1. Wprowadzenie

Do analizy i syntezy układów sterowania konieczna jest znajomość modeli matematycznych obiektów dynamicznych wchodzących w skład danych układów. Model matematyczny można otrzymać na drodze obróbki informacji zdobytej w trakcie doświadczeń na obiekcie. Model obiektu jest tym lepszy, im dokładniej odzwierciedla procesy zachodzące w obiekcie w sensie jakościowym i ilościowym. W opisie brane są pod uwagę obiekty, które można opisać za pomocą liniowych równań różniczkowych zwyczajnych o stałych współczynnikach

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \cdots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t), \tag{1}$$

przy czym $u(t)$ jest wejściem obiektu, a $y(t)$ jego wyjściem natomiast $n \geq m$.

Jest to model stacjonarny (parametry $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0, b_m, b_{m-1}, \dots, b_0$ nie zmieniają swoich wartości w czasie) oraz liniowy (nie występują funkcje np. pierwiastkowe czy kwadratowe). W dalszym opisie będziemy brać pod uwagę jedynie obiekty o jednym wejściu i wyjściu – jak na rysunku poniżej:

Transmitancja operatorowa $G(s)$ jest stosunkiem transformaty Laplace'a sygnału wyjściowego do transformaty Laplace'a sygnału wejściowego przy zerowych warunkach początkowych:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{L\{y(t)\}}{L\{u(t)\}} = \frac{b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^m + \cdots + a_1 s + a_0}, \tag{2}$$

przy czym $L\{\cdot\}$ oznacza transformatę Laplace'a, natomiast $y(t)$ i $u(t)$ oznaczają sygnały wyjścia i wejścia w dziedzinie czasu, a $Y(s)$ i $U(s)$ ich odpowiedniki poddane transformacie Laplace'a.

Do badania obiektów używany jest zwykle sygnał skoku jednostkowego $\mathbf{1}(t)$ zdefiniowany następująco:

$$u(t) = \mathbf{1}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 \; dla \; t \geq 0 \\ 0 \; dla \; t < 0 \end{cases} \tag{3}$$

W dalszej części instrukcji omówione zostaną podstawowe człony dynamiczne.

2. Podstawowe człony dynamiczne

2.1. Obiekt proporcjonalny

Obiekt proporcjonalny opisany jest równaniem różniczkowym:

$$y(t) = kx(t) \tag{4}$$

Parametr k jest tzw. wzmocnieniem obiektu proporcjonalnego.

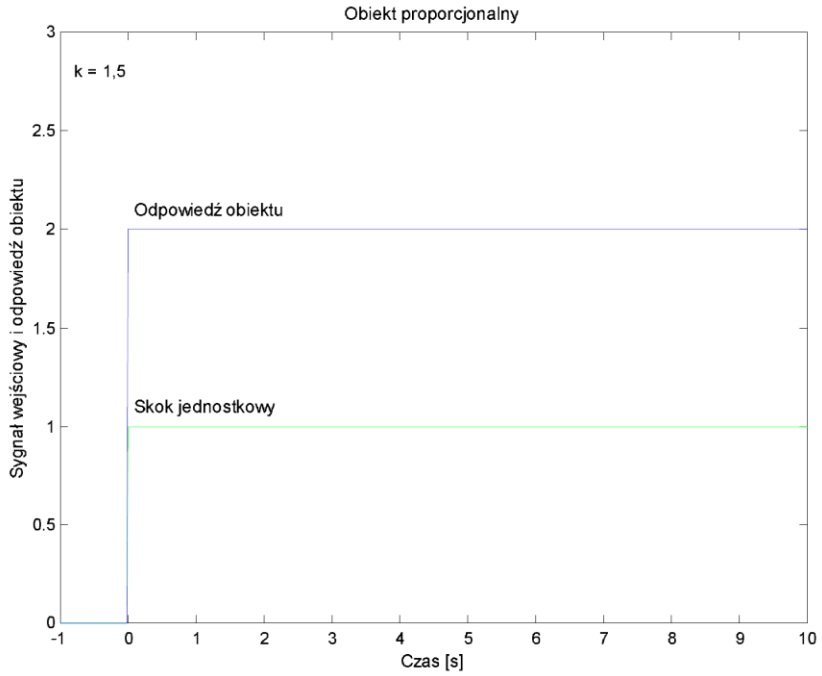
Transmitancja obiektu proporcjonalnego ma postać:

$$G(s) = k \tag{5}$$

a jego odpowiedź na skok jednostkowy kształtuje się następująco:

$$y(t) = k\,\mathbf{1}(t) \tag{6}$$

Rysunek poniżej ilustruje wymuszenie – sygnał skoku jednostkowego $\mathbf{1}(t)$ podawany na wejście obiektu oraz jego odpowiedź.



2.2. Obiekt inercyjny I rzędu

Obiekt inercyjny I rzędu opisany jest równaniem różniczkowym:

$$T\dot{y}(t) + y(t) = kx(t) \tag{7}$$

przy czym T to stała czasowa, natomiast k to wzmocnienie obiektu.

Transmitancja obiektu inercyjnego I rzędu ma postać:

$$G(s) = \frac{k}{Ts+1} \tag{8}$$

a jego odpowiedź na skok jednostkowy kształtuje się następująco:

$$y(t) = k\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) \tag{9}$$

Wzór ten otrzymuje się po przekształceniu zależności (2) :

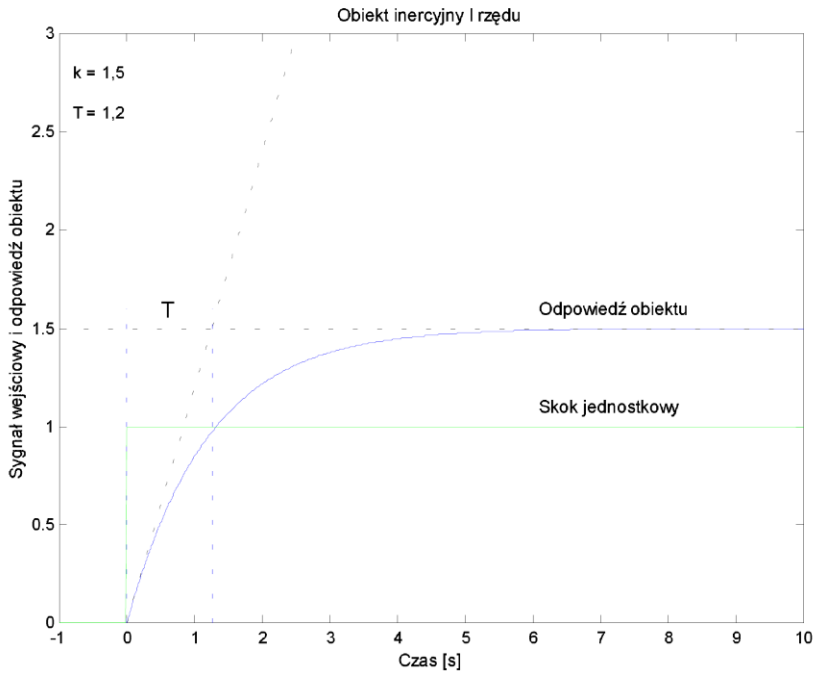
$$Y(s) = G(s)\,U(s) \tag{10}$$

i podstawieniu za $U(s)$ wartości $\frac{1}{s}$ – transformaty skoku jednostkowego. W wyniku tych przekształceń otrzymujemy bowiem

$$Y(s) = \frac{k}{Ts+1}\frac{1}{s} = \frac{k}{s} - \frac{kT}{Ts+1} = \frac{k}{s} - \frac{k}{s+\frac{1}{T}} \tag{11}$$

co po wykonaniu odwrotnej transformacji i wykorzystaniu tablicy transformat (np. stąd: http://katmat.pb.bialystok.pl/~raj/energetyka/En_Mat2_dodatek3.pdf czy stąd http://www.cs.put.poznan.pl/mnowak/MZB/trans.pdf) daje (9).

