3 Szeregi funkcyjne

3.1 Zbieżność wraz z pochodnymi

Przed przystąpieniem do analizy szeregów funkcyjnych warto poznać jeszcze jedno ważne twierdzenie o zbieżności ciągu f_n' pochodnych w danym ciągu funkcyjnym (f_n). Problem polega na tym, że nawet ze zbieżności jednostajnej ciągu (f_n) funkcji klasy C^∞ na przedziale $[a,b]$ nie wynika ani zbieżność ciągu pochodnych, ani nawet różniczkowalność funkcji $f = \lim f_n$. Jedyne, co byliśmy w stanie wykazać o tej f, to jej ciągłość. Najprostszy przykład, to ciąg $\sqrt{\frac{1}{n}+x^2}$ jednostajnie zbieżny w $[-1,1]$ do $|x|$. Faktycznie, $\sqrt{\frac{1}{n}+x^2}-\sqrt{x^2} = \frac{1/n}{\sqrt{\frac{1}{n}+x^2}+\sqrt{x^2}} \leqslant \sqrt{1/n}$, natomiast granica nie ma pochodnej w zerze. Istnieją nawet funkcje ciągłe niemające pochodnej w żadnym punkcie odcinka, a każda funkcja ciągła jest jednostajną granicą pewnego ciągu wielomianów, co daje jeszcze bardziej skrajny przykład. To, co należy kontrolować, to nie norma supremowa funkcji, tylko jej pochodnej- a wówczas uzyskamy również kontrolę nad normą samej funkcji, o ile znamy jej wartość w przynajmniej jednym punkcie.

Definicja. W przestrzeni $C^1[a,b]$ funkcji $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mających ciągłe pochodne definiujemy normę wzorem

$$\|f\|_{C^1[a,b]} := |f(a)| + \sup\{|f'(t)| : t \in [a,b]\} \quad \texttt{czyli} = |f(a)| + \|f'\|_{[a,b]}. \tag{1}$$

Ciąg (f_n) jest zbieżny do f w tej normie, czyli $\|f_n - f\|_{C^1[a,b]} \to 0$ przy $n\to\infty$, gdy ciąg liczbowy $(f_n(a))$ zmierza do $f(a)$ oraz ciąg pochodnych zmierza jednostajnie do pochodnej z f, czyli $f_n' \rightrightarrows f'$ w $[a,b]$. Sytuację wyjaśnia następujące twierdzenie, które podam bez dowodu (osoby zainteresowane szczegółami mogą go znaleźć w 6. wykładzie dla kierunku *Matematyka* na tej stronie www).

Twierdzenie.(O zbieżności wraz z pochodnymi) Jeśli ciąg pochodnych f_n' funkcji $f_n \in C^1[a,b]$ jest zbieżny jednostajnie w $[a,b]$ do pewnej funkcji g, zaś ciąg $f_n(c)$ jest zbieżny przynajmniej w jednym pumkcie $c \in [a,b]$, to ciąg f_n jest zbieżny jednostajnie do pewnej funkcji $f \in C^1[a,b]$ oraz $f' = g$.

3.2 Szeregi funkcyjne

Definicja. *Szeregiem funkcyjnym (w zbiorze Δ) nazywamy szereg postaci*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) \tag{2}$$

o wyrazach, które są funkcjami $f_n : \Delta \to \mathbb{C}$ (lub $f_n : \Delta \to \mathbb{R}$). W myśl definicji szeregów formalnych, szeregiem funkcyjnym nazywamy ciąg funkcji będących k-tymi sumami częściowymi, czyli ciąg funkcji $S_k(t) = \sum_{n=0}^{k} f_n(t)$.
Zbieżność szeregu do sumy S (która też jest funkcją) oznacza, że

$$S = \lim S_k.$$

Możemy więc mówić o zbieżnościach: punktowej, jednostajnej, lub w normie całkowej $\|\cdot\|_p$. Obszarem zbieżności dla szeregu (2) nazywamy zbiór

$$\{t \in \Delta : \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) \ \texttt{jest zbieżny}\}. \tag{3}$$

W warunku (3) mamy więc do czynienia ze zbieżnością punktową. Na przykład, obszarem zbieżności dla szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ zmiennej zespolonej z (tu $\Delta = \mathbb{C}$) jest otwarte koło o promieniu 1 i środku w punkcie zero w $\mathbb{C}$.

