2 Zbieżność jednostajna ciągów funkcyjnych

Dla funkcji ograniczonej $f : D \to \mathbb{C}$ na zbiorze $D \subset \mathbb{R}^m$ określamy jej normę

$$\|f\|_D := \sup\{|f(x)| : x \in D\}.$$

Gdy zbiór D jest domknięty i ograniczony, to (dzięki twierdzeniu Weierstrassa) każda funkcja ciągła na tym zbiorze jest ograniczona i jej moduł osiąga w pewnym punkcie wartość największą. Zamiast sup możemy pisać wtedy max w definicji $\|f\|_D$ i zamiast $C_b(D)$ piszemy wówczas $C(D)$.

Jeśli $C \geqslant 0$ jest taką stałą, że $\forall_{x\in D}\ |f(x)| \leqslant C$, to C nazwiemy *jednostajnym ograniczeniem dla funkcji $|f|$ na zbiorze D*. Wówczas $\|f\|_D \leqslant C$. Norma $\|f\|_D$ funkcji f jest więc najmniejszym jednostajnym ograniczeniem $|f|$. W przestrzeniach funkcyjnych rozważane są też inne normy, zaś $\|f\|_D$ nazywa się *normą jednostajną*, lub *normą Czebyszewa* tej funkcji.

Przykłady Niech $D = [0, 1]$. Dla $g(x) = 3(x - \frac{1}{3})x^2$ szukamy wartości ekstemum używając pochodnej. $g'(x) = 3x^2 + (3x-1)2x = 9x^2 - 2x = x(9x-2)$, więc $g' > 0$ dla $x < 0$ lub $x > \frac{2}{9}$ oraz $g' < 0$ dla $0 < x < \frac{2}{9}$. jedyne ekstrema lokalne g są w punktach: zero, gdzie $g = 0$ (maksimum lokalne oraz dla $x = \frac{2}{9}$ (minimum lokalne. Ale ponieważ $g < 0$ dla $0 < x < \frac{1}{3}$, moduł: $|g|$ ma maksimum lokalne dla $x = \frac{2}{9}$. Trzeba też uwzględnić wartości na końcach przedziału, więc maksimum $|g(x)|$ jest równe $\|g\|_D = 2\max(|g(0)|, |g(1)|, |g(\frac{2}{9})| = g(1) = 2$.

Dla $f_n(x) = x^n(1-x)$ o pochodnej $f_n'(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n$ wartości zerowe na końcach przedziału dają maksimum f_n jedynie w punkcie $x = \frac{n}{n+1}$, stąd $\|f_n\|_D = (\frac{n}{n+1})^n\frac{1}{n+1}$. Oczywiście, dla funkcji monotonicznych maksimum jest na jednym z końców przedziału, np. $\|x^n\|_{[0,1]} = 1$.

Przestrzeń $C_b(D)$ funkcji ciągłych ograniczonych na zbiorze D jest przestrzenią wektorową, gdzie sumą (wektorów, czyli tu -funkcji) $f, g \in C_b(D)$ jest funkcja $f + g \in C_b(D)$ określona wzorem $(f + g)(x) := f(x) + g(x) \forall x \in D$. Podobnie, iloczyn funkcji $f \in C_b(D)$ przez skalar α- to funkcja $D \ni x \to \alpha f(x)$. Można łatwo sprawdzić, że $\| \ \|_D$ jest normą, czyli spełnione są 3 postulaty z następującej definicji:

Definicja Jeśli X jest przestrzenią wektorową, to odwzorowanie $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_+$ jest normą, jeśli spełnione są warunki:

1. $\|v\| > 0$ dla każdego wektora $v \in X, v \neq 0$
2. $\|\alpha v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$ dla każdego wektora v i skalara α
3. $\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$ dla każdych wektorów $u, v \in X$.

W każdej przestrzeni wektorowej unormowanej określamy odległość dwu wektorów u, v jako normę ich różnicy: $\|u - v\|$.