Rysunek poniżej ilustruje wymuszenie – sygnał skoku jednostkowego $\mathbf{1}(t)$ podawany na wejście obiektu oraz jego odpowiedź.



Przyjmuje się, że przebieg odpowiedzi jednostkowej ulega ustaleniu gdy różnica między wartością chwilową a ustaloną mieści się w granicach 3-5%. Znając wartość ustaloną oraz wartość wzmocnienia skoku jednostkowego można wyliczyć wzmocnienie obiektu korzystając ze wzoru $k = \frac{y(\infty)}{u(\infty)}$.

Stała czasowa T to czas po którym proces osiągnąłby wartość ustaloną, gdyby odpowiedź narastała ze stałą i maksymalną prędkością równą prędkości początkowej. Stałą tą można odczytać z wykresu na dwa sposoby:

1. Przez narysowanie stycznej do przebiegu odpowiedzi na skok jednostkowy w punkcie początkowym. Punkt przecięcia tej stycznej z linią oznaczającą wartość ustaloną wyznacza stałą czasową T (ten sposób pokazano na rysunku powyżej).
2. Przez znalezienie punktu w którym odpowiedź obiektu inercyjnego I rzędu osiągnie wartość 0,637 wartości ustalonej. Przyjmując bowiem t=T we wzorze (9) dostaje się $y(T)=k(1-e^{-1})$ co daje y(T)=0,632k.

2.3. Obiekt różniczkujący idealny

Obiekt różniczkujący idealny opisany jest równaniem różniczkowym:

$$y(t) = \frac{du(t)}{dt} \tag{12}$$

Transmitancja obiektu inercyjnego I rzędu ma postać:

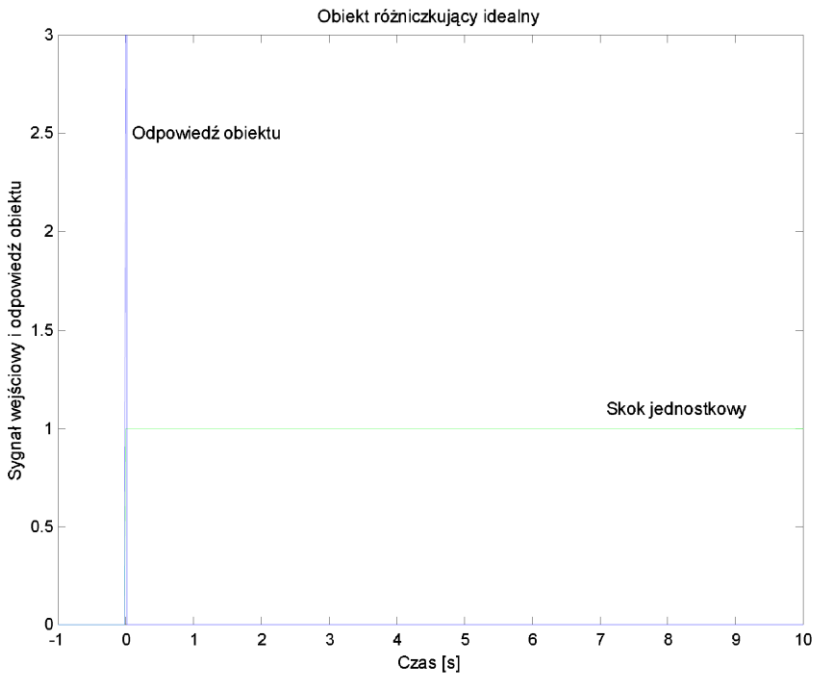
$$G(s) = s \tag{13}$$

a jego odpowiedź na skok jednostkowy kształtuje się następująco:

$$y(t) = \delta(t) \tag{14}$$

gdzie $\delta(t)$ to impuls jednostkowy (tzw. delta Diraca) :

$$\delta(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \infty \; dla \; t = 0 \\ 0 \; dla \; |t| > 0 \end{cases} \tag{15}$$



który spełnia warunek $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) = 1$.

