# 7 Granice podwójne, funkcje ciągłe wielu zmiennych

Przechodzimy do rachunku różniczkowego wielu zmiennych, gdzie badane funkcje będą miały dziedziny zawarte w $\mathbb{R}^d$ (najczęciej wymiarem będzie $d = 2$ lub $d = 3$). Przypomnijmy, że w tej przesrzeni wektorowej za kanoniczną bazę będziemy uznawali układ $d$ wektorów "zero-jedynkowych" $\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_d}$, gdzie np. $\vec{e_1} = (1, 0, 0, \ldots, 0)$ ), unormowaną przez normę euklidesową. Dla wektora $\vec{w} \in \mathbb{R}^d$ zapisanego przez podanie współrzędnych $w_j = \vec{w} \cdot \vec{e_j}$ (czyli jego rzutów na $j$-tą oś układu kartezjańsiego) określamy jego "długość", czyli normę euklidesową $\|\vec{w}\|_2$, (dla uproszczenia oznaczaną dalej: $\|\vec{w}\|$) jako liczbę

$$\|\vec{w}\| := \sqrt{w_1^2 + w_2^2 + \cdots + w_d^2}.$$

Punkty przestrzeni traktujemy jako wektory zaczepione w zerze, więc np. dla punktów $\vec{w} = (w_1, \ldots, w_d), \vec{v} = (v_1, \ldots, v_d)$ odległość euklidesowa, to długość wektora $\vec{w} - \vec{v} = (w_1 - v_1, \ldots, w_d - v_d)$ określona przez powyższą normę. Iloczyn skalarny tych wektorów określony jest wzorem

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \cdots + v_d w_d$$

i spełnia on nierówność Schwarza:

$$|\vec{v} \cdot \vec{w}| \leqslant \|v\| \|w\|.$$

Norma wektora $\vec{w}$, to pierwiastek kwadratowy z iloczynu skalarnego $\vec{w} \cdot \vec{w}$.

Dla dalszego uproszczenia, zamiast $\vec{w}$ będziemy pisali $\mathbf{w}$. Dla wyobrażenia sobie większości potrzebnych w tym kursie pojęć geometrycznych wystarczy rozważać przypadek dwuwymiarowy. Współrzędne wektora $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ zamiast $(w_1, w_2)$ –zazwyczaj oznaczamy przez $(x, y)$. Wtedy $\|\mathbf{w}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$, znacznie wygodniej będzie opisywać zbieżność ciągu wektorów: $\mathbf{w}_n = (x_n, y_n)$, gdzie nie musimy teraz używać podwójnych wskaźników. Według ogólnej definicji zbieżności w przestrzeni unormowanej,

$$\mathbf{w} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{w}_n, \quad \texttt{gdy} \quad \|\mathbf{w} - \mathbf{w}_n\| \to 0.$$

Jak łatwo zauważyć, zbieżność wektorów jest równoważna "zbieżności po współrzędnych" -czyli np. w $\mathbb{R}^2$ (na płaszczyźnie euklidesowej) $\mathbf{w}_n \to \mathbf{w}$ wtedy i tylko wtedy, gdy równocześnie $x_n \to x$ oraz $y_n \to y$. Wydawać by się mogło, że (może z wyjątkiem faktu nieistnienia dla wektorów żadnej "sensownej pod względem opisu zbieżności" relacji porządku) jest tak łatwo, jak w przypadku jednowymiarowym. Bo zamieniając moduł na symbol normy -mamy sporo analogii. Na przykład,

**Definicja.** Zbiór $A \subset \mathbb{R}^d$ jest otoczeniem punktu $\mathbf{w}$, gdy istnieje liczba rzeczywista $\delta > 0$ taka, że gdy $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$ oraz $\|\mathbf{w} - \mathbf{v}\| < \delta$, to również $\mathbf{v} \in A$. ("Zbiór $A$ zawiera wraz z $\mathbf{w}$ również punkty dostatecznie jemu bliskie.")

Sąsiedztwo punktu, to otoczenie pomniejszone o ten punkt (tu zbiór postaci $A \setminus \{\mathbf{w}\}$). Używa się oznaczenia $S(\mathbf{w}, \delta)$ dla sąsiedztwa $\{\mathbf{v} : 0 < \|\mathbf{w} - \mathbf{v}\| < \delta\}$.

