

## 1. Cel laboratorium

A) Przedstawienie zagadnienia sterowania optymalnego w systemach liniowych z kwadratowym wskaźnikiem jakości.

B) Zapoznanie się z programem symulującym działanie tego typu regulatora (zawartym w pliku *L4\_optymal\_program.zip*) i przetestowanie jego własności (określenie różnych parametrów kwadratowego wskaźnika jakości, czasu symulacji, warunków początkowych połączone z oceną jakości sterowania na podstawie uzyskanej dokładności osiągnięcia celu oraz kosztu sterowania). Program ten został stworzony w ramach pracy magisterskiej pt. "Sterowanie optymalne z kwadratowym wskaźnikiem jakości" przez mgr. inż. Tomasza Mrzygłoda, pod kierunkiem prof. dr hab. inż. Piotra Kulczyckiego.

## 2. Podstawowe pojęcia

Dany jest obiekt opisany równaniem różniczkowym:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad (1)$$

gdzie:

$x(t)$  – n-wymiarowy wektor stanu,

$u(t)$  – p-wymiarowy wektor sterowania,

Składowe  $f_i$  wektora  $f$  są funkcjami ciągłymi i ich pochodne cząstkowe  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$  są ciągłe względem  $x(t)$  i

$u(t)$  oraz przedziałami ciągłe względem  $t$  ( $i, j=1, 2, \dots, n$ ). Wektor stanu  $x(t)$  jest dostępny.

Składowe  $u_i$  ( $i=1, 2, \dots, p$ ) wektora sterowania  $u(t)$  są funkcjami ograniczonymi, przedziałami ciągłymi. W ogólnym przypadku można założyć też, że spełniają one ograniczenia postaci:

$$g_i(u_1, u_2, \dots, u_p) \leq 0 \text{ dla } i=1, 2, \dots, m \quad (2)$$

Sterowanie  $u(t)$ , które spełnia ograniczenia (2) nazywa się **sterowaniem dopuszczalnym**, a zbiór wszystkich takich sterowań oznacza się jako  $D_u$  (**zbiór sterowań dopuszczalnych**).

Niech dany będzie **wskaźnik jakości J**, który najczęściej występuje w postaci:

a) **Calkowej:**

$$J(u(t)) = \int_{t_0}^T f_0(x(t), u(t), t) dt, \quad (3)$$

gdzie:

$f_0$  jest funkcją różniczkowalną (nazywaną funkcją strat chwilowych)

T jest chwilą końcową sterowania.

**b) Funkcji stanu końcowego:**

$$J(u(t)) = G(x_k), \quad (4)$$

gdzie:

G – funkcja skalarna stanu końcowego  $x_k(T)$ , która spełnia takie same założenia jak składowe  $f_i$  wektora f.

W szczególnym przypadku, gdy  $f_0 \equiv 1$  wskaźnik jakości przyjmuje postać:

$$J(u) = \int_{t_0}^T dt = T - t_0 \quad (5)$$

i jest jednym z najważniejszych – obok kwadratowego wskaźnika jakości – a zagadnienie to określane jest mianem **sterowania czasoptymalnego**.

Wskaźniki jakości z punktu widzenia analizy matematycznej nazywa się **funkcjonalami**, tzn. funkcjami, których argumentami są funkcje, a wartościami – liczby rzeczywiste.

**Zadanie sterowania optymalnego** wiąże się z pewnymi warunkami, które są nałożone na:

- a) trajektorie stanu, między innymi na  $x_0=x_0(t)$  – stan początkowy i  $x_k=x(T)$  – stan końcowy,
- b) czas trwania sterowania  $T-t_0$ .

Ze względu na czas początkowy i końcowy na trajektorie mogą być nałożone różne warunki np.