Mówimy, że wektor v jest granicą ciągu wektorów $w_n \in X$ (przy $n \to \infty$), co zapisujemy symbolem $v = \lim w_n$ lub $w_n \to v$, gdy ciąg liczbowy $\|w_n - v\|$ zmierza do zera.

Dla ciągów wektorów można tak samo, jak dla ciągów liczbowych udowodnić twierdzenie o granicy sumy, twierdzenie o ograniczoności ciągów zbieżnych, twierdzenie o jednoznaczności granicy oraz twierdzenie o granicy podciągu zbieżnego. Ponadto ciąg iloczynów $\alpha_n w_n$ skalarów α_n i wektorów w_n zmierza do granicy równej $(\lim \alpha_n) \cdot (\lim w_n)$, o ile te granice istnieją. Wówczas też (z nierówności $|\|w_n\| - \|v\|| \leqslant \|w_n - v\|$) wynika, że również $\|w_n\| \to \|v\|$.

Definicja Ciągiem Cauchy'ego nazywamy taki ciąg (w_n) wektorów tej przestrzeni, że

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_M\forall_{n,k\geqslant M}\ \|w_n - w_k\| < \epsilon. \tag{1}$$

Każdy ciąg zbieżny spełnia warunek Cauchy'ego (bo gdy $v = \lim w_n$, to mamy $\|w_n - w_k\| \leqslant \|w_n - v\| + \|v - w_k\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}$ dla n, k dostatecznie dużych).

Dla ciągów liczbowych warunek Cauchy'ego implikuje też zbieżność, czyli istnienie granicy skończonej. Dla wektorów już tak być nie musi!

Na przykład, zbiór X_1 restrykcji do odcinka $[0,1]$ wilomianów jest przestrzenią wektorową. Carl Weierstrass udowodnił, że każda funkcja ciągła jest granicą w normie $\|\cdot\|_{[0,1]}$ pewnego ciągu wielomianów. Rozważmy np. funkcję $t \mapsto \sqrt{t}$. Ciąg wielomianów zbieżnych do funkcji $\sqrt{t}$ spełnia warunek Cauchy'ego, (również w przestrzeni X_1, bo tam jest taka sama norma), ale nie ma granicy w przestrzeni X_1 (z powodu jednoznaczności granicy w $C[0,1]$).

Definicja Przestrzeń unormowaną nazwiemy przestrzenią zupełną, gdy każdy ciąg Cauchy'ego w tej przestrzeni ma granicę należącą do tej przestrzeni. Przestrzeń Banacha, to przestrzeń unormowana zupełna.

Przykładem przestrzeni Banacha jest $C[a,b]$ z normą

$$\|f\|_{[a,b]} := \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|.$$

Dość prosty dowód pomijam. Natomiast warto pryjrzeć się dwu typom zbieżności ciągów funkcyjnych. Dla uproszczenia załóżmy, że dziedziną Δ wszystkich rozważanych tu funkcji jest przedział $\Delta = [a,b]$, chociaż zbiór Δ mógłby tu być całkiem dowolny. Zakładamy, że funkcje $f, f_n : \Delta \to \mathbb{R}$ (lub $f, f_n : \Delta \to \mathbb{C}$) są ograniczone.

Definicja Mówimy, że ciąg funkcji f_n jest na zbiorze Δ zbieżny punktowo do funkcji f, gdy

$$\forall_{x\in\Delta} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x). \tag{2}$$

Jeśli chcemy podkreślić, że wybór liczby M zależy od ϵ oraz od x, możemy to zaznaczyć pisząc $M = M(x,\epsilon)$. Rozpisując w definicję granicy $\lim f_n(x)$ możemy warunek (2) zapisać w równoważnej postaci

$$\forall_{x\in\Delta}\forall_{\epsilon>0}\exists_{M=M(x,\epsilon)}\forall_{n>M}\ |f_n(x) - f(x)| < \epsilon. \tag{3}$$