Zbiór $U \subset \mathbb{R}^d$ jest otwarty, gdy jest on otoczeniem każdego ze swych punktów.

Zbiór $F \subset \mathbb{R}^d$ jest domknięty, gdy jego dopełnienie, czyli zbiór $\mathbb{R}^d \setminus F$ jest otwarte.

Domknięcie $\overline{A}$ zbioru $A$, to najmniejszy domknięty nadzbiór zbioru $A$.

$\mathbf{v}$ jest punktem skupienia zbioru $A$, gdy każde sąsiedztwo tego punktu ma niepuste przecięcie z $A$.

Mamy następujące, nietrudne do sprawdzenia obserwacje:

1. Gdy $V$ jest otoczeniem punktu, do którego zmierza pewien ciąg wektorów $\mathbf{w}_n$, to dla prawie wszystkich $n$ jest $\mathbf{w}_n \in V$

2. Zbiór $A$ jest domknięty wtedy i tylko wtedy, gdy $\overline{A} = A$

3. $\mathbf{w} \in \overline{A} \Leftrightarrow \exists_{\mathbf{w}_n \in A}\ \mathbf{w} = \lim \mathbf{w}_n$.

4. $\mathbf{v}$ jest punktem skupienia $A \Leftrightarrow \mathbf{v} \in \overline{A \setminus \{\mathbf{v}\}}$.

Również pojęcia granicy i ciągłości mają analogiczną (jak w $\mathbb{R}$) postać:

**Definicja.** Zakładamy, że $\mathbf{F} : D \to \mathbb{R}^k$, oraz $\mathbf{w}$ jest punktem skupienia zbioru $D$. Wówczas wektor $\mathbf{g}$ jest granicą odwzorowania $\mathbf{F}$ w punkcie $\mathbf{w}$, co zapisujemy:

$$\lim_{\mathbf{v}\to\mathbf{w}} \mathbf{F}(\mathbf{v}) = \mathbf{g}, \quad \texttt{lub:} \quad \mathbf{F}(\mathbf{v}) \to \mathbf{g} \quad \texttt{przy} \quad \mathbf{v} \to \mathbf{w},$$

gdy w każdym (dowolnie zadanym) otoczeniu $\Omega$ punktu $\mathbf{g}$ zawiera się obraz pewnego sąsiedztwa $W$ punktu $\mathbf{w}$, czyli $\mathbf{F}(W) \subset \Omega$. Jeśli rozmiar otoczenia $\Omega$ podany jest przez $\epsilon$, zaś "promieniem sąsiedztwa" jest $\delta$, to otrzymujemy znaną postać definicji Cauchy'ego:

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{\mathbf{v}\in D}\,(0 < \|\mathbf{w}-\mathbf{v}\| < \delta) \Rightarrow \|\mathbf{F}(\mathbf{v}) - \mathbf{g}\| < \epsilon.$$

Mówimy, że powyższe odwzorowanie jest ciągłe w punkcie $\mathbf{w} \in D$ gdy albo $\mathbf{w}$ nie jest punktem skupienia zbioru $D$, albo $\lim_{\mathbf{v}\to\mathbf{w}} \mathbf{F}(\mathbf{v}) = \mathbf{F}(\mathbf{w})$.

Naśladując odpowiednie rozumowania z $\mathbb{R}$ otrzymujemy następujące własności granic:

**Twierdzenie.**

1. Granica, jeśli istnieje, jest wyznaczona jednoznacznie.

2. Granica sumy dwu odwzorowań jest sumą granic. Jeśli dla $D \subset \mathbb{R}^d$ funkcja $\varphi : D \to \mathbb{R}$ oraz odwzrowanie $F : D \to \mathbb{R}^d$ mają granice w punkcie $\mathbf{w}$, to ich iloczyn ma granicę będącą iloczynem granic.

