5 Szeregi Fouriera -c.d.

W przestrzeni $R[a,b]$ zdefiniowaliśmy przy użyciu całki iloczyn skalarny. Można rozważać bardziej ogólne przestrzenie wektorowe H z iloczynem skalarnym $\langle f,g\rangle$. Symbol $f \perp g$ oznacza zawsze prostopadłość w sensie: $\langle f,g\rangle = 0$. Mamy też wówczas naturalnie zdefiniowaną normę wektorów $f \in H$ -daną wzorem $\|f\| = \sqrt{\langle f,f\rangle}$ i zachodzi nierówność Schwarza:

$$|\langle f,g\rangle| \leqslant \|f\|\|g\|.$$

Jeśli przestrzeń z taką normą jest zupełna, to nazywana jest przestrzenią Hilberta.

Brak zupełności możemy w pewnym sensie obejść -tworząc tzw. uzupełnienie $\tilde{H}$ przestrzeni H -jej zupełny nadzbiór z operacjami: iloczynu skalarnego, dodawania wektorów i iloczynu skalarnego, będącymi przedłużeniem ciagłym odpowiednich działań z H. Takie przedłużenie istnieje, a jego jednoznaczność wynika z gęstości H w $\tilde{H}$ czyli z faktu, iż każdy wektor z $\tilde{H}$ jest granicą pewnego ciągu Cauchy'ego o wyrazach z przestrzeni H. Również wszystkie odwzorowania liniowe i ciągłe na H mają jednoznaczne ciągłe przedłużenia na $\tilde{H}$ -takim odwzorowaniem jest np. funkcjonał przypisujący funkcji $f \in R[a,b]$ całkę $\int_a^b f(t)\,dt$, jego przedłużeniem na $\tilde{H} = L^2[a,b]$ będzie całka Lebesgue'a. Nie będziemy jednak wchodzić w szczegóły jej teorii na tym kursie. Całkowalność w tym ogólniejszym sensie Lebesgue'a obejmuje np. całki niewłaściwe bezwzględnie zbieżne, funkcje równe poza zbiorem miary zero funkcjom całkowalnym, czy całkowalność granic punktowo zbieżnych ciągów funkcji całkowalnych.

Przypomnijmy ostatnią definicję z poprzedniego wykładu:

Definicja. Układ wektorów $(f_j)_{j\in J}$ nazwiemy *układem ortogonalnym*, gdy $j \neq k \Rightarrow f_j \perp f_k$. Układ ortogonalny wektorów o normie 1 nazwiemy *układem ortonormalnym.* Układ $(e_j)_{j\in J}$ w przestrzeni H z iloczynem skalarnym nazwiemy *bazą ortonormalną*, gdy jest to taki układ ortonormalny, że jedynym wektorem prostopadłym do wszystkich e_j jest wektor zerowy:

$$(\forall_{j\in J}\ f \perp e_j) \Rightarrow f = 0. \tag{1}$$

Warunek ten, znany jako *warunek zupełności układu* jest równoważny temu, by każdy element $f \in H$ z dowolną dokładnością dał się przybliżyć kombinacjami liniowymi wektorów e_j.

Twierdzenie 1 *W każdej przestrzeni Hilberta istnieją bazy ortonormalne. W przestrzeniach $L^2(a,b)$ istnieją bazy przeliczalne $(e_j)_{j\in\mathbb{Z}}$. Co więcej, każdy wektor $f \in H$ ma w takiej bazie dokładnie jedno rozwinięcie w* ***"abstrakcyjny szereg Fouriera"*** *postaci*

$$f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j(f) e_j, \quad \text{gdzie} \quad c_j(f) = \langle f, e_j\rangle. \tag{2}$$

Zachodzi też tak zwana ***Tożsamość Parsevala:***

$$\|f\|^2 = \sum_{j\in\mathbb{Z}} |c_j|^2. \tag{3}$$

Równość $S = \sum_{j\in\mathbb{Z}} g_j$, zapisywana też jako $S = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} g_j$ oznacza tu dla $g_j \in H$, że skończone sumy częsciowe $S_k := \sum_{j=-k}^{k} g_j$ zmierzają do wektora S względem normy, czyli

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_M\forall_{k\geqslant M, k\in\mathbb{N}}\ \|S - S_k\| < \epsilon.$$

Zwróćmy uwagę, że sumy są nieskończone, nie jest to więc zwykła baza algebraiczna, z jaką mieliśmy np. do czynienia w $\mathbb{R}^n$ (tam baza kanoniczna zero-jedynkowa złożona z wektorów $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$ jest, faktycznie ortonormalna i np. dla $n = 3, f = (x,y,z)$ mamy $c_1(f) = x, c_2(f) = y, c_3(f) = z$. Pojęcie bazy algebraicznej, gdzie każdy wektor z przestrzeni jest skończoną kombinacją liniową wektorów bazowych, w przypadku przestrzeni funkcyjnych, jest nieodpowiednie (w przestrzeniach zupełnych takie bazy algebraiczne muszą być nieprzeliczalne!)