Kwantyfikatory tego samego typu możemy "przestawiać" -czyli zamieniać ich kolejność. Ale implikacja typu

$$\exists_M \forall_x P(M,x) \Rightarrow \forall_x \exists_M P(M,x), \tag{4}$$

gdzie $P(M,x)$ jest jakąś formą zdaniową - jest prawdziwa tylko w tę jedną stronę (nie można jej zastąpić równoważnością!). Na przykład, w zbiorze liczb rzeczywistych wystarczy przyjrzeć się warunkowi $P(M,x)$ typu $x < M$, gdzie poprzednik (4) będzie fałszywy, następnik -prawdziwy, np. dla $M = x+1$. Zamieniając w warunku (3) kolejność kwantyfikatorów dotyczących x oraz M otrzymamy więc istotnie silniejszy warunek -tak zwaną zbieżność jednostajną:

Definicja Mówimy, że ciąg funkcji f_n jest na zbiorze Δ zbieżny jednostajnie do funkcji f, gdy

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_{M=M(\epsilon)}\forall_{x\in\Delta}\forall_{n>M}\ |f_n(x) - f(x)| < \epsilon. \tag{5}$$

Zauważmy, że ϵ jest tu ograniczeniem jednostajnym na zbiorze Δ dla różnicy funkcji $f_n(x) - f(x)$, więc otrzymamy stąd, przechodząc do supremum modułu nierówność $\|f_n - f\|_\Delta \leqslant \epsilon$ i cały warunek jednostajnej zbieżności (5) jest równoważny warunkowi zbieżności względem normy

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\Delta = 0.$$

Zbieżność jednostajną oznaczamy podwójną strzałką: $\rightrightarrows$, pisząc $f_n \rightrightarrows f$ przy $n \to \infty$. Natomiast zachodzenie warunku $\forall_{x\in D} \lim f_n(x) = f(x)$ nazywamy *zbieżnością punktową ciągu* (f_n) *do funkcji* f i oznaczamy symbolem $f_n \to f$ (na zbiorze D), lub $f_n(x) \to f(x),\ x \in D$.

Zauważmy, że ze względu na kolejność kwantyfikatorów: w regule wnioskowania (4) -mamy następującą implikację:

Twierdzenie Jeśli ciąg funkcji f_n jest zbieżny jednostajnie, to jest on też zbieżny punktowo do tej samej granicy.

Badanie zbieżności jednostajnej powinniśmy więc zawsze zacząć od wyliczenia granicy punktowej, co jest prostszym zadaniem. Jedynie z warunku $\lim \|f_n\|_\Delta = 0$ możemy bezpośrednio wnioskować, że $f_n \rightrightarrows 0$. Przy badaniu zbieżności ciągu f_n wyliczamy najpierw $f(x) = \lim f_n(x)$ w każdym ustalonym punkcie $x \in \Delta$, dopiero w następnym kroku liczymy normę supremową $\|f_n - f\|_\Delta$. Do tego potrzebna jest już znajomość wartości $f(x)$.

Przykłady. Dla ciągu $h_n(x) = 2e^{\sin x} + x^n(1-x)$ na zbiorze $\Delta = [0,1]$ drugi składnik, czyli ciąg $f_n(x) = x^n(1-x)$ zmierza do zera, więc granicą punktową jest tu funkcja $\lim h_n(x) = 2e^{\sin x}$, zaś $\|h_n - \lim h_n(x)\|_\Delta = \|f_n\|_\Delta$, co jak sprawdziliśmy w poprzednim przykładzie, zmierza do zera. Zbieżność h_n jest w tym przypadku jednostajna. Gdyby f_n zastąpić przez $(n+1)f_n$, -już tylko będzie to zbieżność punktowa.