- a)  $x_0=x_0(t)$  – stan początkowy i  $x_k=x(T)$  – stan końcowy są zadane,
- b)  $x_0=x_0(t)$  – stan początkowy zadany,  $x(T)$  – stan końcowy swobodny,
- c)  $x_0=x_0(t)$  – stan początkowy zadany,  $x(T)$  – stan końcowy spełnia warunek:

$$\sum_{i=1}^n k_i x_i(T) = 0, \text{ gdzie } k_i \text{ – stałe współczynniki,}$$

- d) wektor stanu spełnia następujące ograniczenia:

$$x_i(t) \leq a, \text{ przy czym } a \text{ jest daną liczbą}$$

lub ogólniej

$$h(x(t)) \leq 0, \text{ h jest daną funkcją skalarną,}$$

- e) wektor stanu spełnia następujące ograniczenia całkowe:

$$\int_{t_0}^T x_i^2(t) dt \leq a \text{ lub } \int_{t_0}^T |x_i(t)| \leq a, \text{ gdzie } a \text{ jest daną liczbą dodatnią.}$$

**Sterowaniem optymalnym**  $u_{opt}$  nazywa się sterowanie należące do zbioru sterowań dopuszczalnych  $D_u$ , które dla danych równań obiektu (1) z ograniczeniami (2) minimalizuje wskaźnik jakości (3), czyli realizuje:

$$\min_{u \in D_u} J(u). \quad (6)$$

Innymi słowy, **zadanie sterowania optymalnego** sprowadza się do wyznaczenia sterowania optymalnego  $u_{opt}$  ze zbioru sterowań dopuszczalnych  $D_u$ , dla którego wskaźnik jakości (3) przyjmuje postać minimalną dla układu dynamicznego opisanego równaniem (1).

**Synteza regulatora optymalnego** określa się zadanie polegające na wyznaczeniu związku pomiędzy sterowaniem optymalnym  $u_{opt}$ , a wektorem stanu  $x(t)$  i czasem  $t$ , które pozwalają na wyznaczenie sterowania optymalnego w układzie zamkniętym.

## 2.1. Sterowanie optymalne dla układów liniowych z kwadratowym wskaźnikiem jakości

Dany jest liniowy niestacjonarny układ dynamiczny opisany równaniem:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) \end{cases} \quad (7)$$

z warunkiem początkowym:

$$x(t_0) = x_0$$

gdzie:

$x(t)$  jest n-wymiarowym wektorem stanu,

$u(t)$  jest p-wymiarowym wektorem sterowania,

$y(t)$  jest m-wymiarowym wektorem wyjścia.

$A(t)$  jest macierzą stanu o wymiarach  $n \times n$

$B(t)$  jest macierzą sterowań o wymiarach  $n \times p$

$C(t)$  jest macierzą wyjścia o wymiarach  $m \times n$

Na wektor sterowania nie są nałożone żadne ograniczenia, a elementy macierzy  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $C(t)$  są ciągłymi, ograniczonymi funkcjami czasu  $t$ .

Przyjmując, że dany jest m-wymiarowy wektor  $z(t)$ , to zadaniem regulatora będzie tak sterować obiektem, który jest opisany równaniami (7), aby wektor sygnałów wyjściowych  $y(t)$  był jak najbardziej zbliżony do wektora  $z(t)$ , który nazywany jest **wektorem żądanych sygnałów wyjściowych**.

Różnice między tymi dwoma wektorami są zdefiniowane jako **wektor uchybu  $e(t)$** , który przedstawia wzór:

$$e(t) = z(t) - y(t) \quad (8)$$

Celem regulatora jest więc znalezienie takiego sterowanie  $u(t)$ , przy którym uchyb  $e(t)$  jest najmniejszy.

Sterowanie optymalne będzie poszukiwane przy użyciu **kwadratowego wskaźnika jakości**. Funkcjonał ten przyjmuje postać:

$$J(u) = \frac{1}{2} e^T(T) F e(T) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T [e(t)^T Q(t) e(t) + u(t)^T R(t) u(t)] dt \quad (9)$$

gdzie:

$F$  to macierz dodatnio półokreślona\*\* o wymiarach  $m \times m$  i współczynnikach niezależnych od czasu,

$Q(t)$  to macierz dodatnio półokreślona o wymiarach  $m \times m$ , której elementy są ciągłymi ograniczonymi funkcjami czasu  $t$ ,

$R(t)$  to macierz dodatnio określona o wymiarach  $p \times p$ , której elementy są ciągłymi ograniczonymi funkcjami czasu  $t$ ,

$T$  (chwila końcowa) jest zadana.