2.4. Obiekt różniczkujący z inercją I rzędu

Obiekt różniczkujący z inercją I rzędu opisany jest równaniem różniczkowym:

$$T\dot{y}(t) + y(t) = k\dot{u}(t) \tag{16}$$

przy czym k jest współczynnikiem wzmocnienia a T stałą czasową Transmitancja obiektu różniczkującego z inercją I rzędu ma postać:

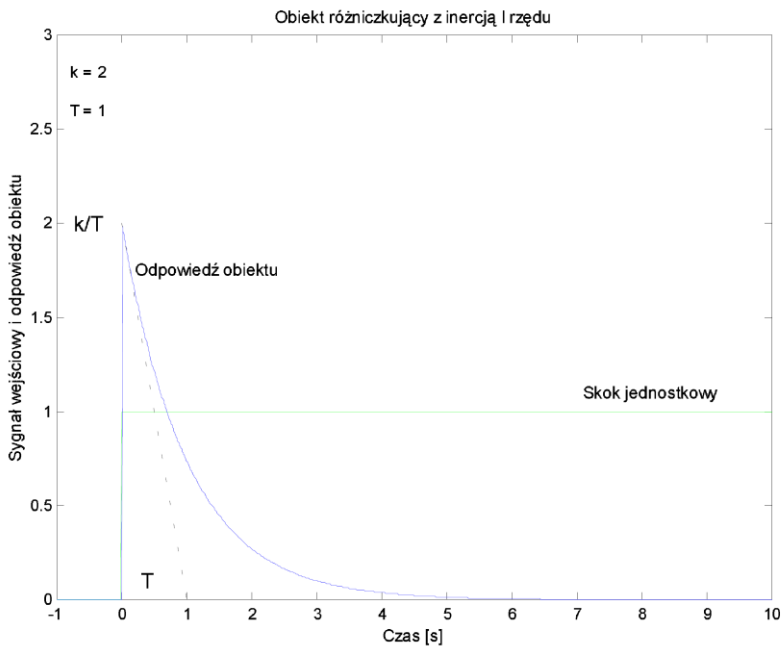
$$G(s) = \frac{ks}{Ts+1} \tag{17}$$

zaś jego odpowiedź na skok jednostkowy kształtuje się następująco:

$$y(t) = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}} \tag{18}$$

Można ją wyznaczyć wykonując odwrotną transformatę Laplace'a sygnału wyjściowego w dziedzinie operatora s:

$$Y(s) = \frac{ks}{Ts+1} \frac{1}{s} = \frac{k}{Ts+1} \tag{19}$$



Stałą czasową można wyznaczyć rysując styczną do wykresu w punkcie początkowym odpowiedzi a następnie wyznaczyć T jako punkt przecięcia stycznej i wartości ustalonej. Wartość wzmocnienia określa się następnie uwzględniając fakt, że wartość odpowiedzi w chwili początkowej odpowiada iloczynowi $\frac{k}{T}$.

2.5. Obiekt całkujący idealny

Obiekt całkujący idealny opisany jest równaniem różniczkowym:

$$T_i \dot{y}(t) = u(t) \tag{20}$$

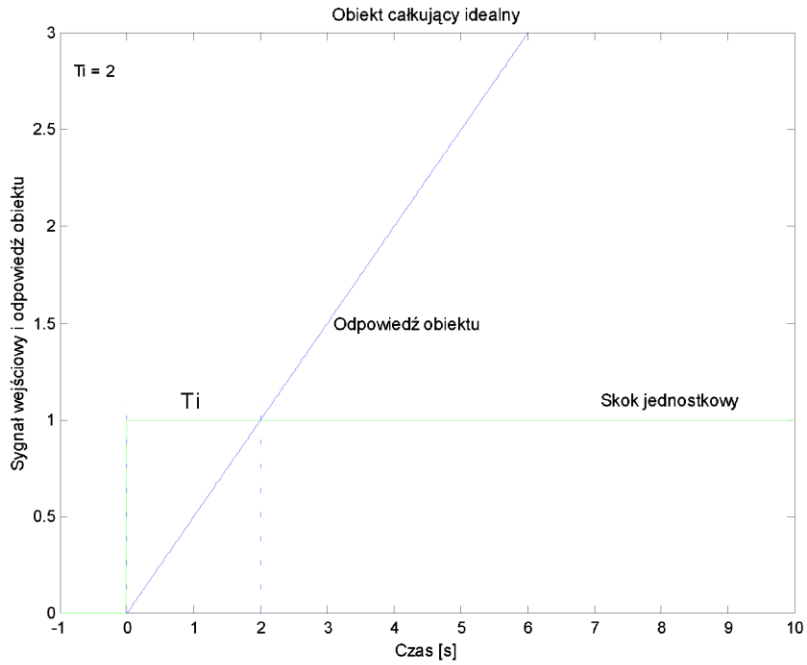
przy czym T_i jest stałą całkowania. Transmitancja tego obiektu ma postać:

$$G(s) = \frac{1}{T_i s} \tag{21}$$

Odpowiedź obiektu całkującego na skok jednostkowy kształtuje się następująco:

$$y(t) = \frac{t}{T_i} \tag{22}$$

Wynika ona w sposób oczywisty z odwrotnej transformaty Laplace'a sygnału wyjściowego w dziedzinie operatora s.



2.6. Obiekt całkujący z inercją I rzędu

Obiekt całkujący z inercją I rzędu opisany jest równaniem różniczkowym:

$$T_i T \ddot{y}(t) + T_i \dot{y}(t) = u(t) \tag{23}$$

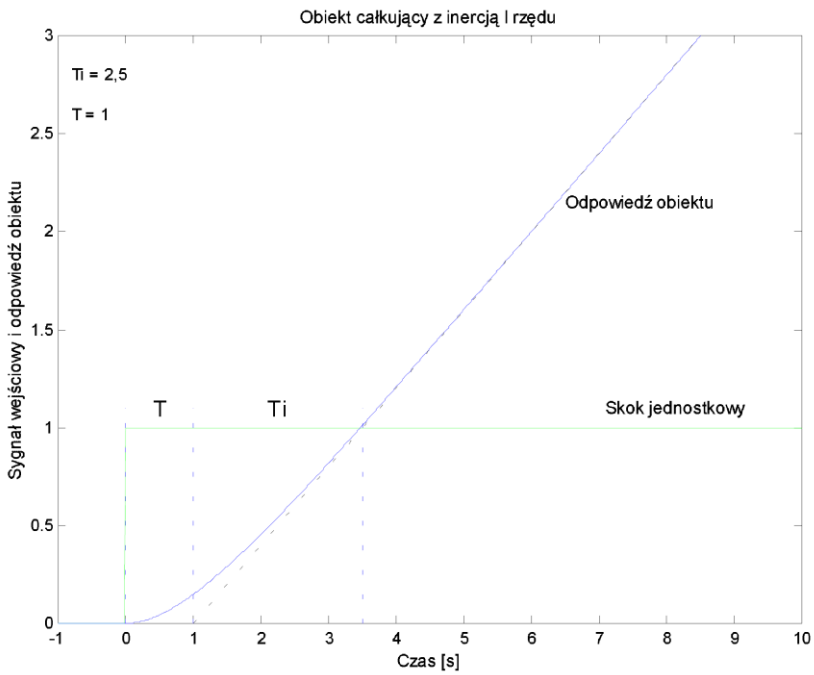
przy czym T_i jest czasem zdwojenia, zaś T stałą czasową układu. Transmitancja tego obiektu ma postać:

$$G(s) = \frac{1}{T_i s\,(Ts+1)} \tag{24}$$

Odpowiedź obiektu całkującego z inercją I rzędu na skok jednostkowy kształtuje się następująco:

$$y(t) = \frac{1}{T_i}\left(t - T\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)\right) \tag{25}$$