Inaczej przedstawia się sytuacja dla ciągu x^n, którego granicą punktową jest funkcja równa zero w przedziale $[0,1)$ oraz równa 1 w punkcie $x = 1$ (bo tam jest ciąg stały=1). Wyliczamy $\|x^n - \lim x^n\|_{[0,1]} = \|x^n - 0\|_{[0,1)} = 1$, co nie zmierza do zera, więc zbieżność nie jest tu jednostajna, tylko punktowa. Na zbiorze nieograniczonym $\Delta = \mathbb{R}$ ciąg $\sin(\frac{1}{n}x)$ zmierza punktowo, ale nie jednostajnie do zera. Podobnie jest z ciągiem funkcji charakterystycznych $\chi_{[n,n+1]}$. Na przedziale $[0,1]$ analogiczna sytuacja wystąpi dla $\chi_{[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]}$. Rzecz jasna, normy są tu równe 1, a granica punktowa jest stale równa zero. Faktycznie, dla $x = 0$ wartości są stale równe 0, zaś gdy $x > 0$, to dla $n > \frac{1}{x}$ mamy już $x \notin [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$, więc ciąg jest zerem począwszy od takiego miejsca.

Zauważmy, że dla ciągu $u_n(x) = (n+1)x^n, 0 \leqslant x < 1$ oraz $u_n(1) = 0$ granica punktowa nadal wynosi zero, całki wynoszą 1, czyli $\lim \int_0^1 u_n(x)\,dx \neq \int_0^1 \lim u_n(x)\,dx$. Również ciąg x^n, choć składa się z funkcji ciągłych, ma granicę punktową nieciągłą. Następujące dwa twierdzenia wyjaśniają, jak ważną rolę odgrywa (trudniejsza do badania od punktowej) -zbieżność jednostajna.

Twierdzenie Granica jednostajna ciągu funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.

Faktycznie, gdy $f_n \rightrightarrows f$, to stosując nierówność trójkąta dwukrotnie, mamy

$$|f(x+h) - f(x)| \leqslant |f(x+h) - f_n(x+h)| + |f_n(x+h) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)|,$$

gdzie pierwszy i ostatni składnik są małe ($< \frac{\epsilon}{3}$) dla dostatecznie dużych n ze zbieżności jednostajnej, drugi jest $< \frac{\epsilon}{3}$ z ciągłości f_n dla $|h|$ dostatecznie małych.

Twierdzenie O PRZECHODZENIU DO GRANICY POD ZNAKIEM CAŁKI. Jeśli $f_n \rightrightarrows f$ na przedziale $[a,b]$, to

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx. \tag{6}$$

To twierdzenie wynika z faktu, iż różnica całek, to całka różnicy, zaś

$$|\int_a^b (f_n(x) - f(x))\,dx| \leqslant \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \leqslant \|f_n - f\|_{[a,b]} \cdot (b-a).$$

Dalsze przykłady:

Jak już wspominałem, nie da się wyrazić funkcji pierwotnej dla e^{-t^2} poprzez funkcje elementarne. Jednak całkę po danym przedziale $[0,x]$ możemy dla tej funkcji przybliżać z zadowalającą dokładnością, licząc całki jej n-tych wielomianów Taylora:

$$\int_0^x e^{-t^2}\,dt = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_0^x \frac{(-t^2)^k}{k!}\,dt.$$

Tę wartość pomnożoną przez "czynnik normujący" $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$ oznaczamy $\mathrm{erf}(x)$ i nazywamy funkcją błędu ("error function"). Ma ona ważne zastosowania w statystyce. W szczególności,

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!}$$

Granicą ciągu $f_n(x) = \frac{2}{1+(nx-1)^2}$ jest funkcja nieciągła, równa zero we wszystkich punktach osi $\mathbb{R}$ z wyjątkiem punktu 0, gdzie wartość wynosi 1.

