4 Szeregi funkcyjne-c.d.

4.1 Końcowe uwagi o szeregach potęgowych

Omawianie szeregów potęgowych zakończymy przykładami ich różniczkowania i całkowania metodą "wyraz po wyrazie", co umożliwia wyliczanie ich sum. Jak już wiemy, w domkniętych podzbiorach koła zbieżności (np. w kołach domkniętych o mniejszym promieniu) zbieżność szeregu potęgowego jest jednostajna wraz z pochodnymi (a nawet z pochodnymi każdego rzędu), co wynika z testu majorant Weierstrassa i stąd, że ponieważ ciąg $\sqrt[n]{n}$ zmierza do 1, więc promień zbieżności szeregu pochodnych, czyli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^{n-1}$ jest taki sam, jak dla szeregu $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$. Ponadto suma pierwszego z tych szeregów jest pochodną z sumy $S(x)$ drugiego szeregu. te uwagi można zebrać w formie następującego wniosku:

Wniosek. Można albo: najpierw liczyć sumę szeregu potęgowego (czyli funkcję $S(x)$), a potem jej pochodną, albo policzyć sumę szeregu pochodnych i otrzymamy taką samą funkcję. Na odcinkach domkniętych zawartych we wnętrzu przedziału zbieżności możemy całkować szereg wyraz- po wyrazie i suma takich całek będzie całką po danym przedziale z tej funkcji $S(x)$

Pozwala to np. na wyliczenie $S(x)$ dla pewnych szeregów gdzie np. $a_n = \frac{1}{n}, n \geqslant 1$ lub $a_n = \frac{1}{(n+2)n}$. Chodzi o to, by "pozbywając się n z mianownika" doprowadzić do liczenia sumy zwykłego szeregu geometrycznego (w razie potrzeby -o wszystkich wyrazach pomnożonych np. przez x lub przez x^2). Ponieważ $(x^n)' = nx^{n-1}$, dla $S(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$ na mocy ostatniego wniosku,

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{1}{n} \cdot x^{n-1}$$

-a to jest suma szeregu geometrycznego, równa $\frac{1}{1-x}$ dla $|x| < 1$. Ponadto $S(0) = a_0$. Stąd

$$S(x) = S(0) + \int_0^x \frac{1}{1-t}\, dt = a_0 - \ln(1-x)$$

w pierwszym przypadku. W drugim

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{1}{(n+2)n} x^{n-1} = x^{-3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2} x^{n-1+3}.$$

Różniczkując jeszcze raz obliczamy pochodną z ostatniego szeregu:

$$(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2} x^{n+2})' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} = x^2 \sum_{j=0}^{\infty} x^j = \frac{x^2}{1-x}.$$

Ta ostatnia suma dla $x = 0$ przyjmuje wartość 0, więc jej wartość otrzymamy równą $\int_0^x \frac{t^2}{1-t}\, dt$. Powtarzamy ten proces, cofając się przez całkowanie do sumy wyjściowej.

Jak łatwo się domyśleć, n -a właściwie, $n+1$ możemy usunąć z licznika (np. gdy $b_n = \frac{n+1}{n+2}$) poprzez całkowanie szeregu wyraz po wyrazie, potem różniczkując, by z kolei "wyczyścić mianownik". Na przykład,
$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)t^n\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$. Stąd $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{d}{dx}(\frac{1}{1-x}) = \frac{1}{(1-x)^2}$ dla $|x| < 1$. Podobnie, choć dłużej, wyliczamy $\sum b_n x^n$. Tu prościej jednak będzie przekształcić b_n do postaci $1 - \frac{1}{n+2}$.

Również trzeba stosować powyższy wniosek lub jego odpowiednik dla całek przy rozwijaniu funkcji w szereg Taylora, np. dla rozwinięcia $\ln(1+x)$ wspomnianego w poprzednim wykładzie.