.

Zauważmy tylko parę istotnych dla dowodu faktów: iloczyn skalarny jest ciągły wzgledem pierwszej współrzędnej w normie $\| \|$, bo z nierówności Schwarza, mamy $|\langle f_1, e\rangle - \langle f_2, e\rangle| = |\langle f_1 - f_2, e\rangle| \leqslant \|f_1 - f_2\|\|e\|$. Jeśli więc istnieje $S := \lim S_k$, to $\langle S, e_n\rangle = \lim_{k\to\infty}\langle S_k, e_n\rangle$. Ale dla sum częściowych naszego szeregu Fouriera (2), dzięki liniowości iloczynu skalarnego wzgl. pierwszej zmiennej, mamy $\langle S_k, e_n\rangle = \sum_{j=-k}^{k} c_j(f)\langle e_j, e_n\rangle = c_n(f)$ dla $k > |n|, n \in \mathbb{Z}$. Jest to więc ciąg stały od pewnego miejsca i faktycznie, mamy wówczas $\langle S, e_n\rangle = \langle f, e_n\rangle$. Odejmując stronami, otrzymamy $\langle S - f, e_n\rangle = 0$, czyli relację prostopadłości $S - f \perp e_n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{Z}$. Warunek zupełności układu (e_n) da wówczas równość $S = f$. Wystarczy więc tylko jeszcze sprawdzić, że faktycznie ciąg S_k sum częściowych szeregu (2) jest zbieżny, do czego wystarczy, by zachodził warunek Cauchy'ego (tu jest jedyne miejsce, w którym korzystamy z zupełności H). Ponieważ jak łatwo zauważyć, również $S_k - f \perp e_n$, a w konsekwencji, $f - S_k \perp S_k$, z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy $\|f\|^2 = \|f - S_k\|^2 + \|S_k\|^2 \geqslant \|S_k\|^2 = \sum_{j=-k}^{k} |c_j(f)|^2$ Dowodzi to zbieżności szeregu kwadratów norm współczynników f względem naszej bazy. Ponieważ $c_j(f) = \langle f, e_j\rangle$, wynika stąd też ważne oszacowanie, które wykazał Bessel:

$$\sum_{j\in J} |\langle f, e_j\rangle|^2 \leqslant \|f\|^2 \quad \text{dla wszystkich} \quad f \in H. \tag{4}$$

Zachodzi ono nie tylko dla baz, ale i dla dowolnych układów ortonormalnych. Z niego wynika też warunek Cauchy'ego dla ciągu S_k: dla $m > k$ mamy

$$\|S_m - S_k\|^2 = \| \sum_{k<|j|\leqslant m} c_j(f)e_j\|^2 = \sum_{k<|j|\leqslant m} |c_j(f)|^2 < \epsilon$$

dla k dostatecznie dużych, $m > k$. (Ostatnia z równości wynika z twierdzenia Pitagorasa dla wzajemnie prostopadłych wektorów $c_j(f)e_j, j = k+1, k+2, \ldots, m$ i z równości $\|c_j(f)e_j\| = |c_j(f)|$.)

Ponieważ $\|f\| = \lim \|S_k\|$ (bo norma jest ciągła), otrzymujemy z tego rozumowania również równość (3) zwaną tożsamością Parsevala.

Uwaga: Gdyby układ wektorów (e_j) nie był zupełny, to rozwinięcie f w szereg Fouriera (2) byłoby nadal możliwe -ale jedynie dla tych wektorów f, dla których zachodzi tożsamość Parsevala, a to są dokładnie takie wektory, które należą do domkniętej podprzestrzeni generowanej przez zbiór $\{e_j : j \in \mathbb{Z}\}$ elementów danego układu ortonormalnego.

Przykładem na układ niezupełny jest tzw. ciąg funkcji Rademachera. Jest to układ funkcji przyjmujących jedynie dwie wartości -1,1 na odcinku [0,1]: $e_0(t) = 1(\forall t), e_1(t) = 1$ dla $t \in [0, \frac{1}{2}]$, $e_1(t) = -1$ dla $t \in (\frac{1}{2}, 1)$. Jest to więc tzw. "sygnał prostokąty". Jeśli e_1 przedłużymy do funkcji okresowej na całej osi $\mathbb{R}$, to niech $e_2(t) = e_1(2t), \ldots,\ e_j(t) = e_1(2^{j-1}t), t \in [0,1]$.

