6 Szeregi Fouriera -dokończenie

Szeregi Fouriera służą do przedstawiania nieregularnych funkcji. Ale występują, jak wiemy, pewne problemy z ich zbieżnością. Nawet dla funkcji ciągłych okresowych w $[-\pi, \pi]$ zbieżność w pewnych punktach może nie zachodzić. Z tego powodu, pomiędzy funkcją a jej szeregiem Fouriera zamiast znaku równości wstawiany jest zazwyczaj symbol podobieństwa: $\sim$, czyli

(1) $$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty (a_n \cos nt + b_n \sin nt).$$

Jednym z najogólniejszych warunków gwarantujących równość w powyższym wzorze są tzw. warunki Dirichleta.

Definicja. Mówimy, że funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest przedziałami monotoniczna, jeśli jej dziedzinę da się podzielić na skończoną ilość mniejszych przedziałów tak, by na każdym z nich f była monotoniczna.

Można dość łatwo zauważyć, że taką funkcję da się wyrazić jako różnicę dwu funkcji niemalejących (różnice funkcji monotonicznych -są to tzw. **funkcje o wahaniu ograniczonym**). Takie funkcje mają w każdym punkcie granice: lewo- i prawostronne, czyli mogą mieć jedynie punkty nieciągłości typu "skok".

Definicja. Funkcja f spełnia warunki Dirichleta w przedziale $[-\pi, \pi]$, jeśli jest przedziałami monotoniczna oraz w punktach skokowej nieciągłości wartość f jest średnią arytmetyczną granic: lewo- i prawostronnych w tym punkcie. Dodatkowo -na końcach przedziału powinno być

$$f(-\pi) = f(\pi) = \frac{1}{2}(\lim_{t\to-\pi^+} f(t) + \lim_{t\to\pi^-} f(t)).$$

Ostatni warunek jest w pewnym sensie warunkiem poprzednim -jeśli f traktujemy jako funkcję okresową (mają wtedy sens zarówno granica lewostronna w $-\pi$, (równa granicy lewostronnej w π) jak i prawostronna - w π.

Twierdzenie. Funkcje spełniające te warunki są w każdym punkcie równe sumom swoich szeregów Fouriera.

Warunki Dirichleta gwarantują zbieżność punktową szeregu, ale nie musi ona być jednostajna. Ta ostatnia zachodzi np. dla funkcji okresowych klasy C^1, co można wykazać sprawdzając jednostajny warunek Cauchy'ego i wykorzystując w tym celu nierówność Bessela -ale dla współczynników f'. Konkretnie, otrzymamy wówczas (dzięki całkowaniu przez części) rozwinięcie f' poprzez zróżniczkowany formalnie (czyli wyraz-po -wyrazie) szereg (1) otrzymując

(2). $$f'(t) \sim \sum_{n=1}^\infty nb_n \cos nt - na_n \sin nt$$

Często można też spotkać zespoloną postać szeregu Fouriera, której związek z postacią (1) można przeliczyć korzystając ze wzoru Eulera: $e^{in\phi} = \cos n\phi + i \sin n\phi$. Sam szereg Fouriera w postaci zespolonej, to szereg

$$\sum_{n=\infty}^{+\infty} \hat{f}(n)e^{int},$$

w którym dla $n \in \mathbb{Z}$ współczynniki dane są wzorem

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,dt.$$

Zaletą rozwinięcia w zespolony szereg Fouriera jest po pierwsze -jednolitość, w szczególności jednakowa norma wszystkich funkcji z układu ortogonalnego

e^{int}. Moduł tych funkcji jest stały -równy 1. Po drugie, funkcje z tego układu są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego.

Na koniec, parę przykładów.

Przykład Funkcja t^2 jest parzysta, spełnia warunki Dirichleta (a nawet ma jednostajnie zbieżny szereg Fouriera). Zamiast symbolu $\sim$ możemy więc pisać $=$. Ponieważ funkcja jest parzysta, współczynniki b_n są zerowe. Mamy teraz $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\,dt = \frac{2}{3}\pi^2$. Dla $n \in \mathbb{N}$, całkując przez części 2-krotnie, mamy

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2 \cos nt\,dt = \frac{2}{\pi}\big\{\frac{1}{n}t^2\,\sin nt|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi} 2t\sin nt\,dt\big\}.$$

Pierwszy składnik zeruje się (bo $\sin = 0$ na obydwu końcach przedziału), drugi ponownie całkujemy przez części (za każdym razem wykładnik potęgi t obniża się o jeden), w końcu otrzymując

$$a_n = \frac{4}{\pi n^2}\big\{t\cos nt|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\cos nt\,dt\big\} = \frac{4}{n^2}\cos\pi n = (-1)^n\frac{4}{n^2}.$$