4.2 Szeregi Fouriera

Szeregi Fouriera stanowią podstawowe narzędzie w analizie sygnałów, teorii komunikacji, termodynamice, czy elektronice. Ich znaczenia dla rozwoju techniki (a także matematyki) nie sposób przecenić. Jedną z różnic będzie sposób, w jaki będzie badana zbieżność szeregu. Do opisu zbieżności posłużymy się pojęciem normy średniokwadratowej, która okaże się właściwym narzędziem do badania zbieżności szeregów Fouriera. Najpierw jednak określmy, jakie funkcje będziemy rozwijali w szeregi Fouriera.

4.2.1 Wielomiany trygonometryczne. Funkcje okresowe

Rozważać będziemy funkcje określone na odcinku $[a, b]$. Najczęściej będzie to przedział $[0, 2\pi]$, $[-\pi, \pi]$ lub $[0, 1]$. Przy tak ustalonym przedziale $[a, b]$ o długości $L := b - a$ będziemy mówili, że *funkcja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ (lub $f : [a, b] \to \mathbb{C}$) *jest okresowa*, gdy $f(x + L) = f(x)$, co w przypadku f określonej na $[a, b]$ oznacza jedynie równość $f(a) = f(b)$. Każdą funkcję określoną na przedziale $[a, b)$ (jak również każdą funkcję okresową $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ o okresie $L = b - a$) można jednoznacznie przedłużyć do funkcji okresowej na całej osi rzeczywistej. Jeśli $x \in \mathbb{R}$, to istnieje $k \in \mathbb{Z}$ taka, że $x - kL \in [a, b)$ i wystarczy jako $f(x)$ przyjąć wartość $f(x - kL)$.

W przypadku odcinka $[0, 2\pi]$ (lub $[-\pi, \pi]$) najważniejsze przykłady funkcji okresowych, to $f_n(t) = \sin(nt)$, $g_n(t) = \cos(nt)$, $e_k(t) = e^{ikt}$, gdzie $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k \in \mathbb{Z}$. Funkcje e_k tworzą tzw. *zespolony układ trygonometryczny*, zaś f_n, g_n -rzeczywisty układ trygonometryczny. (Zauważmy, że $\mathtt{Re}(e_n) = g_n, \mathtt{Im}(e_n) = f_n$, g_0 jest funkcją stałą równą 1, funkcji f_0 równej stale zero nie zaliczamy do układu.) Fourier zaproponował, by każdą funkcję okresową $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ przedstawić przy użyciu rzeczywistego szeregu (trygonometrycznego) postaci

$$\frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nt) + B_n \sin(nt),$$

lub w postaci "zespolonego szeregu trygonometrycznego"

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}.$$

Jeśli traktujemy te szeregi jako szeregi formalne, to działania algebraiczne, czy operacje różniczkowania, lub całkowania będą dostarczać prostych wzorów, równania różniczkowe przekształcimy w równania algebraniczne dla poszczególnych współczynników. Cała trudność polega na zagadnieniu zbieżności takich szeregów. Jednostajną zbieżność otrzymamy jedynie dla funkcji okresowych klasy C^1, jednak najważniejsze są szeregi funkcji mniej regularnych, tam nawet zbieżność punktowa może nie mieć miejsca. Zdefiniujemy normę najbardziej odpowiednią dla naszych celów. W tej normie szeregi Fouriera będą zbieżne (dla funkcji o całkowalnych kwadratach modułów).

4.2.2 Norma L^2 (średniokwadratowa)

Jeśli $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna, niech

$$\|f\|_2 := (\int_a^b |f(t)|^2 \, dt)^{\frac{1}{2}}.$$

Taki sam wzór możemy zastosować dla funkcji zespolonej $f : [a, b] \to \mathbb{C}$, o ile jej kwadrat modułu jest całkowalny jako całka niewłaściwa (wystarczy, by części: rzeczywista i urojona z f były całkowalne). Taką normę nazywamy L^2-normą, lub normą średniokwadratową. Nazwę można uzasadnić zwłaszcza w przypadku, gdy długość przedziału : $b - a$ wynosi 1. Wówczas całka jest faktycznie średnią wartoscią z funkcji podcałkowej po przedziale $[a, b]$, licząc tę normę bierzemy wtedy średnią całkową z kwadratu modułu funkcji f.