Ponieważ, jak już wiemy, zbieżność jednostajna na danym zbiorze E jest równoważna warunkowi jednostajnemu Cauchy'ego na tym E -który z kolei można opisać używając normy supremowej $\|\cdot\|_E$, dla szeregu (2) ta zbieżność oznacza, że normy $\|S_k - S_m\|_E$ powinny być dowolnie małe dla m, k dostatecznie dużych. Można przy tym przyjąć, że $m < k$, a nawet zastąpić m przez $m-1$, bo $S_k(t) - S_{m-1}(t) = \sum_{n=m}^{k} f_n(t)$, zaś (w zapisie bezargumentowym) $S_k - S_m = \sum_{n=m+1}^{k} f_n$, co jest nieco mniej wygodnym zakresem sumowania. Otrzymujemy więc

Twierdzenie.(Warunek Cauchy'ego dla szeregów) Szereg funkcyjny $\sum f_n(t)$ jest jednostajnie zbieżny na zbiorze E wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_M\forall_{k,m}\forall_{t\in E}\ (M < m < k) \Rightarrow |\sum_{n=m}^{k} f_n(t)| < \epsilon, \tag{4}$$

co skrótowao można zapisać w postaci $\|\sum_{n=m}^{k} f_n\|_E \to 0$ przy $m, k \to \infty$.

Wynika stąd następujące, bardzo często stosowane kryterium zbieżności podane już w połowie XIX w. przez Carla Weierstrassa, znane też pod nazwą "M-test Weierstrassa"

Twierdzenie.(Test majorant Weierstrassa) Jeśli istnieją takie stałe $C_n > 0$, że $\forall_{t\in E}|f_n(t)| \leqslant C_n$ oraz $\sum C_n < +\infty$, to szereg funkcyjny $\sum f_n$ jest jednostajnie zbieżny na zbiorze E.

Uwaga: Dla szeregów liczbowych o wyrazach nieujemnych (i tylko dla nich) można stosować skrótowy zapis typu $\sum C_n < +\infty$ dla oznaczenia ich zbieżności.

Na przykład, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}\log_e(2+\cos(n^2t-7))$ jest jednostajnie zbieżny na zbiorze $\mathbb{R}$, bo $1 \leqslant 2 + \cos(n^2t - 7) \leqslant 3$, na przedziale $[1, 3]$ logarytm jest ograniczony przez $C = \ln 3$, zaś szereg liczbowy $\sum Cne^{-n}$ (liczb stanowiących majoranty) jest zbieżny. Można (przez rozwinięcie w szereg Taylora) nadać sens wartości funkcjom $\cos z, \sin z, \ln z$ dla zmiennych zespolonych: $z \in \mathbb{C}$, ale już nie możemy twierdzić, że $|\cos z| \leqslant 1$, co wykorzystywaliśmy w naszym oszacowaniu gdy $t \in \mathbb{R}$. Wystąpią też istotne problemy z określeniem, w jakiej dziedzinie zespolonej możemy określić logarytm (funkcja wykładnicza nie jest injekcją na swojej dziedzinie: $\mathbb{C}$, jest nawet okresowa o okresie $2\pi i$). Natomiast $|e^z|$ jest równy $e^{\Re z}$, gdzie $\Re z$, to część rzeczywista liczby zespolonej z.

Są szeregi zbieżne jednostajnie (np. na zbiorze $E = \mathbb{R}$), dla których nie da się zastosować M-testu. Na przykład, gdy $f_n(t) = \frac{1}{n+1}$ dla $t \in [n, n+1)$ oraz $f_n(t) = 0$ dla pozostałych $t \in \mathbb{R}$, to $\|f_n\|_{\mathbb{R}} = \frac{1}{n+1}$, zaś $S_k(t)$ jest funkcją schodkową równa zero dla $t > k$, zaś $S(t)$ jest funkcją schodkową z nieskończoną ilością schodów, równą $\frac{1}{n+1}$ gdy $t \in [n, n+1), n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Łatwo sprawdzić, że różnicę $S - S_k$ otrzymamy zastępując w przedziale $[0, k+1)$ wartości S przez zero, pozostawiając dalsze wartości bez zmian, stąd $\|S - S_k\|_{\mathbb{R}} = \frac{1}{k+1} \to 0$ przy $k \to \infty$. Oczywiście, w teście Weierstrassa im mniejsze majoranty C_n weźmiemy, tym większe są szanse na zbieżność szeregu $\sum C_n$. Ale zawsze musi być $C_n \geqslant \|f_n\|_E$. W naszym przypadku każdy szereg majorant będzie rozbieżny! Zaletą M-testu jest to, że nie musimy wyliczać norm $\|f_n\|_E$, co bywa trudne, wystarczy sprytnie te normy oszacować.