\*\*Rzeczywista symetryczna macierz  $M$  jest dodatnio półokreślona, jeżeli  $\langle a, Ma \rangle \geq 0$  dla wszystkich  $a \neq 0$

$\frac{1}{2} e^T(T) F e(T)$  określa się jako koszt końcowy, którego zadaniem jest zapewnienie małej wartości uchybu  $e(t)$  w chwili końcowej  $T$ . Im wartość macierzy  $F$  jest większa, tym bardziej oczekuje się jak najmniejszej wartości uchybu w chwili końcowej. Jeśli wartość  $e(t)$  w chwili końcowej nie jest szczególnie istotna w czasie projektowania układu, przyjmuje się  $F \equiv 0$ .

$\int_{t_0}^T e(t)^T Q(t) e(t) dt$  to również koszt wynikający z niezachowania reżimu technologicznego. Będzie on mały, kiedy odpowiadający mu uchyb  $e(t)$  jest niewielki, w szczególnym przypadku dla  $e(t)=0$  mówi się o braku kosztów tego typu. W tej sytuacji straty, jakie ponosi układ przy dużych uchybach są znacznie większe od tych, które występują przy małych uchybach. Gdyby macierz  $F$  oraz  $Q(t)$  były ujemnie określone, to minimalizacja funkcjonału odbywałaby się dla jak największego uchybu  $e(t)$ , co nie byłoby zgodne z oczekiwaniami.

$\int_{t_0}^T u(t)^T R(t) u(t) dt$  - wyrażenie to stanowi ocenę kosztów sterowania, przy czym traktuje się je również

jako energię elektryczną zużyta w przedziale czasu  $[t_0, T]$  (tłumaczenie: przyjmując, że  $u(t)$  jest wielkością proporcjonalną do prądu lub napięcia,  $u^2(t)$  jest analogicznie proporcjonalne do mocy, a

$\int_{t_0}^T u^2(t) dt$  - do energii traconej w przedziale czasu  $[t_0, T]$ ).

Założenie o dodatniej określoności macierzy  $R(t)$  w tej sytuacji jest zgodne z uwarunkowaniami realnych procesów, zapewnia, że koszty sterowania są dodatnie dla wszystkich  $u(t) \neq 0$ . Wymaganie, aby  $R(t)$  było macierzą dodatnio określoną, a nie dodatnio półokreśloną stanowi warunek istnienia sterowania o skończonej wartości.

## 2.2 . Zagadnienie stabilizacji stanu

Zagadnienie to dotyczy utrzymywania stanu układu w pobliżu zera, przy jak najmniejszym zużyciu energii. Tak sformułowany problem syntezy regulatora optymalnego może być rozwiązany z wykorzystaniem zasady maksimum Pontriagina.

Wyznaczenie sterowania optymalnego realizującego zagadnienie stabilizacji stanu przedstawia poniższy algorytm.

1. Dla danego układu nieliniowego opisanego równaniem:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

oraz wskaźnika jakości postaci:

$$J(u) = \frac{1}{2} x^T(T)Fx(T) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T [x(t)^T Q(t)x(t) + u(t)^T R(t)u(t)] dt$$

zakładając, że:

$u(t)$  nie jest ograniczone,

$R(t)$  jest macierzą symetryczną dodatnio określoną,

$F$  i  $Q(t)$  to macierze symetryczne dodatnio półokreślone,

$T$  jest zadane,

określa się równanie Riccatiego:

$$\dot{K}(t) = -K(t)A(t) - A^T(t)K(t) + K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t) - Q(t)$$

2. Macierz  $K(t)$  wyznacza się rozwiązując układ  $n(n+1)/2$  nieliniowych równań różniczkowych pierwszego rzędu, których współczynniki są zmienne w czasie. Macierz ta spełnia warunek graniczny:

$$K(T) = F$$

3. Poszukiwane sterowanie optymalne ma postać:

$$u(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)K(t)x(t),$$

a minimalna wartość kwadratowego wskaźnika jakości wynosi:

$$J_{\min} = \frac{1}{2} x^T(t)K(t)x(t), \text{ dla } t \in [t_0, T]$$

## 2.3 . Zagadnienie stabilizacji sygnału wyjściowego

Zagadnienie to dotyczy utrzymywania sygnału wyjściowego układu  $y(t)$ , a nie stanu układu  $x(t)$ , w pobliżu zera.