(Zbieżność względem analogicznej normy: $\|f\|_1 := \int_a^b |f(t)|\, dt$, czyli warunek $\|f_n - f\|_1 \to 0$ nazywa się czasami „przeciętną zbieżnością" lub zbieżnością w średniej.) To uśrednianie jest typowe dla naszego postrzegania. Na przykład, patrząc na jakiś obraz –nie widzimy poszczególnych punktów, bo te mają „rozmiar zerowy", lecz średnie nasycenie i jasność konkretnych barw w danych (możliwe, że bardzo małych) obszarach danego obrazu. Podobnie analizujemy dźwięki w danych przedziałach czasowych. W „punkcie czasowym" nie moglibyśmy np. odczuć wysokości tonu (częstotliwości dźwięku). Odpowiedź na to, dlaczego używamy wykładnika 2, a nie 1 lub 4 przyjdzie nieco później -ma ona pewien związek z twierdzeniem Pitagorasa i z regułą równoległoboku, w naszych rozważaniach będziemy, w pewnym sensie, stosować geometrię euklidesową.

Czy jednak $\| \|_2$ jest rzeczywiście normą? Za chwilę zobaczymy, że zachodzi nierówność trójkąta: $\|f+g\|_2 \leqslant \|f\|_2 + \|g\|_2$. Warunek jednorodności: $\|\alpha f\|_2 = |\alpha| \|f\|_2$ jest oczywisty, gdyż stałą (dokładniej, $|\alpha|^2$) można wyłączyć przed znak całki. W przypadku funkcji ciągłych to faktycznie jest norma, bo postulat tożsamości: $\|f\|_2 = 0 \Rightarrow f = 0$ można w przypadku f ciągłej dość łatwo wykazać (metodą nie wprost). Ale rozważamy też funkcje nieciągłe i wtedy niestety, są dwa poważne mankamenty:

- postulat tożsamości ($\|f\|_2 = 0 \Rightarrow f = 0$) na ogół nie zachodzi;
- przestrzeń $R[a,b]$ z $\| \|_2$ normą nie jest zupełna.

Są jednak „standardowe procedury" pozwalające ominąć te niedogodności: Utożsamiamy każde dwie funkcje f_1, f_2, dla których $\|f_1 - f_2\|_2 = 0$. Jest to proces tworzenia przestrzeni ilorazowej względem tak określonej relacji. Jest to relacja równoważności: przechodniość wyniknie z nierówności trójkąta, zaś symetria -z jednorodności normy. Na szczęście, ta relacja jest zgodna ze strukturą wektorową: (np. zgodność z dodawaniem oznacza, że gdy $\|f_1 - f_2\|_2 = 0$ oraz $\|g_1 - g_2\|_2 = 0$, to sumy: $h_1 := f_1 + g_1$ oraz $h_2 := f_2 + g_2$ są równoważne, czyli $\|h_1 - h_2\|_2 = 0$). Ponadto wówczas iloczyny przez dany skalar α funkcji f_1, f_2 są równoważne i normy $\|f_1\|_2$ oraz $\|f_2\|_2$ są równe, co pozwala przypisać taką wartość całej klasie równoważności, czyli zbiorowi $[f]$ wszystkich funkcji równoważnych z daną $f \in R[a,b]$. Tak więc $\|[f]\|_2 := \|f\|_2$. W ten sposób odzyskamy postulat jednoznaczności -w przestrzeni wektorowej złożonej z takich klas, gdzie definiujemy działania $[f] + [g] := [f+g], \alpha[f] := [\alpha f]$. Łatwo wykazać, że tak zdefiniowane działania spełniają aksjomaty przestrzeni wektorowej. Wektorem zerowym jest tu klasa równoważności funkcji stałej 0, czyli zbiór $[0] = \{f \in R[a,b] : \|f\|_2 = 0\}$. Na przykład, funkcja równa 1 w punkcie a i w punkcie b, zaś równa zero wewnątrz naszego odcinka jest okresowa, całkowalna, należy do $[0]$. W praktyce klasę równoważności funkcji f zapisuje się takim samym symbolem f, co jest wygodne, lecz należy uważać, gdyż nie można w takim przypadku podać wartości f w danym punkcie. Jedyne, co można wtedy określić, to „wartości przeciętne na zbiorze (miary dodatniej)". Jeśli w klasie $[f]$ jest funkcja ciągła f_0, to jest ona wyznaczona jednoznacznie i wtedy jej wartości będą „najbardziej reprezentatywne" dla klasy $[f]$ (o ile taka f_0 jest okresowa).

