Analiza mat. na kierunku "Elektrotechnika" II sem. wykład "zdalny" 8. (28.IV 2021)

# 8 Pochodne cząstkowe, różniczki zupełne

Granicami podwójnymi zajęliśmy się głównie z powodu ich związku z różniczkowalnością. Zacznijmy jednak od pojęcia wykorzystującego metody jednej zmiennej- od pochodnych cząstkowych

## 8.1 Pochodne cząstkowe

Dla funkcji $f$ wielu zmiennych możemy ustalać wartość wszystkich zmiennych z wyjątkiem jednej, np. $x_j$ -otrzymując funkcję jednej zmiennej. Jej pochodna będzie oznaczana $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ lub $f'_{x_j}$ i nazywana pochodną cząstkową $f$ względem tej zmienej. Przyjrzyjmy się sytuacji **dla dwu zmiennych,** czyli dla $f(x,y)$. Niech $P_0 = (x_0, y_0)$ będzie punktem, w którym liczymy pochodne cząstkowe. Jeśli $f$ jest określona w otoczeniu $D$ punktu $P_0$, to istnieje $\delta > 0$ taka, że gdy $|x - x_0| < \delta$, to $(x, y_0) \in D$. Definiujemy pochodną cząstkową względem zmiennej $x$ -jeśli tylko istnieje- jako

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0}. \tag{1}$$

Innymi słowy, jest to pochodna funkcji $f(\cdot, y_0)$ w punkcie $x_0$, czyli $\frac{d}{dx} f(x,y_0)|_{x=x_0}$ -choć nie zawsze ten zapis jest wygodny. Czasami wygodniejszy bywa zapis

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)|_{(x,y)=(x_0,y_0)} \quad \text{lub} \quad \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)|_{(x_0,y_0)}.$$

Bardziej skrótowa wersja, to oznaczenie $f'_x(x_0,y_0)$, lub nawet $f_x(x_0,y_0)$ zastępujące symbol $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$. Analogicznie definiujemy pochodne względem drugiej zmiennej, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \frac{d}{dy} f(x_0,y)|_{y=y_0}$ Mamy jednak dość jasną sytuację dzięki regułom liczenia pochodnych funkcji jednej zmiennej.

Dotychczas pisaliśmy $x_0, y_0$ -by oznaczyć w sposób szczególny te ustalone wartości, ale równie dobrze możemy nie używać dolnego indeksu -tak będzie w następnych przykładach, czy w zadaniach. Na **przykład**, dla

$$F(x,y) = x^4 + x^3y + xy^2 + 6y + 132$$

mamy $\frac{\partial}{\partial x} F(x,y) = 4x^3 + 3x^2y + y^2$, zaś $\frac{\partial}{\partial y} F(x,y) = x^3 + 2xy + 6$.

Podobnie, $\frac{\partial}{\partial y}(a \cdot f(x,y) + b \cdot g(x,y)) = a \cdot \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) + b \cdot \frac{\partial}{\partial y} g(x,y)$,
$\frac{\partial}{\partial y}(f(x,y) \cdot g(x,y)) = (\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)) \cdot g(x,y) + f(x,y) \cdot \frac{\partial}{\partial y} g(x,y)$.
Z kolei, $\frac{\partial}{\partial x}(x^y) = yx^{y-1}$, $\frac{\partial}{\partial y}(x^y) = x^y \ln x$.

