \Big|\sum_{n=M+1}^{M+k} x_n\Big| < \epsilon.$$

5. *Szereg o wyrazach nieujemnych jest zbieżny (do $S = \sup\{S_k : k \in \mathbb{N}\}$) wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg jego sum częściowych jest ograniczony.*

Drugą tezą otrzymamy zauważywszy, że $S_k(a_n + b_n) = S_k(a_n) + S_k(b_n)$, zaś $S_k(Ca_n) = CS_k(a_n)$. W następnej tezie zauważmy, że ciąg $S_k(y_n) = S_k(x_n)+S_k(y_n - x_n)$, różnica $S_k(y_n) - S_k(x_n)$ jest więc ciągiem stałym od miejsca o indeksie $k = M$. Na koniec -zauważmy, że pod modułem w warunku (4) jest suma skończona, równa $S_{M+k} - S_M$, więc jest to warunek Cauchy'ego dla ciągu (S_k).

Dla szeregów o wyrazach $x_n \geqslant 0$ ciąg (S_k) jest niemalejący, więc w tym przypadku jego zbieżność jest równoważna ograniczoności, zaś $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sup_k S_k$.

W przypadku szeregów o wyrazach nieujemnych (i tylko takich!) zbieżność będziemy zapisywać w postaci warunku

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n < +\infty, \quad \texttt{a rozbieżność -jako warunek} \quad \sum_{n=0}^{\infty} x_n = +\infty.$$

`Uwaga!` Warunek z tezy 1 ostatniego twierdzenia jest konieczny, ale nie wystarczający: chociaż $\lim \frac{1}{n} = 0$, wykażemy, że dla szeregu harmonicznego mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Gdyby bowiem ten szereg był zbieżny, to dla $S_k = S_k(\frac{1}{n})$ powinno być $\lim S_{2k} = \lim S_k$, zaś $\lim S_{2k} - S_k = 0$. Tak jednak nie jest, gdyż mamy

$$S_{2k} - S_k = \frac{1}{k+1} + \ldots + \frac{1}{2k} \geqslant \frac{1}{2k} + \ldots + \frac{1}{2k}$$

Składników w ostatniej sumie jest k, więc ta suma równa jest $\frac{1}{2}$ i (wbrew naszemu przypuszczeniu) NIE ZMIERZA DO ZERA. Szereg harmoniczny jest więc rozbieżny. Dla tego szeregu wyraz x_0 postaci $\frac{1}{0}$ nie ma, oczywiście, sensu, sumowanie zaczyna się od $n = 1$. Dla szeregu $\sum \frac{1}{n \ln n}$ trzeba sumować od $n = 2$. Warto więc pamiętać, że zbieżność szeregu nie zależy od początkowych wyrazów. Wartość sumy -już zależy, ciągi sum częściowych dla 2 szeregów różniących się tylko początkowymi wyrazami różnią się bowiem od pewnego miejsca o stałą.

Nietrywialny przykład szeregu zbieżnego, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, zbieżny do 1. Aby to sprawdzić - zauważmy, że $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ Więc k-ta suma częściowa jest tu równa

$$(1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \ldots + (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = 1 - \frac{1}{k+1} \to 1.$$

Niełatwo jest natomiast wyznaczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

tą sumą jest $\frac{\pi^2}{6}$. Sprawdzimy jedynie samą jego zbieżność. Ponieważ $0 < \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)}$, sumy częściowe spełniają $S_k(\frac{1}{(n+1)^2}) \leqslant S_k(\frac{1}{n(n+1)})$, są więc ograniczone, bo już wiemy, że $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} < +\infty$. Ponieważ $\lim_k S_k(\frac{1}{(n+1)^2}) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, otrzymujemy dowodzoną zbieżność.

Do wykazania zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, gdzie $\alpha > 1$ (i rozbieżności gdy $\alpha \leqslant 1$) wygodnie jest użyć tzw. *kryterium całkowego zbieżności szeregów*:

Twierdzenie 2 Kryterium całkowe. *Jesli $f : [1, +\infty) \to [0, +\infty)$ jest funkcją nieujemną, nierosnącą, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy całka niewłaściwa $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ jest zbieżna.*

Najczęściej przy badaniu zbieżności szeregów korzystamy jednak z następujacego kryterium

Twierdzenie 3 Kryterium porównawcze. *Jeśli moduły wyrazów x_n są mniejsze lub równe od wyrazów y_n pewnego szeregu zbieżnego $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ jest też zbieżny.*