Drugi problem jest znacznie poważniejszy: okazuje się, że można albo dokonać abstrakcyjnej konstrukcji rozszerzenia do przestrzeni zupełnej (tzw. uzupełnienie przestrzeni), albo rozszerzyć pojęcie całkowalności -wprowadzając tzw. całkowalność w sensie Lebesgue'a.

Uzupełnienie można uzyskać biorąc zbiór klas równoważności ciągów Cauchy'ego względem naszej normy. Ciągi $(f_n), (g_n)$ uznaje się tu za równoważne, jeżeli $\lim \|f_n - g_n\|_2 = 0$. Ciągi takie dodajemy „wyraz po wyrazie", otrzymując dodawanie wektorowe dla odpowiadających im klas. Normę klasy $[(f_n)]$ definiujemy jako $\lim \|f_n\|_2$. Można wykazać, że te klasy równoważności tworzą przestrzeń Banacha. Szczegóły pomijam. Otrzymana przestrzeń Banacha, oznaczana symbolem $L^2[a,b]$, jest przestrzenią zawierającą klasy równoważności funkcji całkowalnych w sensie Riemanna (względem relacji równoważności $\|f_1 - f_2\|_2 = 0$) i do takich funkcji będziemy się w dalszym ciągu ograniczali.

(Cały dotychczasowy fragment materiału z tego podrozdziału, **z wyjątkiem definicji** $\|f\|_2$ jest nadobowiązkowy, ma ułatwić korzystanie z bardziej zaawansowanej literatury.)

Kluczowe znaczenie odgrywa iloczyn skalarny. Dla $f, g : [a,b] \to \mathbb{C}$ całkowalnych w sensie Riemanna definiujemy go wzorem

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\, dt. \tag{1}$$

Przestrzeń wektorową z iloczynem skalarnym nazywamy *przestrzenią Hilberta*, jeśli jest ona zupełna względem normy $\|f\| := \sqrt{\langle f, f\rangle}$. Przestrzeń $R[a, b]$ nie jest zupełna, ale jej rozszerzenie: $L^2[a, b]$ już jest przestrzenią Hilberta. Jak już wspomniałem, będziemy jednak starali się ograniczać do funkcji całkowalnych w sensie Riemanna.

Oznaczeń $f \cdot g, f \circ g$ nie możemy stosować dla iloczynu skalarnego funkcji f, g, bo pierwsze oznacza funkcję $([a, b] \ni t \to f(t)g(t))$, drugie jest symbolem złożenia funkcji. W wielu podręcznikach zamiast nawiasu graniastego, używa się zwykłych nawiasów, co moim zdaniem może mylić się z parą uporządkowaną (f, g). W przypadku rzeczywistym kreska oznaczająca sprzężenie zespolone nie musi występować, operacja sprzężenia nie zmienia liczby rzeczywistej.

.