## 8.2 Przyrosty zmiennych i przyrosty wartości funkcji

**Przyrostem funkcji** (lub przyrostem wartości funkcji) $f : D \to \mathbb{R}$ między punktami $P, Q \in D$ nazwiemy różnicę wartości $f$ w tych punktach, czyli **liczbę**

$$\Delta f := f(P) - f(Q).$$

Gdy punkty $P, Q$ różnią się tylko jedną ze współrzędnych (np. $x$), to mówimy o przyroście $f$ ze względu na tę zmienną, lub o przyroście częściowym. Możemy przyrost $f$ ze względu na zmienną $x$ oznaczyć $\Delta_x f$. Zapis ten nie jest precyzyjny, (nie zawiera informacji o punktach $P, Q$), ale jest dość sugestywny. Dla uproszczenia rozpatrujmy tu funkcje dwu zmiennych: $(x,y)$. Na przykład, $\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x}$. W mianowniku mamy tu również przyrost funkcji: $\Delta x$ możemy traktować jednak albo: jako przyrost funkcji $x$, gdzie $x(s,t) = s$ oznacza funkcję rzutu na oś OX, albo również- jako przyrost zmiennej niezależnej $x$. W tym przypadku $P = Q + (\Delta x, 0)$ -w zapisie wektorowym w $\mathbb{R}^2$.

W przeciwnym (a raczej - w ogólnym) przypadku mówimy o przyroście całkowitym, gdzie $P = Q + (\Delta x, \Delta y)$. Podobnie,jak dla jednej zmiennej, słowo „przyrost” ma znaczenie formalne- może być zarówno $\Delta_x < 0$, jak i $\Delta_x \geqslant 0$.

Prostym, lecz bardzo ważnym narzędziem jest możliwość wyrażenia przyrostu całkowitego $\Delta f$ funkcji $f$ jako sumy przyrostów względem poszczególnych (tu 2) zmiennych:

$$f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0) = (f(x_1, y_1) - f(x_0, y_1)) + (f(x_0, y_1) - f(x_0, y_0)),$$

co nieformalnie możemy zapisać w postaci

$$\Delta f = \Delta_x f + \Delta_y f.$$

(Dla funkcji $n$ zmiennych $\Delta f$ jest sumą $\sum_{j=1}^{n} \Delta_{x_j} f$.)

Stosując do funkcji $f(x_0, \cdot)$ zależnej od 1 zmiennej $y$ twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej, otrzymujemy na przykład następujący

**Lemat o przyrostach** *Gdy dla ustalonej wartości $x_0$ funkcja $f$ ma pochodne cząstkowe $\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y)$ dla wszystkich $y \in [y_0, y_1]$, to istnieje $y_\beta \in (y_0, y_1)$ -taki punkt pośredni między $y_0$ oraz $y_1$, że*

$$f(x_0, y_1) = f(x_0, y_0) + (y_1 - y_0)\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_\beta),$$

czyli

$$\Delta_y f = (\Delta y) \cdot \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_\beta).$$

*Podobnie, przyrost całkowity wyrazi się wzorem (2), który podajemy poniżej*

Punkt pośredni wygodnie będzie zapisywać w postaci

$$y_\beta = y_0 + \beta(y_1 - y_0) = y_0 + \beta\Delta y, \qquad \text{gdzie} \quad \beta \text{ jest pewnym punktem z odcinka } (0, 1).$$

Na przykład, $y_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(y_1 + y_0)$ jest punktem na środku odcinka łączącego $y_0, y_1$. Zaletą tego zapisu jest możliwość jego stosowania niezależnie od tego, czy $y_0 < y_1$, czy też $y_1 < y_0$. (Będziemy go też stosować w przyszłości do opisu punktów $P_\alpha$ z odcinka o końcach $P_0, P_1 \in \mathbb{R}^d$ parametrem $\alpha \in [0, 1]$.

Jeśli założymy istnienie obydwu pochodnych cząstkowych (tu oznaczanych jako $f'_x$, $f'_y$ w większym zbiorze, to otrzymamy następujące uogólnienie tego lematu wynikające z rozpisania „przyrostu całkowitego” funkcji $f$ w postaci sumy przyrostów względem poszczególnych zmiennych i z zastosowania naszego lematu do każdego ze składników. Przyrost całkowity, $\Delta f := f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0)$ jest dany wzorem

$$\Delta f = (x_1 - x_0) f'_x(x_0 + \alpha(x_1 - x_0), y_1) + (y_1 - y_0) f'_y(x_0, y_0 + \beta(y_1 - y_0)) \quad (2)$$

dla pewnych $\alpha, \beta \in (0, 1)$. Ze wzoru tego wkrótce skorzystamy.