Nie oznacza to, że zbieżność zawsze musi być jednostajna w przypadku, gdy granica punktowa danego ciągu funkcji ciągłych jest ciągła (tak jest tylko w szczególnych przypadkach -np. dla ciągów monotonicznych, o ile Ω jest zbiorem domknietym i ograniczonym w $\mathbb{R}^n$.)

Na przykład, ciąg $f_n(x) := (n+1)x^n(1-x)$ zmierza do funkcji stałej równej 0 na odcinku [0,1]. Ale $\|f_n\|_{[0,1]} = (\frac{n}{n+1})^n \to e^{-1}$, więc zbieżność nie jest jednostajna. Faktycznie, $f'(x) = n(n+1)x^{n-1} - (n+1)^2x^n = (n+1)x^{n-1}(n-(n+1)x) = 0$ dla $x = 0$ lub $x = \frac{n}{n+1}$ (punkt maksimum), więc $\|f_n\|_{[0,1]} = f_n(\frac{n}{n+1})$.

Funkcja ciągła może być granicą ciągu funkcji nieciągłych w żadnym punkcie (np. gdy $f_n = \frac{1}{n}$ dla $n \in \mathbb{Q}$ oraz $f_n = 0$ dla $n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, to $f_n \rightrightarrows 0$).

Ciąg $f_n(x) := \frac{1}{n}\sin(nx)$ jest jednostajnie zbieżny do 0 (do funkcji stałej równej zero) na osi liczbowej $\mathbb{R}$, bo $\|f_n\|_{\mathbb{R}} = \frac{1}{n} \to 0$. Natomiast ciąg pochodnych: $f_n'(x) = \cos(nx)$, choć ograniczony, nie zmierza jednostajnie do zera.

Korzystając z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej można wykazać, że gdy ciąg pochodnych $g_n'(x)$ jest jednostajnie ograniczony, to ze zbieżności ciągu $g_n(t)$ dla punktów t tworzących jakiś podzbiór gęsty w zbiorze D (np. punktów wymiernych) wynika już zbieżność na całym zbiorze D i to jednostajna.

Dla nas podstawowe znaczenie ma jednak następujące twierdzenie (które można stosować na dowolnym zbiorze D):

Twierdzenie Ciąg funkcji $f_n : D \to \mathbb{C}$ jest zbieżny jednostajnie wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia on następujący "jednostajny warunek Cauchy'ego"

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_M\forall_{n,k>M}\forall_{x\in D}|f_n(x) - f_k(x)| < \epsilon \tag{7}$$

.

Zauważmy, że ten warunek (7) jest równoważny postulatowi, by norma różnicy: $\|f_n - f_k\|_D$ była dowolnie mała dla n, k dostatecznie dużych. Jednostajny marunek Cauchy'ego zapisuje się więc często w wygodnym formacie:

$$\|f_n - f_k\|_D \to 0 \quad \texttt{przy} \quad n, k \to \infty$$

i jest to warunek Cauchy'ego dla normy "supremowej po zbiorze D". Ostatnie twierdzenie jest więc dokładnie stwierdzeniem zupełności przestrzeni funkcji ograniczonych na zbiorze D. Dla przyszłych zastosowań rozpatrujemy tu, zamiast wartości rzeczywistych -nieco ogólniejsze funkcje o wartościach zespolonych. Łatwo sprawdzić, że gdy rozdzielimy ciąg funkcyjny na części: rzeczywistą i urojoną, pisząc np. $f_n(x) = \alpha_n(x) + i\beta_n(x)$, to zbieżność jednostajna $f_n \rightrightarrows f$ będzie równoważna koniunkcji dwu zbieżności jednostajnych: $\alpha_n \rightrightarrows \alpha$ oraz $\beta_n \rightrightarrows \beta$. Warunek Cauchy'ego jest podstawowym narzędziem przy badaniu zbieżności jednostajnej szeregów (por. M-test Weierstrassa w następnym wykładzie).