3. Definicja granicy jest równoważna "warunkowi ciągowemu" Heinego: $(\mathbf{w}_n \to \mathbf{w}, \mathbf{w}_n \in D \setminus \{\mathbf{w}\}) \Rightarrow \mathbf{F}(\mathbf{w}_n) \to \mathbf{g}$

4. Gdy $\mathbf{F} = (f_1, \ldots, f_k) : D \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k, \mathbf{g} = (g_1, \ldots g_k) \in \mathbb{R}^k$, to

$$\lim_{\mathbf{v}\to\mathbf{w}} \mathbf{F}(\mathbf{v}) = \mathbf{g} \Leftrightarrow (\forall_{j\in\{1,2,\ldots,k\}}\, g_j = \lim f_j(\mathbf{v}) \quad \texttt{przy} \quad \mathbf{v} \to \mathbf{w})$$

5. Suma, złożenie odwzorowań ciągłych -są również ciągłe

W szczególności, dzięki tezie 4., granice, ciągłość odwzorowania o wartościach w $\mathbb{R}^k$ (czyli zestawienia $\mathbf{F} = (f_1, \ldots, f_k)$ funkcji o wartościach skalarnych wystarczy zbadać oddzielnie dla każdej ze składowych (czyli dla wszystkich $f_j, j = 1, \ldots, k$). Ma to oczywisty związek ze "zbieżnością po współrzędnych". Z drugiej strony, mamy (np. dla $d = 2$) warunek Heinego i przy badaniu granicy w punkcie $(x_0, y_0)$ funkcji $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ rozpatrujemy ciągi punktów $(x_n, y_n) \in D$ zbieżne do $(x_0, y_0)$. To może i pojęcie granicy podwójnej da się "rozłożyć na współrzędne"? -NIESTETY, NIE!

**Przykład.** Jeśli $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ dla $(x,y) \neq (0,0)$ oraz $f(0,0) = 0$, to $\forall_y$ funkcja $\mathbb{R} \ni x \to f(x,y)$ (w zapisie bezargumentowym oznaczamy ją $f(\cdot, y)$)oraz $\forall_x$ funkcja $f(x, \cdot)$ -są ciągłe, zmierzają do zera w zerze. Tak więc, istnieje tzw. granica iterowana (od włoskiego *iterare* = powtarzać):

$$\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y)) = 0.$$

Ale dla zbieżnego do zera ciągu $\mathbf{w}_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ mamy $f(\mathbf{w}_n) = \frac{1}{2} \not\to 0$.

Wykres $f$ z tego przykładu możemy sobie wyobrazić jako pewną powierzchnię zakrzywioną w $\mathbb{R}^3$. Na osiach OX,OY jest ona równa zero, na każdej prostej przechodzącej przez punkt $(0,0)$ (z jego wyjątkiem) jest stała (np.$-\frac{1}{2} \leqslant f(x,ax) = \frac{a}{1+a^2} \leqslant \frac{1}{2}$), wartości ekstremum mamy gdy $a = \pm 1$. W punkcie (0,0) wykres jest "rozerwany"- zachowuje się trochę tak, jak powierzchnia schodów kręconych w pobliżu ich osi - ma przyrosty bliskie 1 dla dowolnie małych przyrostów argumentu. We współrzędnych biegunowych $(x,y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ jej wartość wyraża się jako funkcja $\cos\varphi\sin\varphi$, niezależąca od $r$. Można powiedzieć, że jest to funkcja jednorodna stopnia 0, gdzie jednorodność stopnia $p$ oznacza, że $f(r\mathbf{w}) = r^p f(\mathbf{w})$. Takie funkcje, o ile nie są stałe (a są stałe na prostych przechodzących przez $\vec{0}$ z wyjętym tym początkiem układu), nie mogą mieć granicy w zerze! W większości zadań o granicach podwójnych występuje tego typu problem -ale czasami dopiero podstawienie (np. typu $z = y^2$) sprowadzi $f$ do postaci jednorodnej. Przykładem jest $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$ -stała na parabolach $y = ax^2$. Ta funkcja nie ma granicy w zerze, choć na każdej prostej przechodzącej przez początek układu -zmierza do zera (proszę sprawdzić!)

**Mamy więc istotny problem.** Liczenie granic metodą ustalania zmiennych, (czyli *granic iterowanych w punkcie* $(x_0, y_0)$ ) jak widzimy, nie prowadzi do celu, ale przyjrzyjmy się mu dokładniej. Przypuśćmy, że dla $x$ z pewnego otoczenia $x_0$, ale $x \neq x_0$ istnieje $\lim_{y\to y_0} f(x,y) = \alpha(x)$. Podobnie, dla $y \neq y_0$, $y$ dostatecznie bliskich $y_0$ załóżmy, że istnieje $\beta(y) := \lim_{x\to x_0} f(x,y)$. Wówczas mamy dwie funkcje $\alpha, \beta$, które możemy nazwać granicami częściowymi. Jeśli istnieją granice: $A = \lim_{x\to x_0} \alpha(x)$ oraz $B = \lim_{y\to y_0} \beta(y)$, to nazywamy je *granicami iterowanymi funkcji* $f$ w punkcie $(x_0, y_0)$.