Rozwiązanie problemu stabilizacji sygnału wyjściowego przedstawia poniższy algorytm:

1. Dla danego układu niestacjonarnego opisanego równaniami:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) \end{cases}$$

oraz kwadratowego wskaźnika jakości postaci:

$$J(u) = \frac{1}{2} y^T(T)Fy(T) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T [y(t)^T Q(t)y(t) + u(t)^T R(t)u(t)] dt$$

przyjmując, że:

$u(t)$  nie jest ograniczone,

$R(t)$  jest macierzą symetryczną dodatnio określoną,

$F$  i  $Q(t)$  są macierzami symetrycznymi dodatnio póło określonymi,

$T$  jest zadane.

równanie Riccatiego przyjmuje postać:

$$\dot{K}(t) = -K(t)A(t) - A^T(t)K(t) + K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t) - C^T(t)Q(t)C(t)$$

Przyjmuje się także, że układ opisany w/w równaniami jest obserwowalny.

2. Macierz  $K(t)$  wyznacza się rozwiązując układ  $n(n+1)/2$  nieliniowych równań różniczkowych pierwszego rzędu, których współczynniki są zmienne w czasie. Macierz ta spełnia warunek graniczny:

$$K(T) = C^T(T)FC(T)$$

3. Poszukiwane sterowanie optymalne ma postać:

$$u(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)K(t)x(t)$$

Równanie różniczkowe określające stan układu optymalnego jest następujące:

$$\dot{x}(t) = (A(t) - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t))x(t),$$

a minimalna wartość kwadratowego wskaźnika jakości wynosi:

$$J_{\min} = \frac{1}{2} x^T(t)K(t)x(t), \text{ dla } t \in [t_0, T]$$

## 2.4 . Zagadnienie nadążania

W zagadnieniu tym żąda się od regulatora, aby wektor wyjścia  $y(t)$  był zbliżony do zadanego,  $m$ -wymiarowego wektora  $z(t)$ , który przedstawia żądany sygnał wyjściowy układu.

Rozwiązanie problemu nadążania przedstawia poniższy algorytm:

1. Dany jest obserwowalny, linowy układ dynamiczny opisany układem równań:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) \end{cases}$$

oraz kwadratowy wskaźnik jakości postaci:

$$J(u) = \frac{1}{2} e^T(T) F e(T) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T [e(t)^T Q(t) e(t) + u(t)^T R(t) u(t)] dt$$

gdzie:

$u(t)$  nie jest ograniczone,

$R(t)$  jest macierzą symetryczną dodatnio określoną,

$F$  i  $Q(t)$  są macierzami symetrycznymi dodatnio póło określonymi,

$T$  jest zadane.

2.  $K(t)$  i  $g(t)$  są rozwiązaniami następujących równań różniczkowych:

$$\begin{aligned} \dot{K}(t) + K(t)A(t) + A^T(t)K(t) - K(t)S(t)K(t) + V(t) &= 0, \\ \dot{g}(t) - [K(t)S(t) - A^T(t)]g(t) + W(t)z(t) &= 0, \end{aligned}$$

które spełniają następujące warunki brzegowe:

$$\begin{aligned} K(T) &= C^T(T)FC(T), \\ g(T) &= C^T(T)Fz(T). \end{aligned}$$

3. Poszukiwane sterowanie optymalne przyjmuje teraz postać:

$$u(t) = R^{-1}(t)B^T(t)[g(t) - K(t)x(t)].$$

Równanie różniczkowe określające stan układu optymalnego jest następujące:

$$\dot{x}(t) = [A(t) - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t)]x(t) + B(t)R^{-1}(t)B^T(t)g(t).$$

Minimalna wartość kwadratowego wskaźnika jakości wynosi:

$$J_{\min} = \frac{1}{2} x^T(t)K(t)x(t) - g^T(t)x(t) + \varphi(t),$$

gdzie:

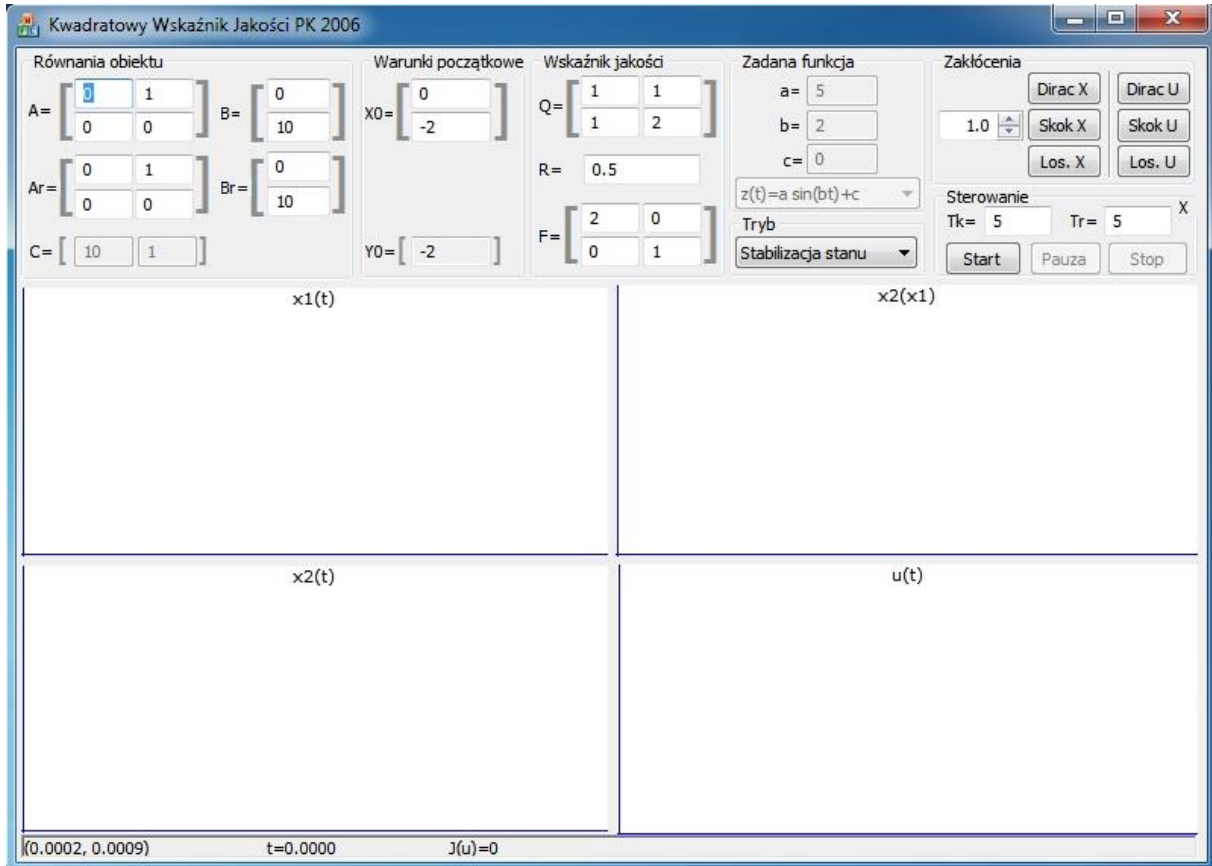
$$\dot{\varphi}(t) = -\frac{1}{2} z^T(t) Q(t) z(t) - g^T(t) B(t) R^{-1}(t) B^T(t) g(t) \text{ dla } t \in [t_0, T],$$

$$\varphi(T) = z^T(T) K(T) z(T).$$



### 3. Opis programu „KWJ PK 2006”,

Program autorstwa mgr. inż. Tomasza Mrzygłoda, symuluje działanie regulatora optymalnego z kwadratowym wskaźnikiem jakości



Rysunek 1: Wygląd głównego okna programu

Po uruchomieniu programu istnieje możliwość określenia:

- parametrów równania stanu,
- warunków początkowych,
- parametrów wskaźnika jakości,
- trybu pracy (stabilizacja stanu, stabilizacja sygnału wyjścia, nadążanie).
- funkcji zadanej  $z$  w przypadku trybu nadążania,
- zakłóceń losowych na stan lub sterowanie z przedziału określonego jako  $a[0,001;0,01]$ , gdzie  $a$  jest wartością ustawioną w oknie „Zakłócenia”,
- zakłóceń na stan lub sterowanie, o stałej wartości ustalonej w oknie „Zakłócenia”,
- zakłóceń na stan lub sterowanie w postaci delty Diracka określanej jako  $a/\Delta t$ , gdzie  $\Delta t$  oznacza krok całkowania numerycznego,
- czasu sterowania ( $T_k$  - przewidywany czas regulacji, na podstawie którego rozwiązywane jest równanie Riccatiego,  $T_r$  – rzeczywisty czas regulacji, który w praktyce niekoniecznie musi być równy  $T_k$ );
- program przewiduje wprowadzenie niepoprawnych parametrów równania stanu, co można zinterpretować jako błędną identyfikację.