Najważniejszy typ szeregu, dla którego działa M-test, to tzw. szereg potęgowy (a jego najważniejszym przykładem jest szereg Taylora):

3.3 Szeregi potęgowe. Obszar zbieżności

Definicja. *Szereg funkcyjny* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ *zmiennej (rzeczywistej, lub zespolonej)* z, *gdzie* $f_n(z) = a_n(z - z_0)^n$ *dla pewnych* $a_n \in \mathbb{C}$, *nazywamy* szeregiem potęgowym o współczynnikach a_n i o środku z_0.

Należy podkreślić, że f_0 jest tu funkcją stałą, równą a_0. Na przykład, dla $z_0 = 0$, gdy $a_n = a$, $a \neq 0$ jest ciągiem stałym, mamy szereg geometryczny $\sum az^n$ o ilorazie z, zbieżny dla $|z| < 1$ (o sumie $\frac{a}{1-z}$) i rozbieżny dla $|z| \geqslant 1$. Obszar zbieżności (czyli takich punktów z, dla których $\sum f_n(z)$ jest zbieżny) jest więc w tym przypadku kołem otwartym o promieniu 1 na płaszczyźnie zespolonej (o środku w z_0).

Jak się okaże, (z dokładnością do pewnych punktów na brzegu), *obszar zbieżności każdego szeregu potęgowego*) - zawsze będzie kołem o pewnym promieniu R i o środku w z_0. Innymi słowy, obszar zbieżności tego szeregu różni się od koła o promieniu R co najwyżej o pewien podzbiór zbioru $\{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| = R\}$ Przyjmujemy tu konwencję, w myśl której takie koło dla $R = 0$ jest równe $\{z_0\}$ (wtedy obszar zbieżności redukuje się do tego punktu), zaś dla $R = +\infty$, kołem o nieskończenie dużym promieniu jest cała płaszczyzna zespolona $\mathbb{C}$.

Twierdzenie 1 *Dla danego szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ istnieje taka liczba $R \in [0, +\infty]$ (zwana* **promieniem zbieżności** *tego szeregu), że*

- *dla $z \in \mathbb{C}$ takich, że $|z - z_0| < R$ szereg jest zbieżny;*
- *dla $|z - z_0| > R$ szereg nasz jest rozbieżny.*

Ponadto gdy $R > 0$, to w każdym kole $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leqslant r\}$, gdzie $0 < r < R$ zbieżność szeregu jest jednostajna wraz z pochodnymi dowolnego rzędu. Jeśli istnieje któraś z granic: $g = \lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ lub $\gamma = \lim \sqrt[n]{|a_n|}$, to $R = \frac{1}{g}$ (odpowiednio $R = \frac{1}{\gamma}$). Tu przyjmujemy $\frac{1}{0} = +\infty$, $\frac{1}{+\infty} = 0$.

Uwaga: Naśladując dowód kryterium d'Alemberta zbieżności szeregu, można wykazać, że jeśli tylko istnieje powyższa gracnica g, to również istnieje druga z granic: γ i wówczas $\gamma = g$. Wynika stąd np., że $\lim \sqrt[n]{n!} = +\infty$. Promieniem zbieżności szeregu $\sum n!z^n$ jest więc 0, zaś promieniem zbieżności $\sum \frac{z^n}{n!} = e^z$ jest $+\infty$, czyli ten ostatni szereg jest zbieżny dla wszystkich $z \in \mathbb{C}$.

Dla większości ciągów żadna z granic: γ, g nie istnieje. Można wykazać, że w takiej sytuacji wystarczy zastąpić γ przez największą z granic podciągów zbieżnych ciągu $\sqrt[n]{|a_n|}$, tak zwaną *granicę górną* tego ciągu, oznaczaną symbolem $\limsup \sqrt[n]{|a_n|}$. Jest to największasza spośród liczb γ o tej własności, że

$$\gamma_1 < \gamma \Rightarrow \big(\sqrt[n]{|a_n|} > \gamma_1 \quad \texttt{dla nieskończenie wielu} \quad n\big).$$

Granica górna jest też równa granicy ciągu monotonicznego (b_n), gdzie $b_n := \sup\{\sqrt[j]{|a_j|} : j \geqslant n\} \geqslant b_{n+1}$.