Wynika ona oczywiście również z odwrotnej transformaty Laplace'a sygnału wyjściowego w dziedzinie operatora s.



2.7. Obiekt inercyjny II rzędu

Obiekt inercyjny II rzędu opisany jest równaniem różniczkowym:

$$T_1 T_2 \ddot{y}(t) + (T_1 + T_2)\,\dot{y}(t) + y(t) = ku(t) \tag{26}$$

przy czym T_1, T_2 to stałe czasowe obiektu a k jego wzmocnienie. Transmitancja tego obiektu ma postać:

$$G(s) = \frac{k}{T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2)s + 1} \tag{27}$$

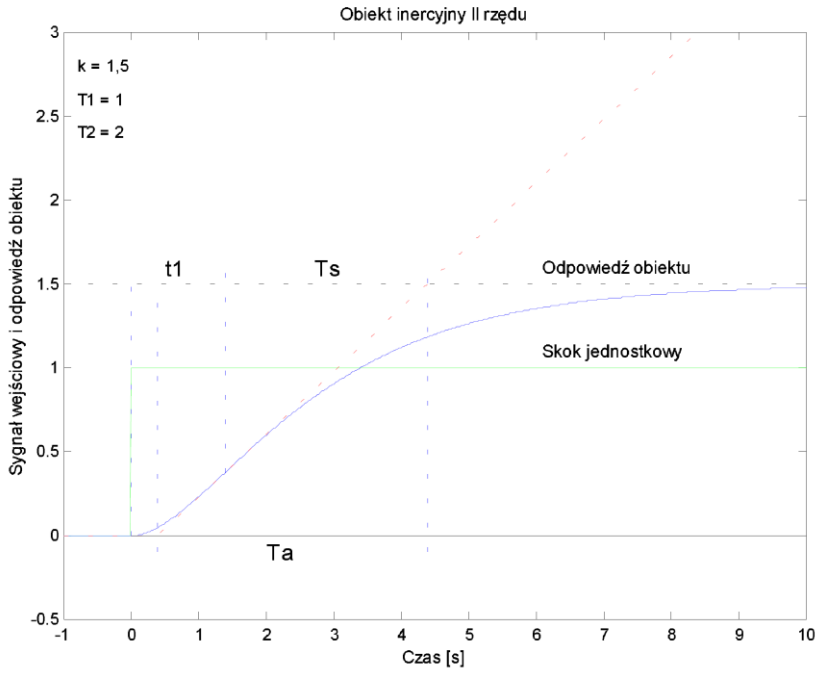
Odpowiedź obiektu inercyjnego II rzędu na skok jednostkowy kształtuje się następująco:

$$y(t) = k\left(1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}}\right) \tag{28}$$

Wynika ona oczywiście również z odwrotnej transformaty Laplace'a sygnału wyjściowego w dziedzinie operatora s. Czas t_1 zaznaczony na wykresie odpowiedzi jest czasem przegięcia, można go obliczyć ze wzoru:

$$t_1 = \frac{T_1 T_2}{T_2 - T_1} \ln \frac{T_2}{T_1} \tag{29}$$

otrzymanego dzięki podwójnemu zróżniczkowaniu wzoru (28). Czas T_s to po prostu $T_1 + T_2$ a $T_a = T_1 \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{T_2}{T_2 - T_1}}$. Korzystając z tych zależności można wyznaczyć stałe T_1 i T_2.