Po naciśnięciu prawego przycisku myszy, pojawiają się dodatkowe opcje programu dotyczące obsługi okna graficznego. Istnieje możliwość:

- a) wyboru rodzaju wykresu: liniowego, punktowego,
- b) włączenia/wyłączenia: osi, siatki, opisu,
- c) wyczyszczenia pola wykresu,
- d) zapisania do pliku wyników symulacji,
- e) powiększania/pomniejszania, dopasowania wielkości okna wykresu.

W sytuacji, kiedy wprowadzone dane do kwadratowego wskaźnika jakości są niepoprawne, pojawia się komunikat informujący o tym fakcie z jednoczesnym podaniem przyczyny.

Program informuje o upływającym czasie symulacji, który można zatrzymać przyciskiem „Pauza” lub zakończyć przyciskiem „Stop”. Podaje również wartość kwadratowego wskaźnika jakości po zakończeniu symulacji. Śledząc kursorem myszy wykresy na ekranie istnieje możliwość odczytania wartości aktualnej współrzędnej.

**Poniżej przedstawiono przykład, który pozwoli prześledzić operacje, jakie w ogólnym zarysie musi wykonać program.**

Badany układ jest opisany równaniem:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t).$$

Kolejne macierze we wskaźniku jakości mają postać:

$$F = \begin{bmatrix} f_{11} & 0 \\ 0 & f_{22} \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix}, R = [r].$$

Równanie Riccatiego wyraża się zależnością:

$$\begin{bmatrix} \dot{k}_{11}(t) & \dot{k}_{12}(t) \\ \dot{k}_{21}(t) & \dot{k}_{22}(t) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{11}(t) & k_{12}(t) \\ k_{21}(t) & k_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11}(t) & k_{12}(t) \\ k_{21}(t) & k_{22}(t) \end{bmatrix} + \dots \\ \dots + \begin{bmatrix} k_{11}(t) & k_{12}(t) \\ k_{21}(t) & k_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{r} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix}.$$

Po wymnożeniu powyższego równania macierzowego otrzymuje się trzy równania różniczkowe postaci:

$$\begin{aligned} \dot{k}_{11}(t) &= r^{-1}k_{12}^2(t) - q_{11}, \\ \dot{k}_{12}(t) &= r^{-1}k_{12}(t)k_{22}(t) - q_{12} - k_{11}(t), \\ \dot{k}_{22}(t) &= r^{-1}k_{22}^2(t) - 2k_{12}(t) - q_{22}. \end{aligned}$$

Warunki graniczne są sformułowane następująco:

$$\begin{bmatrix} k_{11}(T) & k_{12}(T) \\ k_{21}(T) & k_{22}(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & 0 \\ 0 & f_{22} \end{bmatrix}.$$

Wyznaczenie macierzy  $K(t)$  pozwala określić sterowanie optymalne, które w tym przypadku opisane jest zależnością:

$$u(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)K(t)x(t) = \frac{1}{r}[0 \quad 1] \begin{bmatrix} k_{11}(t) & k_{12}(t) \\ k_{21}(t) & k_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = -r^{-1}[k_{12}(t)x_1(t) + k_{22}(t)x_2(t)].$$

**Powyższy przykład pokazuje, że wszystkie elementy macierzy występujących w kwadratowym wskaźniku jakości mają wpływa na sterowanie optymalne !**

Jednym z zadań studenta będzie sprawdzenia jak dokładnie relacje między macierzą  $R$  oraz  $F$  i  $Q$  wpływają na wielkość sterowania, dokładność osiągnięcia celu itp.