## 8.3 Dwa przykłady negatywne

Niestety, metoda ustalania zmiennych (i rozkładu przyrostów) nie jest do końca skuteczna -będziemy musieli zbadać, w jakich sytuacjach możemy ją stosować. Gdyby bowiem przyjąć, że "*różniczkowalność oznacza jedynie istnienie wszystkich pochodnych cząstkowych w każdym punkcie*", to okaże się, że złożenie takich funkcji nie musi być różniczkowalne, a nawet ciągłe! Oto przykład:

Niech $h(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ gdy $x \neq 0$ lub $y \neq 0$. Jeśli określimy $h(0, 0) = 0$, to otrzymamy funkcję na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$, która jest ciągła względem każdej ze zmiennych z osobna oraz ma pochodne cząstkowe w każdym punkcie. W punkcie $(0, 0)$ pochodnych cząstkowych nie liczymy ze wzoru na pochodną ilorazu (tak możemy postąpić w innych punktach), lecz z definicji. Ponieważ $\forall_{x,y}\, h(0, y) = 0 = h(x, 0)$, bez problemu zauważamy, że $h'_x(0, 0) = h'_y(0, 0) = 0$.

Jeśli teraz $x, y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ są funkcjami różniczkowalnymi jednej zmiennej $t$, to rozważmy funkcję złożoną: $g(t) = h(x(t), y(t))$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Można się spodziewać, że złożenie funkcji "różniczkowalnych" w proponowanym powyżej sensie - będzie, jak w przypadku jednej zmiennej, funkcją różniczkowalną. Ale dla „bardzo porządnych funkcji wewnętrznych" $x(t) = t = y(t)$ nasze złożenie nie będzie nawet funkcją ciągłą! $g(t) = h(t,t) = \frac{1}{2}$ dla $t \neq 0$. natomiast dla $t = 0$ będzie $g(0) = 0$.

Gdyby natomiast w liczniku ułamka zamiast $xy$ umieścić $x^3$, otrzymamy funkcję ciągłą, mającą w każdym punkcie wszystkie pochodne cząstkowe. Tym razem definiujemy $\phi(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$ poza punkem $(0,0)$ i z nierówności $|\phi(x,y)| \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$ wynika, że granica w zerze $\phi$ istnieje i jest równa zero. Teraz $\phi'_x(0,0) = 1, \phi'_y(0,0) = 0$, dla $x(t) = t = y(t)$ pochodna złożenia: $\phi(t,t) = \frac{1}{2}t$ względem $t$, równa $\frac{1}{2}$, nie daje się wyrazić poniżej podanym wzorem (3), który będzie obowiązywał w „przypadku regularnym". To oznacza, że musimy wprowadzić inną definicję różniczkowalności dla funkcji wielu zmiennych. Okaże się, że założenie ciągłości pochodnych cząstkowych funkcji $f$ pozwoli (np. przy użyciu wzoru (2)) na otrzymanie wspomnianego przed chwilą wzoru:

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = f'_x(x(t), y(t))x'(t) + f'_y(x(t), y(t))y'(t). \tag{3}$$

Co więcej, gdy zastosujemy "prawidłową" definicję różniczkowalności $f$ w punkcie $(x(t), y(t))$, nie trzeba będzie zakładać dla zachodzenia wzoru (8): ani ciągłości pochodnych cząstkowych, ani nawet ich istnienia w otoczeniu tego punktu. Dowód nie będzie też wtedy używał wzoru (2).