Niestety, z istnienia i równości granic iterowanych nie wynika istnienie granicy podwójnej -czyli, według naszej definicji, granicy

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y).$$

Dla funkcji z poprzedniego przykładu mamy $A = B = 0$, lecz jak wiemy, granica nie istnieje. Na odwrót, z istnienia granicy (podwójnej) nie wynika istnienie granic iterowanych, a nawet granic częściowych. Tu przykładem może być $f(x,y) = x\sin\frac{1}{y}$ dla $y \neq 0$ oraz $f = 0$ na osi $0X$ (tzn. dla $y = 0$). Granica przy $(x,y) \to (0,0)$ istnieje i równa jest zero, ale dla $x \neq 0$ powyższa $\alpha(x)$ nie istnieje.

**Twierdzenie.**(O granicy podwójnej) *Gdy istnieje granica podwójna oraz granice częściowe, to istnieją w danym punkcie obydwie granice iterowane i są one równe ($A = B$).*

## 7.1 Badanie granic podwójnch

Ponieważ pojęcie granicy podwójnej będzie kluczowe dla badania różniczkowalności, prześledźmy na przykładach metodę badania, czy takie granice istnieją. Ponieważ $(x,y) \to (x_0,y_0)$ dokładnie wtedy, gdy $(x - x_0, y - y_0) \to (0,0)$, czyli gdy równocześnie $x - x_0 \to 0$ oraz $y - y_0 \to 0$, ograniczymy się do badania granic w zerze ($\mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$ jest początkiem układu współrzędnych).

**Przykład 1** $f(x,y) = \frac{\sqrt[3]{x}\sin(xy^2)\sqrt[4]{(y^2)}}{x^2+y^4}$ dla $(x,y) \neq (0,0)$. Czy trudno jest wykazać, że $f$ zmierza do zera przy $(x,y) \to \mathbf{0}$? -zależy (od metody). Spróbujmy metody oszacowań: Niech $M$ oznacza mianownik. ($M = M(x,y)$ zmierza do zera, podobnie jak licznik.) Szacujemy: $|x| \leqslant M^{\frac{1}{2}}, |y| \leqslant M^{\frac{1}{4}}$. Możemy to wykorzystać do oszacowania licznika przez $M^r$. Jeśli uda się takie oszacowanie dla pewnego $r > 1$, to $|f(x,y)| \leqslant M^{r-1}$, co zmierza do zera przy $M \to 0$ (a tak jest gdy $(x,y) \to \mathbf{0}$), bo $r - 1 > 0$. Licznik jest tu iloczynem, jeśli każdy z czynników oszacujemy z osobna przez pewne potęgi $M$, to $r$ otrzymamy sumując wykładniki. Np. $|\sqrt[3]{x}| \leqslant M^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = M^{\frac{1}{6}}$. Natomiast $|\sin t| \leqslant |t|$ dla $t = xy^2$ daje $|\sin(xy^2)| \leqslant M^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot 2} = M$. Na koniec - jeszcze $y^2 \leqslant M^{\frac{1}{2}}$. Otrzymamy $r = \frac{1}{6} + 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{3} > 1$, więc szukaną granicą jest zero.

Trochę gorzej jest w przypadku ułamków o mianowniku zmiennego znaku (np. $x - y^3$). W takich przypadkach należy szukać raczej ciągów, dla których mianownik szybciej zmierza do zera niż licznik, wówczas granicy (skończonej) nie będzie. (Czynnik zmierzający do zera może czasami się uprościć np. dzięki wzorom skróconego mnożenia.) Nie będziemy się jednak tego typu granicami zajmowali, bo do badania różniczkowalności na ogół wystarcza granica o mianowniku typu $(x^2 + y^2)^s$ dla $s > 0$.