W każdym przypadku, jesli $\gamma_2 > \gamma$, to jedynie dla skończenie wielu n może być $\sqrt[n]{|a_n|} > \gamma_2$, czyli wówczas $|a_n| \leqslant \gamma_2^n$ dla n dostatecznie dużych . Jeśli $|z - z_0| \leqslant r$, to $r\gamma < 1$, więc dla pewnego $\gamma_2 > \gamma$ jest $q := r\gamma_2 < 1$.

Wówczas dla dostatecznie dużych n mamy oszacowanie (jednostajne w kole $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leqslant r\}$) postaci $|a_n(z - z_0)^n| \leqslant q^n$. Jest to oszacowanie normy supremowej po tym kole dla funkcji $f_n(z) := a_n(z-z_0)^n$. Pochodną z tej funkcji jest $f_n'(z) = na_n(z-z_0)^{n-1}$, którą możemy oszacować przez $nr^{-1}q^n$ (korzystamy tu z faktu, że funkcja $|f_n'|$ osiąga maksimum w kole $\{z : |z-z_0| \leqslant r\}$ na jego brzegu, gdzie $|z-z_0| = r$). Analogiczne oszacowania supremowe dla pochodnych wyższych rzędów -zawsze dają majoranty sumowalne. Zbieżność (jednostajna wraz z pochodnymi) wynika więc z M-testu Weierstrassa. Podobnie wykazuje się rozbieżność gdy $|z-z_0| > R$ -wówczas dla pewnego $\gamma_1 < \gamma$ jest $\gamma_1|z-z_0| > 1$ i z oszacowania $\sqrt[n]{|a_n|} > \gamma_1$ dla nieskończenie wielu n otrzymamy zaprzeczenie warunku koniecznego zbieżności: $|a_n(z - z_0)^n| > 1$ dla nieskończenie wielu n.

Jeśli ograniczamy się do z, z_0 rzeczywistych, mówimy o przedziale zbieżności szeregu potęgowego $\sum a_n(x-x_0)^n$, dla $R = (\limsup \sqrt[n]{|a_n|})^{-1}$ mamy zbieżność tego szeregu dla $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$, rozbieżność dla $|x - x_0| > R$. Czy jest to szereg zbieżny, czy nie w końcach tego przedziału -zależy od samego ciągu a_n. Dla uproszczenia, niech $x_0 = 0, R = 1$. Gdy $\sum a_n$ jest bezwzględnie zbieżny, zaś dla $|x| > 1$ mamy rozbieżność $\sum a_nx^n$, to przedziałem zbieżności jest $[-1, 1]$. Dla $a_n = \frac{1}{n}, a_0 = 0$ przedziałem zbieżności $\frac{1}{n}z^n$ jest $[-1, 1)$, bo dla $x = 1$ sumą jest $\sum \frac{1}{n} = +\infty$. Dla $x = -1$ mamy naprzemienny szereg zbieżny. Podobnie, dla $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ -przedziałem zbieżności jest $(-1, 1]$. Można wykazać, że można tak dobrać a_n, by dla żadnej liczby zespolonej z o module 1 szereg $\sum a_n z^n$ nie był zbieżny, a obszarem zbieżności -było koło otwarte jednostkowe.

Można wykazać następujące **Twierdzenie Abela**: Jeżeli szereg potęgowy o środku x_0 i promieniu zbieżności $R \in (0, +\infty)$ jest zbieżny w którymś z punktów $x_0 \pm R$ (na krańcu przedziału zbieżności), to jego suma jest funkcją ciągłą w tym punkcie, szereg jest zbieżny jednostajnie na odcinku łączącym ten punkt z punktem x_0.