2.8. Obiekt oscylacyjny

Obiekt oscylacyjny opisany jest równaniem różniczkowym:

$$T_0^2\ddot{y}(t) + 2\xi\, T_0\dot{y}(t) + y(t) = ku(t) \tag{30}$$

przy czym T_0 to okres drgań własnych nietłumionych, k – wzmocnieniem obiektu zaś ξ (xi) współczynnikiem tłumienia $\xi \in [0,1)$. Transmitancja tego obiektu ma postać:

$$G(s) = \frac{k}{T_0 s^2 + 2\xi T_0 s + 1} \tag{31}$$

Często spotykany jest także zapis z użyciem oznaczeń $\omega_0 = 1/T_0$ (częstotliwość drgań własnych) oraz $\delta = \frac{\xi}{T_0} = \xi\omega_0$ (stała tłumienia). Wtedy transmitancję można zapisać jako:

$$G(s) = \frac{k\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2} \tag{32}$$

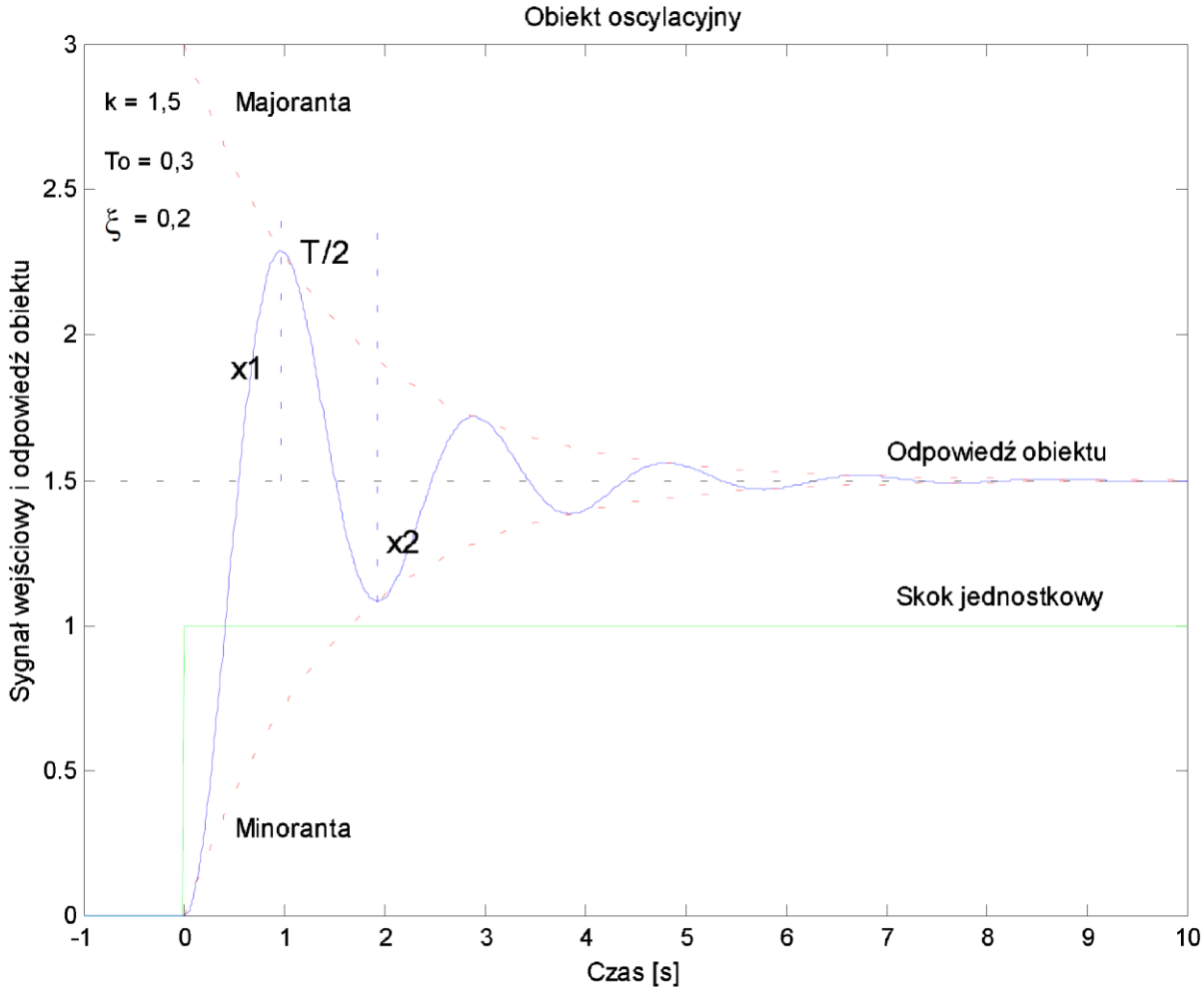
Odpowiedź obiektu oscylacyjnego na skok jednostkowy kształtuje się następująco:

$$y(t) = k\left(1 - \frac{e^{-\delta t}}{\omega}(\omega\cos\omega t + \delta\sin\omega t)\right) \tag{33}$$

gdzie $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ jest częstotliwością drgań własnych tłumionych. Inaczej:

$$y(t) = k\left(1 - \frac{e^{-\xi\omega_0 t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\omega_0\sqrt{1-\xi^2}t + \varphi)\right) \tag{34}$$

przy czym $\varphi = \arctan\frac{\omega}{\delta}$.



Parametry obiektu wyznaczamy według następujących kroków:

1) Z wykresu odpowiedzi obiektu znaleźć wartość $\frac{T}{2}$ oraz amplitudy pierwszych ekstremów x_1 i x_2.
2) Ze wzoru $\omega = \frac{2\pi}{T}$ wyznaczyć częstotliwość ω.
3) Ze wzoru $\xi = \frac{\ln\frac{x_1}{x_2}}{\sqrt{\pi^2+\left(\ln\frac{x_1}{x_2}\right)^2}}$ wyliczyć współczynnik tłumienia.
4) Wyznaczyć na podstawie znajomości ω i ξ stałą tłumienia $\delta = \frac{\xi\omega}{\sqrt{1-\xi^2}}$.
5) I wreszcie: częstotliwość drgań własnych nietłumionych ω_0 (a co za tym idzie i T_0) można uzyskać z zależności $\omega_0 = \sqrt{\omega^2 + \delta^2}$.

Kształt odpowiedzi obiektu silnie zależy od ξ. Dla wartości zero uzyskuje się drgania niegasnące o stałej amplitudzie (brak rozpraszania energii). Gdy $\xi \geq 1$ odpowiedź ma charakter aperiodyczny i obiekt ten przchodzi w inercyjny II rzędu.

3. Przebieg ćwiczenia

W folderze przedmiotu znajdziecie Państwo przebiegi odpowiedzi 5 obiektów dedykowane dla Państwa grupy. Zawierają one zarówno sygnał czasowy jak i odpowiadające mu wartości $y(t)$. Należy dla każdego z obiektów:

1) Wykreślić przebieg odpowiedzi.
2) Zidentyfikować typ obiektu (np. obiekt całkujący).
3) Określić parametry obiektu (tj. np. k i T w przypadku obiektu inercyjnego I rzędu) i podać jego transmitancję. W przypadku obiektu całkującego idealnego, całkującego z inercją I rzędu, różniczkującego z inercją należy zastanowić się nad analityczną metodą wyznaczania T, T_i (poprzez analogię do obiektu inercyjnego I rzędu).
4) Wykreślić dla każdego obiektu – na jednym wykresie - zarówno rzeczywisty przebieg (z punktu 1) jak i idealny, wynikający z otrzymanych parametrów (punkt 3).
5) Znaleźć jeden przykład rzeczywistego procesu/urządzenia które może stanowić przykład obiektu danego typu.