## 8.4 Różniczkowalność

Przypomnijmy na wstępie, że każde odwzorowanie liniowe $L : \mathbb{R}^3 \ni (x,y,z) \to L(x,y,z) \in \mathbb{R}^k$ jest postaci $L(x,y,z) = Ax + By + Cz$, gdzie $A, B, C \in \mathbb{R}^k$ są pewnymi wektorami- a mianowicie obrazami przez $L$ wektorów z bazy kanonicznej $\vec{i} = (1,0,0), \vec{j} = (0,1,0), \vec{k} = (0,0,1)$. Takie odwzorowania są ciągłe. W przypadku gdy $k = 1$, $A, B, C$ -są to liczby rzeczywiste, zaś wartość $L$ jest iloczynem skalarnym wektorów o współrzędnych $(x,y,z)$ oraz $(A,B,C)$. Zacznijmy od najprostszego przykładu: Dla funkcji dwu zmiennych o wartościach w $\mathbb{R}$, mamy wektor $(A,B)$ wyznaczający takie odwzorowanie $L$. Powiemy wówczas, że wektor przyrostu zmiennej niezależnej (czyli argumentu) ma współrzędne $(h,k)$, zaś ten wektor zmierza do zera, gdy do zera dąży jego euklidesowa norma, czyli gdy $\|(h,k)\| = \sqrt{h^2+k^2} \to 0$.

**Definicja (wariant uproszczony)** Funkcja $f(x,y)$ określona w otoczeniu punktu $P_0 = (x_0, y_0)$ jest w tym punkcie różniczkowalna, gdy istnieją stałe $A, B \in \mathbb{R}$ takie, że

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - Ah - Bk}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

Zapisując ten ułamek jako $\alpha(h,k)$ możemy tę definicję zapisać w równoważnej postaci, gdzie $\Delta f := f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0)$, zaś $\Delta P := (h,k) \in \mathbb{R}^2$:

$f$ jest różniczkowalna w punkcie $P_0$ gdy stnieje odwzorowanie liniowe $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ oraz funkcja $\alpha$ określona w otoczeniu zera taka, że

$$\Delta f := f(P_0+\Delta P) - f(P_0) = L(\Delta P) + \alpha(\Delta P)\|\Delta P\|, \quad \texttt{gdzie} \quad \lim_{\Delta P\to\vec{0}} \alpha(\Delta P) = 0.$$

Wyrażenie postaci $\alpha(\Delta P)\cdot\|\Delta P\|$, w którym $\alpha(\Delta P)$ zmierza do zera nazywamy wyrażeniem typu o-małe od normy wektora $\Delta P$, zapisując je jako $o(\|\Delta P\|)$ przy $\Delta P \to 0$. Różniczkowalność oznacza więc istnienie takiego odwzorowania liniowego $L$, które przybliża przyrost całkowity $f$ z dokładnością do o-małego od normy przyrostu argumentu.

Takie odwzorowanie liniowe $L$ nazywamy różniczką (lub różniczka zupełną) odwzorowania $f$ w punkcie $P_0$ i oznaczamy je symbolem $d_{P_0}f$ Możemy określić teraz, jak wyliczyć współczynniki $A, B$ macierzy tego odwzorowania:

Jeśli weźmiemy tylko przyrosty w kierunku osi OX, czyli gdy $\Delta P = (h, 0)$, to $\|(h, 0\| = |h|$ i warunek różniczkowalności implikuje zmierzanie do zera ułamka

$$\frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0) - Ah}{|h|} = \frac{h}{|h|}\Big(\frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} - A\Big).$$

Ponieważ $h \neq 0$, ułamek $\frac{h}{|h|}$ ma moduł stale równy 1, więc zmierznie do zera całego tego wyrażenia oznacza dokładnie, że $A = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$, czyli $A = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)$. Podobnie, zmierzajac do zera w kierunku $OY$, czyli dla $(h, k) = (0, k), k \to 0$ wnioskujemy, ze musi być $B = \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)$. Wykazaliśmy więc, że z różniczkowalności wynika istnienie pochodnych cząstkowych i różniczka jest iloczynem skalarnym przez gradient, czyli przez wektor pochodnych cząstkowych. Definicję różniczkowalności można teraz bez trudu uogólnić na pprzypadek odwzorowań wielu zmiennych, o wartościach wektorowych w $\mathbb{R}^k$.