Jako zastosowanie, możemy wykazać, że $\sum_1^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$. Promień zbieżności szeregu potęgowego geometrycznego $\frac{1}{1-(-x)} = \sum_0^\infty (-x)^n$ wynosi 1, więc w przedziałach $[-r.r]$ dla $r < 1$ jego zbieżność jest jednostajna i możemy tam całkować szereg wyraz po wyrazie, otrzymując dla $0 < x < 1$ rozwinięcie $\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\, dt = \sum_0^\infty \int_0^x (-t)^n\, dt = \sum_0^\infty \frac{-1}{n+1}(-x)^{n+1} = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$. Z twierdzenia Abela wyniknie, że

$$\lim_{x\to 1^-} \ln(1+x) = \sum_1^\infty \lim_{x\to 1^-} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n,$$

co daje naszą równość.

Szereg potęgowy $\sum_0^\infty (-x^2)^n$ o sumie $\frac{1}{1+x^2}$ możemy całkować stronami na przedziałach $[0, x]$ dla $|x| < 1$, otrzymując rozwinięcie $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \mathtt{arc\,tg} x$. Dzięki twierdzeniu Abela ten wzór możemy też stosować w punkcie $x = 1$, otrzymując ciekawe przedstawienie liczby π:

$$\frac{\pi}{4} = \mathtt{arc\,tg} 1 = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

3.4 Szereg Taylora i Maclaurina

Jak widać, niektóre funkcje można przedstawić jako sumę szeregu potęgowego stosując całkowanie lub różniczkowanie szeregu potęgowego geometrycznego $\sum x^n$ (z ewentualnymi podstawieniami w miejsce zmiennej x jakiegoś prostego wielomianu). Ale w ogólnym przypadku niełatwo jest znaleźć tą metodą współczynniki rozwinięcia. Na szczęście, jest inny sposób: Przypuśćmy, że promień zbieżności dla szeregu $s(x) := \sum a_n (x - x_0)^n$ jest dodatni. Podstawianie wartości $x = x_0$ do tego rozwinięcia funkcji $s(x)$ a następnie do jej pochodnych rzędu k daje równości: $s(x_0) = a_0, s'(x_0) = a_1, \ldots, s^{(k)}(x_0) = k! a_k$, gdyż w takim rozwinięciu wszystkie -z wyjątkiem jednego (dla $n = k$) składniki zerują się w punkcie x_0. Jeśli więc tylko $f(x)$ jest sumą typu $s(x)$ -czyli sumą jakiegoś szeregu potęgowego zbieżnego w pewnym otoczeniu punktu x_0 do f, to musi już być $a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)$. Szereg potęgowy o takich współczynnikach nazwiemy *szeregiem Taylora* w punkcie x_0 dla funkcji f. W przypadku $x_0 = 0$ szereg taki nazywamy *szeregiem Maclaurina*. Jeśli tylko 0 należy do wnętrza dziedziny f, to najprostszą i najczęściej używaną jest właśnie taka postać. Rzecz jasna, wymaga to znajomości poszczególnych pochodnych w punkcie 0. Dla niektórych funkcji są na to proste wzory: np. dla $f(x) = e^x$ wszystkie pochodne są równe e^x, a w zerze przyjmują wartość 1. Dla funkcji sinus pochodne rzędu k w zerze zerują się dla k parzystych i są równe $(-1)^m$ dla $k = 2m + 1$. Podobnie, $\cos^{(k)}(0) = (-1)^j$ gdy $k = 2j$, $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, zerując się dla k nieparzystych. Tu promieniem zbieżności jest $+\infty$. Dla funkcji $\ln(1 + x)$ promień zbieżności szeregu Maclaurina wynosi 1. Można wykazać, że wszystkie te szeregi mają sumy równe rozwijanym funkcjom, choć niełatwy dowód pominiemy. Można więc zapisać:

$$e^x = \sum_0^\infty \frac{1}{n!} \quad \texttt{dla wszystkich} \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + \ldots \quad \texttt{dla wszystkich} \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + \dots \quad \texttt{dla wszystkich} \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad \texttt{dla}\ |x| < 1.$$

Teraz wyjaśnię, dlaczego wprowadziłem na początku symbol $S(x)$ dla sumy szeregu potęgowego. Może się zdarzyć, że promień zbieżności szeregu Taylora wynosi $+\infty$, lecz mimo to $f(x) \neq S(x)$ dla $x \neq x_0$.