Przez kontrapozycję otrzymujemy stąd warunek na rozbieżność $\sum y_n$: zachodzi ona, jeśli $|x_n| \leqslant y_n$ $(\forall_n)$ oraz szereg $\sum x_n$ jest rozbieżny. Pożyteczny jest też wariant kryterium porównawczego, ale dla $x_n, y_n > 0$:

Ilorazowe Kryterium Porównawcze *Jeśli tylko $\lim \frac{x_n}{y_n} = C$, gdzie $0 < C < +\infty$, to szereg $\sum x_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum y_n$ jest zbieżny.*

Dowodząc kryterium w wersji podstawowej, sprawdzamy warunek (4), szacując

$$\Big|\sum_{n=M+1}^{M+k} x_n\Big| \leqslant \sum_{n=M+1}^{M+k} |x_n| \leqslant \sum_{n=M+1}^{M+k} y_n.$$

Ostatnie sumy są dowolnie małe przy M dostatecznie dużych (niezależnie od k), z tego samego kryterium dla szeregu zbieżnego $\sum y_n$.

Sztuka doboru majorant y_n jest istotna, jednak są szeregi zbieżne, da których takich „sumowalnych majorant” nie ma. Minimalnymi majorantami są bowiem liczby $|x_n|$. Zaraz zobaczymy, kiedy takich majorant nie można skutecznie stosować.

Mówimy, że szereg $\sum x_n$ jest *bezwzględnie zbieżny*, gdy $\sum |x_n| < +\infty$. Wówczas też sam ciąg (x_n) o powyższej własności nazwiemy *ciągiem sumowalnym*. Dzięki kryterium porównawczemu, szereg bezwzględnie zbieżny musi być zbieżny. Jednak istnieją szeregi zbieżne, które nie są zbieżne bezwzględnie (nazywamy je *szeregami zbieżnymi warunkowo*). Takim szeregiem jest np. szereg Leibniza $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$. (Jak się okaże, jego sumą jest $\ln 2$.) Nie jest on zbieżny bezwzględnie (moduły tworzą szereg harmoniczny rozbieżny: $\sum \frac{1}{n}$). Zbieżność szeregu Leibniza wyniknie z następującego kryterium:

Twierdzenie 4 *Kryterium Leibniza. Jeśli ciąg a_n zmierza w sposób malejący (nierosący) do zera, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ jest zbieżny.*

Sprawdźmy np. „charakter zbieżności” dla $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3n}}{\sqrt{2n+1}}$. W mianowniku mamy tu ciąg rosnący, bo funkcja $\sqrt{\cdot}$ jest rosnąca. Licznik $= C \cdot (-1)^{n+1}$, gdzie C jest stałą $C = -1$. Z dokładnością do tego stałego czynnika, mamy więc ciąg spełniający założenia kryterium Leibniza, szereg jest zbieżny. Ale tylko warunkowo, bo tu $|x_n| \geqslant \frac{1}{2n}$, a ta stała wielokrotność szeregu harmonicznego jest rozbieżna. Nie zawsze zmiana znaku jest „regularna„ -np. gdy mamy szereg typu $\sum \frac{\sin n}{n}$. Wówczas przydatne jest *Kryterium Dirichleta*, które sformułujemy później w ogólniejszym przypadku -dla szeregów funkcyjnych.

W większości przypadków szeregi $\sum x_n$, z którymi będziemy mieli do czynienia będą jednak albo zbieżne, albo bezwzględnie zbieżne. W przestrzeniach unormowaych interesować nas będzie też głównie zbieżność bezwzględna, definiowana dla wektorów $\mathtt{w}_n$ przez warunek $\sum \|\mathtt{w}_n\| < +\infty$. Prowadzi to zawsze do badania zbieżności pewnych szeregów o wyrazach nieujemnych (dla $a_n = |x_n|$ lub $a_n = \|\mathtt{w}_n\|$). Dla takich szeregów najczęściej będziemy korzystali z jednego z dwu następujących kryteriów:

Twierdzenie 5 Podstawowe kryteria zbieżności
Kryterium d'Alemberta *Jeśli* $a_n > 0$ *oraz* $g := \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$, *to przy* $g < 1$ *szereg jest zbieżny, zaś dla* $g > 1$ *-rozbieżny.*
Kryterium Cauchy'ego *Jeśli* $a_n \geqslant 0$ *oraz* $\gamma := \lim \sqrt[n]{a_n}$, *to przy* $\gamma < 1$ *szereg jest zbieżny, zaś dla* $\gamma > 1$ *-rozbieżny.*