Własności iloczynu skalarnego:

- liniowość względem pierwszej zmiennej: $\langle \alpha\phi + \beta\psi, g\rangle = \alpha\langle\phi, g\rangle + \beta\langle\psi, g\rangle$;
- „skośna symetria": $\langle g, f\rangle = \overline{\langle f, g\rangle}$ (w przypadku rzeczywistym jest to zwykła symetria);
- dodatniość: $\langle f, f\rangle \geqslant 0$, przy czym równość mamy wtedy i tylko wtedy, gdy f jest równoważna ze stałą funkcją zero (tak jest wtedy i tylko wtedy, gdy zerowa jest miara Lebesgue'a zbioru tych $t \in [a, b]$, dla których $f(t) \neq 0$.)

Normę średniokwadratową wyliczamy ze wzoru

$$\|f\|_2 = (\langle f, f\rangle)^{\frac{1}{2}}, \quad \texttt{czyli} \quad \|f\|_2^2 = \langle f, f\rangle.$$

Nierówność Schwarza ma postać

$$|\langle f, g\rangle| \leqslant \|f\|_2\|g\|_2 \tag{2}$$

Jej dowód dla uproszczenia przedstawię w przypadku rzeczywistym. W dalszym ciągu dla uproszczenia zapisu zamiast $\|\cdot\|_2$ będę używał symobolu $\|\cdot\|$ W oparciu o własności iloczynu skalarnego zauważmy, że

$$\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + 2\mathtt{Re}\langle f, g\rangle + \|g\|^2. \tag{3}$$

Wstawiając dla $t \in \mathbb{R}$ zamiast g wektor tg otrzymamy stale nieujemny trójmian kwadratowy zmiennej t postaci $t^2\|g\|^2 + t \cdot 2\langle f, g\rangle + \|f\|^2$. Wyróżnik "delta" jest więc niedodatni, co daje nierówność $4\langle f, g\rangle^2 - 4\|f\|^2\|g\|^2 \leqslant 0$, co po trywialnym przekształceniu i po spierwiastkowaniu stronami daje dowodzoną nierówność Schwarza. Wynika z niej nierówność trójkąta dla normy $\|\ \|$. Sprawdzamy ją podnosząc strony do kwadratu: ma być $\|f + g\|^2 \leqslant (\|f\| + \|g\|)^2$, co po zastosowaniu powyższego wzoru dla lewej strony i wzoru na kwadrat sumy liczb -dla prawej, sprowadza zagadnienie do nierówności Schwarza.

Definicja. Mówimy, że *wektory f, g są ortogonalne*, czyli *prostopadłe* względem danego iloczynu skalarnego $\langle , \rangle$, gdy $\langle f, g\rangle = 0$. Fakt ten oznaczamy zapisując $f \perp g$. Ze wzoru (3) wynika dla $f \perp g$ słynne twierdzenie:

Twierdzenie Pitagorasa:

$$\langle f, g\rangle = 0 \Rightarrow \|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2.$$

Zauważmy, że gdy $f \perp g$, to również $g \perp f$, natomiast relacja $f \perp f$ może zachodzić jedynie dla $\|f\|_2 = 0$ (czyli gdy $f = 0$ prawie wszędzie).

Definicja. Układ wektorów $(f_j)_{j\in J}$ nazwiemy *układem ortogonalnym*, gdy $j \neq k \Rightarrow f_j \perp f_k$. Układ ortogonalny wektorów o normie 1 nazwiemy *układem ortonormalnym*. Układ $(e_j)_{j\in J}$ w przestrzeni H z iloczynem skalarnym nazwiemy *bazą ortonormalną*, gdy jest to taki układ ortonormalny, że jedynym wektorem prostopadłym do wszystkich e_j jest wektor zerowy:

$$(\forall_{j\in J}\ f \perp e_j) \Rightarrow f = 0. \tag{4}$$

Warunek (4) nazywany jest *warunkiem zupełności układu*[1]

[1]Układ trygonometryczny $(\cos nt, \sin nt)$ jest zupełny i ortogonalny, ale $\|\sin nt\|_2 = \sqrt{\pi}$.