## 4. Wykonanie ćwiczenia

### 4.1. Symulacje dla zagadnienia stabilizacji stanu

Jeżeli nie podano inaczej parametry symulacji należy przyjąć jak niżej:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A_r=A, \quad B_r=B,$$

$$T_k = T_r = 10, \quad x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad R = [1], \quad F = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

#### a. Wpływ zmiany $R$ względem stałego $Q$ na przebieg procesu stabilizacji stanu.

Należy uwzględnić wpływ na wartość wskaźnika jakości, wartość (wielkość) sterowania oraz szybkość procesu.

Proszę przeprowadzić 3 symulacje dla układu stabilnego:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A_r=A, \quad B_r=B,$$

oraz 3 symulacje dla układu stabilnego:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A_r=A, \quad B_r=B,$$

Należy przyjąć wartość macierzy  $R$  dla kolejnych symulacji:  $R_1=0.01$ ,  $R_2=1$ ,  $R_3=100$ .

$T_k = 10$ .

**b. Wpływ zmiany  $Q$  względem stałego  $R$ .**

Należy przeprowadzić analogiczne symulacje jak powyżej, przy czym tym razem stała pozostaje wartość macierzy  $R = 1$ , natomiast zmianie ulegają wartości macierzy  $Q$ , odpowiednio:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.02 \end{bmatrix}, Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, Q_3 = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 200 \end{bmatrix}.$$

Wykresy oraz wartości wskaźnika jakości proszę porównać z otrzymanymi powyżej.

**c. Wpływ  $F$  odpowiadającej za wielkość start w chwili końcowej  $T$ .**

Należy przeprowadzić dwie symulacje, w których macierz  $F$  powinna przyjmować kolejno wartości:

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, F_2 = \begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 15 \end{bmatrix}.$$

$R=[10]$ ,  $T_k=T_r=10$  (reszta parametrów jak w przykładzie 1a)

Szczególną uwagę proszę zwrócić na wykres  $x_2(x_1)$ .

**d. Wpływ  $T$  (czasu końcowego regulacji).**

Należy rozważyć, czy w przypadku wydłużania czasu sterowania (tj. zwiększenia  $T$ ) regulator po zrealizowaniu zadania, jakim jest stabilizacja stanu, utrzyma go w punkcie, który osiągnął, a także czy wydłużanie to ma wpływ na wartość kwadratowego wskaźnika jakości.

Proszę przyjmując kolejno końcowy czas trwania sterowania:  $T_1=5$ ,  $T_2=10$ ,  $T_3=15$  ( $T_k=T_r$ ).

Szczególną uwagę proszę zwrócić na wykres  $x_2(x_1)$  oraz wartość KWJ.

**e.  $Q = F = 0$ .**

Na podstawie części teoretycznej wiadomo, że  $Q$  i  $F$  są macierzami dodatnio półokreślonymi. W przypadku kiedy  $Q = F = 0$ , wskaźnik jakości przyjmuje postać:

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^T [u(t)^T R u(t)] dt.$$

Sterowaniem optymalnym, które minimalizuje wskaźnik jakości będzie sterowanie  $u(t)=0$ , a funkcjonal przyjmie wartość  $J(u)=0$ .

Należy sprawdzić, czy wykonana symulacja wskaże to samo rozwiązanie (potwierdzi teoretyczne wyliczenia) oraz stwierdzić, czy przy takich parametrach działanie regulatora można określić mianem „sterowania”.

**f. Proporcjonalne zmiany  $Q$  i  $R$ .**

W symulacji nr 1 macierz  $Q$  była stała, a zmieniała się macierz  $R$ . Teraz należy sprawdzić przypadek, kiedy wartości tych macierzy zmieniają się proporcjonalnie.

Proszę uwzględnić macierze  $Q$  i  $R$  o wartościach kolejno:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, R_1 = 1,$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}, R_2 = 100.$$

**g. Wprowadzenie zakłóceń.**

Należy przeprowadzić następujące symulacje:

- i. Dotyczącą zakłóceń losowych o rozkładzie jednorodnym oddziaływujących na stan układu (Los. X), proszę przyjąć wartość zakłóceń na poziomie 1.0, włączonych od początku symulacji oraz dotyczącą losowych zakłóceń sterowania (Los. U), parametry jak wyżej. Proszę porównać wpływ zakłóceń na jakość sterowania.
- ii. Dodatkowo, należy przeprowadzić dwie symulacje uwzględniające zakłócenia o charakterze skoku jednostkowego oddziaływujące odpowiednio na sterowanie oraz stan. Dla tych symulacji proszę przyjąć czas  $T_k = T_r = 30$ , oraz czasy włączenia i wyłączenia zakłóceń odpowiednio 10 oraz 20.