Założenia można nieco uogólnić, postulując zamiast $g < 1$ zachodzenie dla pewnego $q < 1$ warunku $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$ (a zamiast $g > 1$ -warunek $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$) dla wszystkich n od pewnego miejsca począwszy. Analogicznie dla warunku $\gamma < 1$. (Takie tezy są zresztą pierwszym krokiem dowodu. Dla ich sformułowania można używac pojęć: granicy dolnej i granicy górnej ciągu, których jednak nie będziemy wprowadzali). Natomiast gdy $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$ dla nieskończenie wielu n, to nie może zachodzić warunek konieczny (=zbieżność ciągu wyrazów szeregu do zera). W przypadkach $g < 1$ oraz $\gamma < 1$ korzystamy z kryterium porównawczego, gdyż dla pewnej stałej C i dla dostatecznie dużych n otrzymamy oszacowania $a_n \leqslant Cq^n$.

Zauważmy, że w przypadku $g = 1$ lub $q = 1$ żadne z kryterów nie rozstrzyga o zbieżności: Takie równości zachodzą zaróno dla szeregu harmonicznego (rozbieżnego) $\sum \frac{1}{n}$, jak i dla szeregu zbieżnego $\sum \frac{1}{n^2}$. Można wykazać, że gdy kryterium d'Alemberta rozstrzyga (o zbieżności, bądź rozbieżności), to również rozstrzyga kryterium Cauchy'ego. Można więc zapytać, czy nie wystarczy znać tylko to drugie, silniejsze kryterium? Na ogół w przypadkach, gdy wyraz szeregu zawiera jako czynnik silnię -warto korzystać z kryterium d'Alemberta, gdyż po podzieleniu $(n+1)!$ przez $n!$ uzyskamy po prostu $n+1$ jako odpowiedni czynnik. Liczenie granicy zawierającej jako czynnik $\sqrt[n]{n!}$ jest bardzo trudne.

Jako ciekawostkę podajmy tu pewien wzór (tzw. wzór Stirlinga), pozwalający w praktyce przybliżać wartość silni dla dużych n:

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\, \exists_{\theta\in(0,1)}\ n! = \sqrt{2\pi n}\frac{n^n}{e^n}e^{\frac{\theta}{12n}}.$$

Ciąg o wyrazach $\sqrt[n]{n!}$ jest więc asymptotycznie równoważny z ciągiem o wyrazach $\frac{n}{e}$, czyli iloraz tych 2 ciągów zmierza do 1.

`Przykład` Zbadajmy, dla jakich $a > 0$ kryterium d'Alemberta zagwarantuje zbieżność szeregu $\sum a_n$, gdzie $a_n = \frac{a^n n!}{n^n}$. Mamy

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = (a^n a n!(n+1)n^n) : (a^n n!(n+1)^n(n+1)) = a(\frac{n+1}{n})^{-n}.$$

Granicą tego ciągu jest $\frac{a}{e}$, więc dla $0 < a < e$ mamy szereg zbieżny, a dla $a > e$ -rozbieżny. Gdy $a = e$, to wzór Stirlinga pokazuje, że wówczas $a_n > \sqrt{2\pi n} \to +\infty$ (rozbieżność). W tym przypadku kryterium d'Alemberta nie rozstrzyga $(g = 1)$, podobnie jak kryterium Cauchy'ego.

Parę dalszych przykładów, w których warto stosować kryterium d'Alemberta: $\sum \frac{n^n}{(3n)!}$ (tu $g = 0$), $\sum \frac{n^{2n}}{(2n)!}$ (tu $g = (\frac{e}{2})^2 > 1$), $\sum \frac{n^n}{n!(e+i)^n}$ (tu i oznacza jednostkę urojoną,$g = \frac{e}{\sqrt{e^2+1}} < 1$.) Kryterium Cauchy'ego możemy stosować np. dla $\sum \frac{n}{6^n}(3+4i)^n$ (tu $\gamma = \frac{5}{6}$), dla $\sum \frac{\ln n}{2^n}$ (tu $\gamma = \frac{1}{2}$), dla $\sum \frac{n^3 3^n}{2^n+4^n}$ (tu $\gamma = \frac{3}{4}$).