5.1 Klasyczne szeregi Fouriera

Dla dowolnej liczby całkowitej k całki z funkcji

$$s_k(x) := \sin(kx), \quad c_k(x) := \cos(kx)$$

po przedziale $[0, 2\pi]$ (jak również po przedziale $[-\pi, \pi]$) są równe zero z jednym wyjątkiem: dla $k = 0$ funkcja c_0 jest stała, równa 1. Oczywiście, $s_0 = 0, s_{-k} = -s_k, c_{-k} = c_k$, więc ze znanych wzorów trygonometrycznych:

$$2s_mc_n = s_{m-n} + s_{m+n}, 2s_ms_n = c_{m-n} - c_{m+n}, 2c_mc_n = c_{m-n} + c_{m+n}$$

wynika, że dla $m \neq n, m, n \in \mathbb{Z}$ iloczyny skalarne:

$$\langle c_m, s_n\rangle, \langle c_m, c_n\rangle, \langle s_m, s_n\rangle$$

są równe zero oraz $\langle c_n, s_n\rangle = 0$ (=ortogonalność układu). Dla $n \in \mathbb{N}$ mamy zaś

$$\langle c_m, c_m\rangle = \pi \quad \texttt{oraz} \quad \langle s_n, s_n\rangle = \pi.$$

Ponadto dla funkcji stałej c_0 jest $\langle c_0, c_0\rangle = 2\pi$.

Jak można wykazać, układ utworzony przez funkcje $c_n, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ oraz $s_n, n \in \mathbb{N}$ jest układem zupełnym. Nazywamy go *układem trygonometrycznym*. Jest on ortogonalny, lecz normy średniokwadratowe jego elementów (z wyjątkiem c_0) nie wynoszą 1, tylko $\sqrt{\pi}$. Jego pierwsza część, utworzona przez funkcje $\cos(nx)$ rozpina podprzestrzeń funkcji okresowych parzystych w $L^2[-\pi, \pi]$, druga -może służyć do rozwinięcia dowolnej funkcji nieparzystej. Ponieważ układ jest nieunormowany, aby skorzystać z ogólnej teorii szeregów Fouriera, należy go unormować. Niech

$$\tilde{c}_0 := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} c_0, \quad \tilde{s}_n := \frac{1}{\sqrt{\pi}} s_n, \tilde{c}_n := \frac{1}{\sqrt{\pi}} c_n, \;\; n \in \mathbb{N}.$$

Wówczas współczynniki Fouriera funkcji okresowej $f : [-\pi, \pi]$ dla $n \in \mathbb{N}$ są równe:

$$\tilde{a}_n := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \qquad \tilde{b}_n := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx,$$

zaś $\tilde{a}_0 := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$. Ponieważ chcemy dojść do rozwinięcia postaci

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_1^\infty (a_n c_n + b_n s_n),$$

zaś z twierdzenia 1 dla bazy ortonormalnej $\tilde{c}_n, \tilde{s}_n$ (dokładniej, dla $n \in \mathbb{Z}, \leqslant 0$ tu $e_n = c_n$, a dla $n \in \mathbb{N}, e_n = s_n$) mamy $f = \tilde{a}_0 \tilde{c}_0 + \sum_1^\infty \tilde{a}_n \tilde{c}_n + \tilde{b}_n \tilde{s}_n$, otrzymujemy

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx. \tag{5}$$

Są to tak zwane *Wzory Fouriera-Eulera* dla współczynników rozwinięcia funkcji $f \in L^2[-\pi, \pi]$ w szereg Fouriera:

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^\infty a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Tożsamość Parsevala daje relację $\|f\|_2^2 = |\tilde{a}_0|^2 + \sum_1^\infty |\tilde{a}_n|^2 + |\tilde{b}_n|^2$, co implikuje jej „klasyczną postać":

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx = \frac{\pi}{2} |a_0|^2 + \pi \sum_{n=1}^\infty (|a_n|^2 + |b_n|^2). \tag{6}$$

Dla $n = 0$, wyliczając a_0, chcemy (i możemy) użyć tego samego wzoru, bo $c_0(x) = \cos(0x) = 1 \, \forall x$. W tym przypadku łatwo się pomylić, bo w abstrakcyjnym szeregu Fouriera występował składnik $\tilde{a}_0 \tilde{c}_0$, zaś w naszym rozwinięciu używamy $\frac{a_0}{2} c_0$, czyli $\frac{a_0}{2}$. Dla $n = 0$ współczynnik a_n we wzorze (5) nie jest, jak w przypadku pozostałych n -iloczynem skalarnym f przez funkcje c_n (odp.s_n) podzielonym przez kwadrat L^2- normy c_n (odp. s_n) rówwny π, gdyż taki kwadrat normy dla c_0 jest równy 2π. Jeśli chcemy ujednolicić powstać wzorów Eulera-Fouriera, to w samym rozwinięciu Fouriera musimy za a_0 przyjąć nie składnik stały, lecz jego podwojoną wartość:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$