**Przykład 2** $g(x, y) = \frac{x(1-\cos y)}{x^2+y^4}$. Ponieważ $g(0, y) = 0 = g(x, 0)$, granice iterowane istnieją i są równe zero. Aby wykazać nieistnienie granicy, wystarczy znaleźć ciąg $(s_n, t_n) \to (\mathbf{0})$, dla którego $g(s_n, t_n)$ nie zmierza do zera. Trzeba pamiętać, że $1 - \cos y = \cos 0 - \cos y = -2 \sin \frac{0+y}{2} \sin \frac{0-y}{2} = 2 \sin^2 \frac{y}{2}$, więc $\lim_{y\to 0} \frac{y^2}{1-\cos y} = 2$, co pozwoli na pozbycie się funkcji trygonometrycznej. Dla $g_1(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ znajdziemy odpowiednie $s_n, t_n$. Podstawienie $s_n = t_n = \frac{1}{n}$ nie będzie skuteczne. Ale dla $s_n = \frac{1}{n^2}$, $t_n = \frac{1}{n}$ mamy $g_1(t_n^2, t_n) = \frac{1}{2}$. Więc granica nie istnieje! Ale jak można do tego dojść?

(1) Bardziej skomplikowane funkcje zamieniamy na asymptotycznie równoważne wielomiany. (np. dla $\phi(x)$ szukamy takiego $k \in \mathbb{N}$, aby $\lim_{x\to 0} \frac{\phi(x)}{x^k} = C$, gdzie $0 < C < +\infty$. Jeśli $\phi$ jest jednym z czynników licznika funkcji $g(x, y)$, funkcję $g$ możemy pomnożyć przez iloraz $\frac{x^k}{\phi(x)}$, otrzymując prostszą w badaniu funkcję $g_1$, w której na miejscu $\phi$ występuje już $x^k$ (na koniec stosując twierdzenie o granicy iloczynu).

(2) Przypuśćmy, że doprowadzimy do postaci, w której licznik i mianownik są wielomianami, lub iloczynami pewnych potęg, sumami takich iloczynów. Jeśli $M(tx, ty) = t^s M(x, y)$ dla dowolnych $t, x, y \in \mathbb{R}$, to -jak już wspomniałem, $M$ jest funkcją jednorodną stopnia $s$. Czasami -jak w naszym ostatnim przykładzie, funkcja nie będzie jednorodna, lecz po podstawieniu nowej zmiennej ($x^a = X$,lub $Y := y^b$) stanie się jednorodną funkcją zmiennych $X, Y$.

Jeśli po takim „ujednorodnieniu" otrzymamy w liczniku funkcję postaci $X^k Y^l$, gdzie $k + l > s$, granica równa zero wyniknie z oszacowań jak w przykładzie 1, o ile składniki mianownika są nieujemne (w parzystych potęgach). Jeśli natomiast $k + l = s$, to licznik $L(x, y)$ i mianownik $M(x, y)$ mają jednakowy stopień jednorodności, zaś ich iloraz będzie stały na prostych przechodzących przez początek układu. Są to proste o równaniach $Ax + By = 0$, np. $y = cx$. Ciągi $(\frac{1}{n}, c\frac{1}{n})$ zmierzają do zera, więc $g(\frac{1}{n}, c\frac{1}{n})$ zmierza do granicy funkcji w punkcie $\mathbf{0}$, o ile taka istnieje. Ale $(\frac{1}{n})^s$ wyłączamy zarówno w liczniku, jak i w mianowniku, co się redukuje. Stąd wartości $g$ na tych ciągach są stałe, równe $g(1, c)$. Jeśli granica w zerze istnieje, musi też być taka sama (równa $g(1, c)$). Funkcja jest stała na prostych przechodzących przez $\mathbf{0}$, ta wartość jest równa granicy w zerze, więc taka sama na każdej z tych prostych- w konsekwencji sama funkcja musi być stała. W przeciwnym razie- granica nie istnieje. Szukanie "kierunku podejścia do $\mathbf{0}$ podyktowane jest więc procesem "ujednorodnienia mianownika".

(3) Czasami funkcja zależy jedynie od pewnego wielomianu zmiennych $x, y$, pojawiającego się w jej różnych miejscach- jest to podstawienie do funkcji zmiennej takiego typu pozwoli znaleźć granicę metodami granicy funkcji złożonej.

Do granic podwójnych możemy stosować twierdzenia znane z teorii granic zwykłych, dzięki równoważności definicji z warunkiem HEINEGO. Na przykład, granica sumy jest sumą granic, nierówności słabe zachowują się przy przejściu do granic. Ostre nierówności między granicami utrzymują się w pewnym sąsiedztwie punktu.