**h. Badanie wrażliwości układu sterowania na błędną identyfikację parametrów obiektu (macierze A, B).**

Proszę wykonać dwie serie symulacji prezentujące wpływ błędnej identyfikacji parametrów obiektu (poprzez macierze  $A_r, B_r$ ) na jakość sterowania.

Macierze  $A_r$  proszę przyjąć kolejno (przy zachowaniu  $B = B_r$ ):

$$A_{r1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_{r2} = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_{r3} = \begin{bmatrix} 0 & 100 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Następnie należy powrócić do założenia  $A = A_r$  i przyjąć następujące wartości macierzy  $B_r$ :

$$B_{r1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, B_{r2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}, B_{r3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 100 \end{bmatrix}$$

## 4.2. Symulacje dla zagadnienia stabilizacji wyjścia

**a. Wpływ wartości Q i R**

Proszę przeprowadzić osobne symulacje dla układu stabilnego:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, A_r = A, B_r = B, C = [1 \ 0].$$

$$T_k = T_r = 5, x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$Q = [1], F = [2].$$

Należy przyjąć wartość macierzy  $R$  dla kolejnych symulacji:  $R_1=0.01$ ,  $R_2=1$ ,  $R_3=100$ .

Analogicznie należy przeprowadzić symulacje dla  $[R]=1$  oraz 3 wartości  $Q$ :  $Q_1=0.01$ ,  $Q_2=1$ ,  $Q_3=100$

### b. Układy niesterowalne i nieobserwowalne

Proszę przeprowadzić symulację dla układu o wartościach:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [1 \quad 0].$$

$$(A_r=A, B_r=B),$$

$$Q = [1], F = [2], R = 0.5$$

i odpowiedzieć na pytanie, czy w tym przypadku układ regulacji jest w stanie wygenerować sterowanie, które będzie stabilizować sygnał wyjściowy.

### c. Wpływ błędnej identyfikacji parametrów obiektu (macierze $A$ , $B$ ).

Rozważony będzie układ oscylacyjny. Błędnie zidentyfikowany zostanie współczynnik tłumienia, który ma wpływ na wartość  $a_{22}$ .

Należy przeprowadzić trzy symulacje, w których:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -23 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [1 \quad 0].$$

$$Q = [1], F = [2], R = 1.$$

$$B_r=B.$$

$$T_k = T_r = 5, \quad x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$A_r$  przyjmuje kolejno wartości:

$$A_{1r} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -23 & 2 \end{bmatrix},$$

$$A_{2r} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -23 & 3 \end{bmatrix},$$

$$A_{3r} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -23 & 6 \end{bmatrix}.$$

We wnioskach należy uwzględnić przypadki kiedy błędnie zidentyfikowane współczynnik tłumienia przyjmuje mniejszą oraz większą wartość niż wartość rzeczywista.

### 4.3. Symulacje dla zagadnienia nadążania

#### a. Nadążanie na sygnałem sinusoidalnym.

Zadana funkcja:  $z(t) = a \sin(bt) + c$ , przykładowo:  $a=1, b=1, c=0$ .

Należy dokonać zmian wartości macierzy  $Q$  i  $R$  we wskaźniku jakości oraz zbadać ich wpływ na dokładność realizacji zadania nadążania. Proszę przeprowadzić cztery symulacje uwzględniając wartości:

1)  $Q = [1], F = [2], R = 0.01,$   
 $Q = [1], F = [2], R = 1,$

2)  $Q = [10], F = [2], R = 0.01,$   
 $Q = [10], F = [2], R = 1.$

Proszę przyjąć czas symulacji  $T_k=T_r=10$ .

#### b. Nadążanie za sygnałem liniowym.

Zadana funkcja  $z$  jest liniowa:  $z(t) = at + b$

We wnioskach należy uwzględnić wpływ wzrostu  $Q$  względem  $R$  na zwiększenie dokładności nadążania (parametry jak wyżej).

Proszę przyjąć czas symulacji  $T_k=T_r=5$ .