Przykład Tak jest w przypadku funkcji $\phi(x) := \exp(-\frac{1}{x^2})$ dla $x \neq 0$, oraz $\phi(0) := 0$. Wszystkie jej pochodne w punkcie 0 istnieją (na wykładzie wykazałem to dla $k = 1$, lecz są równe zero, więc szereg Maclaurina dla ϕ ma same zerowe współczynniki, $s(x) = 0\,\forall_{x\in\mathbb{R}}$. Natomiast $\phi(x) > 0$ dla $x \neq 0$.

Nasuwa się pytanie: „kiedy jest źle, a kiedy dobrze" w sensie równości pomiędzy funkcją klasy C^∞ i jej sumą szeregu Taylora? Odpowiedź wymaga osobnej teorii, podamy jedynie definicję:

Definicja Mówimy, że funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ jest analityczna (dokładniej, $\mathbb{R}$-analityczna) na zbiorze otwartym $D \subset \mathbb{R}$, jeżeli dowolny punkt $x_0 \in D$ ma otoczenie, w którym f jest równa sumie jakiegoś szeregu potęgowego. (Jak już wiemy, ten szereg musi być wówczas jej szeregiem Taylora.)

Ponieważ szereg potęgowy (mając wówczas dodatni promień zbieżności R) jest zbieżny także poza osią rzeczywistą, dla $z \in \mathbb{C}$ leżących w kole $|z - x_0| < R$, funkcje analityczne można przedłużyć na pewne otoczenie Ω zbioru D na płaszczyźnie zespolonej $\mathbb{C}$. Gdy $R = \infty$, (np. dla $\exp, \sin, \cos$, sumując szereg Taylora otrzymamy przedłużenie tych funkcji dla wszystkich $z \in \mathbb{C}$. Porównując szeregi Maclaurina dla funkcji $\exp(ix), x \in \mathbb{R}$ z rozwinięciami funkcji trygonometrycznych, Euler doszedł do swego słynnego wzoru:

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi, \qquad \phi \in \mathbb{R}.$$

Funkcje analityczne na otwartych podzbiorach Ω płaszczyzny zespolonej definiujemy analogicznie -jako równe sumie szeregów potęgowych w pewnych otoczeniach (w $\mathbb{C}$) każdego punktu ze zbioru Ω. Aby odróżniać te funkcje, zmienna w przypadku rzeczywistym oznaczamy symbolem x, t lub ϕ, zaś w przypadku zespolonym -jednym z symboli: z, w, λ, ζ. Można wykazać, że poza przypadkiem funkcji stałych, funkcja analityczna $f(z)$ nie może przyjmować wyłącznie wartości rzeczywistych w otoczeniu (zespolonym) żadnego punktu.

Ponadto przedłużenia analityczne funkcji $\mathbb{R}$-analitycznych na dany obszar Ω, o ile istnieją, są wyznaczone jednoznacznie.

Możemy utożsamiać $\mathbb{C}$ z $\mathbb{R}^2$. Zapisując $u = \mathtt{Re}f, w = \mathtt{Im}f, x = \mathtt{Re}z, y = \mathtt{Im}z$, możemy traktować f jako funkcję 2 zmiennych rzeczywistych $(x, y) \in \Omega$ o wartościach $(u(x, y), v(x, y))$ w $\mathbb{R}^2$. Wówczas para funkcji $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ klasy C^1 stanowi części: rzeczywistą i urojoną pewnej funkcji analitycznej wtedy i tylko wtedy, gdy spełniają one w każdym punkcie zbioru Ω tzw. *Równania Cauchy'ego - Riemanna:*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \texttt{oraz} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Innym warunkiem równoważnym jest istnienie w każdym punkcie $z_0 \in \Omega$ granicy przy $|z - z_0| \to 0$ z ilorazów różnicowych: $\dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$, nazywanej pochodną zespoloną w tym punkcie i oznaczanej symbolem $f'(z)$.

Analityczne są np. wielomiany postaci $p(z) = \sum_0^k a_k z^k$, funkcje wykładnicze, trygonometryczne powstałe przez rozszerzenie odpowiednich funkcji $\mathbb{R}$-analitycznych na pewne obszary w $\mathbb{C}$.

Suma, iloczyn, iloraz (poza miejscami zerowymi mianownika) dwu funkcji analitycznych w Ω jest również analityczna. Również funkcje odwrotne do injekcji analitycznych -są analityczne. Przy tym obraz zbioru otwartego w $\mathbb{C}$ przez funkcję analityczną różną od stałej -jest zawsze otwarty.