**Definicja** Mówimy, że odwzorowanie $F : D \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ jest różniczkowalne w punkcie $\mathbf{x}$, jeżeli jego dziedzina, $D$ jest otoczeniem punktu $\mathbf{x}$ w $\mathbb{R}^d$ oraz istnieje takie odwzorowanie liniowe $L : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$, że

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{\|F(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - F(\mathbf{x}) - L(\mathbf{h})\|}{\|h\|} = 0. \tag{4}$$

Wówczas odwzorowanie $L$ nazywamy różniczką zupełną $F$ w punkcie $\mathbf{x}$, oznaczając $L = d_{\mathbf{x}}F$.

Przyrostowi argumentu o wektor $\mathbf{h}$ odpowiada przyrost wartości $F$ o wektor $\Delta F := F(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - F(\mathbf{x})$. Różniczkowalność oznacza, że ten przyrost można „z dokładnością do $o(\|\mathbf{h}\|)$ przy $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$" przybliżyć przez wartość pewnego liniowego odwzorowania na wektorze $\mathbf{h}$. To sformułowanie oznacza, że pozostała w wyniku tego przybliżenia reszta: $r(\mathbf{h}) := \Delta F - L(\mathbf{h})$ (błąd przybliżenia) podzielona przez $\|\mathbf{h}\|$ nadal zmierza do zera.

Następujace (równoważne) sformułowanie powyższej definicji będzie zwłaszcza przydatne przy badaniu różniczki złożenia:

Odwzorowanie $F$ jest różniczkowalne w punkcie $\mathbf{x}$ należącum do wnętrza dziedziny $D$, jeśli istnieją: takie odwzorowanie liniowe $L : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$, oraz odwzorowanie $\alpha : (\texttt{otoczenie zera w } \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^k$, że

$$F(\mathbf{x}+\mathbf{h}) = F(\mathbf{x}) + L(\mathbf{h}) + \|h\|\alpha(h), \quad \texttt{gdzie} \quad \lim_{h\to 0} \|\alpha(h)\| = 0. \tag{5}$$

Oczywiście, gdy zarówno iloraz, jak i jego mianownik (tu $\|\mathbf{h}\|$) zmierzają do zera, to licznik też musi zmierzać do zera. Ale odwzorowania liniowe na $\mathbb{R}^d$ są zawsze ciągłe, więc $L(\mathbf{h}) \to 0$, co implikuje zmierzanie do zera samego przyrostu: $\Delta F$, gdy $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$ (=ciągłość $F$).

**Wniosek.** *W punktach, w których funkcja jest różniczkowalna, jest ona również ciągła.*

Z wcześniejszych przykłądów widzieliśmy, że istnienie wszystkich pochodnych cząstkowych nie gwarantuje ciągłości, nie gwarantuje też w takim razie różniczkowalności. Tak jest zresztą nawet dla $f$ równej 0 w początku układu i równej $\frac{x^3}{x^2+y^2}$ w pozostałych punktach, chociaż w tym przypadku zarówno istnieją pochodne cząstkowe, jak i $f$ jest ciągła. Proszę sprawdzić, z jakiego powodu nie jest ona różniczkowalna.

**Przykład 1.** Odwzorowanie liniowe $L : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ jest różniczkowalne i w każdym punkcie $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ jego różniczka jest równa $L$. Wynika to z równości $L(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - L(\mathbf{x}) = L(\mathbf{h})$, więc licznik jest tu stale równy zero.