Uwaga: W rozwinięciu $f \in L^2(-\pi,\pi)$ w szereg Fouriera zbieżność (sum częściowych tego szeregu do f) jest średniokwadratowa. W ogólnym przypadku ciągi zbieżne średniokwadratowo nie muszą być zbieżne punktowo nawet w sensie zbieżności „prawie wszędzie", jedynie pewne ich podciągi muszą być zbieżne prawie wszędzie. Dopiero w latach 60. XX wieku matematyk szwedzki, Lennart Carleson (laureat Nagrody Abela) wykazał, że szereg Fouriera funkcji całkowalnej z kwadratem jest zbieżny do tej funkcji prawie wszędzie. Można wykazać, że dla f okresowej, klasy C^1 zbieżność szeregu do f jest jednostajna.

Jeśli, na przykład, rozwiniemy funkcję $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ daną wzorem $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$ (nie jest ona okresowa, bo $f(2\pi) = -\frac{3}{4}\pi \neq f(0)$), otrzymamy współczynniki $a_0 = -\frac{\pi}{2}, a_n = 0$ dla $n \in \mathbb{N}$, $b_n = \frac{1}{n}$. Norma średniokwadratowa podniesiona do kwadratu wyniesie $\|f\|_2^2 = \int_0^{2\pi} (\frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi x}{4} + \frac{x^2}{4})\, dx = \pi^3(\frac{1}{8} - \frac{1}{2} + \frac{8}{12}) = \pi^3(\frac{1}{8} + \frac{1}{6})$, co łatwo wyliczyć, więc z tożsamości Parsevala (6), $\pi^3(\frac{1}{8} + \frac{1}{6}) = \frac{\pi}{2}(\frac{\pi}{2})^2 + \pi \sum \frac{1}{n^2}$. Z tej równości, skracając, otrzymamy wykazaną przez Eulera tożsamość:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Jednym z typowych zadań sprawiającym z początku pewien kłopot interpretacyjny, jest polecenie rozwinięcia danej funkcji $f : [0, \pi]$ w szereg cosinusów (odp. w szereg sinusów). Chodzi tu o szeregi $\frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} a_n \cos nt$ (odp. $\sum_1^{\infty} b_n \sin nt$). Jak tę samą funkcję można rozwinąć w 2 różne szeregi, czy nie kłóci się to z zasadą jednoznaczności rozwinięć? Otóż, nie, nie ma tu sprzeczności. Zagadnienie polega na tym, że funkcja nie jest określona na przedziele długości 2π, a taką sugeruje długość okresu funkcji z układu trygonometrycznego. Aby mówić o parzystości/nieparzystości -powinniśmy mieć dziedzinę symetryczną wzgl. zera, czyli przedział $[-\pi, \pi]$. Funkcje mające szereg Fouriera czysto cosinusowy ($b_n = 0 \forall n$) muszą być parzyste, wówczas całki we wzorach na współczynniki wystarczy liczyć po przedziale $[0, \pi]$, wynik mnożąc przez 2. Dokładniej, będzie $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos nt\, dt$. Podobnie, rozwinięcie w szereg sinusów implikuje nieparzystość. Iloczyn dwu funkcji nieparzystych (u nas: $f(t)\sin(nt)$ jest parzysty, więc w rozwinięciu f w postaci $\sum_1^{\infty} b_n \sin nt$ mamy $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin nt\, dt$.

Rozwijając np. funkcję $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$ rozważaną przed chwilą - tym razem w szereg sinusów w przedziale $[0, \pi]$, otrzymamy inne, niż poprzednio, rozwinięcie: $\sum_1^{\infty} \frac{1}{2n} \sin(2nt)$ dla $0 < x < \pi$.

Funkcja $f(t) = t$ jest nieparzysta w całym $[-\pi, \pi]$, tam (poza końcami przedziału, jest sumą szeregu $\sum_1^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \sin nt$. Natomiast w przedziale$[0, \pi]$ jest ona częścią funkcji parzystej $|t|$ określonej dla $t \in [-\pi, \pi]$. Rozwinięcie kosinusowe, to $t = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (2k-1)^{-2} \cos(2kt - t)$.

Szczegóły przeliczeń przy rozwijaniu funkcji w szeregi Fouriera pokażę na następnym wykładzie.