Pamiętając, że wstawiamy $\frac{a_0}{2}$, mamy więc dla $t \in [-\pi, \pi]$ równości

$$t^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\cos\,nt.$$

Zwróćmy uwagę, że poza przedziałem $[-\pi, \pi]$ równości już nie ma, suma szeregu Fouriera jest funkcją okresową, jej wykresem jest "szlaczek" z kawałków paraboli przesuniętych o 2π. Podstawmy jeszcze $t = 0$. Ostatni szereg występujący we wzorze po prawej stronie jest wiec równy $\frac{\pi^2}{12}$.

W kolejnym przykładzie mamy funkcję $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$ na przedziale $[0, 2\pi]$, której wykresem jest fragment prostej. Nie można tu mówić o parzystości, bądź nieparzystości, bo dziedzina jest niesymetryczna względem zera. Ale możemy ją przedłużyć do okresowej na $\mathbb{R}$ i wtedy okaże się, że $\frac{1}{4}\pi + f(x)$ jest nieparzysta, równa $\frac{1}{2}(\pi - x)$ na przedziale $[0, \pi]$. W punkcie 0 jest skok, więc aby uzyskać warunek Dirichleta, trzeba zamienić wartość w zerze dla $\frac{1}{4}\pi + f$ na 0 i zamiat równości, użyjemy znaku $\sim$ we wzorze na rozwinięcie f. Stąd $a_0 = -\frac{\pi}{2}$, $a_n = 0\ \forall_{n\in\mathbb{N}}$. Natomiast $b_n = \frac{1}{n}$ (tu wystarczy raz skorzystać z całkowania przez części) . Tak więc,

$$\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \sim -\frac{\pi}{4} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx.$$

Aby dostosować się do warunku Dirichleta wartość $f(0)$ powinniśmy zmienić na średnią arytmetyczną z granic 1-stronnych: $f(0^+)$ oraz $f(2\pi^-)$. Tą średnią jest $-\frac{\pi}{4}$. Ponieważ $f(\frac{\pi}{2}) = 0 = -\frac{\pi}{4} + \sum\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}$, zaś dla n parzystych mamy $\sin(n\frac{\pi}{2}) = 0$, więc otrzymujemy równość

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Na koniec- jedna dość ważna uwaga: jeśli wartości funkcji zmienimy w skończonej ilości punktów, to całki nie ulegną zmianie, więc dostaniemy taki sam szereg Fouriera. Dla funkcji przedziałami monotonicznej możemy więc wyliczając współczynniki a_n, b_n z początku nie przejmować się pozostałymi warunkami Dirichleta (na wartości f w punktach skoków), dopiero wyliczając sumę szeregu Fouriera w danym punkkcie t_0 stwierdzić, że jest ona średnią z granic 1-stronnych w tym punkcie. Czasami możemy rozwijaną funkcję rozłożyć na sumę prostszych składników i dla nich z osobna wyliczać współczynniki - potem dopiero wyniki dodać. Chodzi tu o liniową zależność od funkcji takich funkcjonałów, jak całka, czy też przypisanie funkcji jej n-tego współczynnika, np. a_n.

Zamiast okresu 2π -można oczywiście rozważać szeregi Fouriera dla funkcji o dowolnym okresie L. Współczynniki są liczone po odpowiedniej zamianie zmiennych, twierdzenia o zbieżności pozostają takie same.

Oprócz układu trygonometrycznego rozważa się inne układy ortogonalne -jak np. funkcje Bessela, wielomiany Legendre'a i Hermite'a , Czebyszewa. Funkcje $\sin nt, \cos nt$ są wektorami własnymi operatora różniczkowego Laplace'a (druga pochodna) -a te inne układy są wektorami własnymi pewnych innych operatorów i mają bardzo konkretny sens fizyczny. Fourier używał swoich szeregów do badania rozchodzenia się ciepła. Jako pierwszy -rozwiązał jeden z problemów termodynamiki podając skuteczną metodę rozdzielania zmiennych w pewnych równaniach różniczkowych cząstkowych. Jego idee stanowiły jeden z punktów zwrotnych w rozwoju matematyki. Teoria mnogości, pojęcie całki Riemanna, wiele innych teorii matematycznych powstało w celu wyjaśnienia problemów, które zaczęły się pojawiać przy badaniu szeregów Fouriera. Powstała cała gałąź matematyki -zwana anlizą harmoniczną, badająca te zagadnienia. Polscy matematycy mają w niej dość istotny udział.