Wykład 1 z rachunku prawdopodobieństwa I (28.02.2023)

1. Istota rachunku prawdopodobieństwa: podłoże intuicyjne, teoria formalna, zastosowania.
2. Przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω, σ-ciała zdarzeń.
3. Przykład: Klasa $\mathcal{F}$ zbiorów przeliczalnych oraz mających przeliczalne dopełnienia jest σ-ciałem. Gdy Ω jest zbiorem nieprzeliczalnym, to $\mathcal{F}$ jest istotnie mniejsze od 2^Ω.
4. Twierdzenie: Niech $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ będzie rodziną σ-ciał, a $\mathcal{T}$ dowolnym zbiorem indeksów. Wtedy $\mathcal{F} = \bigcap_{t\in\mathcal{T}} \mathcal{F}_t$ jest σ-ciałem.
5. Definicja: Niech $\mathcal{A}$ będzie klasą zbiorów. Najmniejsze σ-ciało zawierające $\mathcal{A}$ nazywamy σ-ciałem generowanym przez $\mathcal{A}$ i oznaczamy przez $\sigma(\mathcal{A})$. (Istnienie wynika z ostatniego twierdzenia.)
6. Przykład: Gdy $\mathcal{A}$ jest klasą zbiorów jednoelementowych, to $\sigma(\mathcal{A})$ jest klasą z punktu 3.
7. Przykłady: σ-ciała generowane przez podział, zbiory borelowskie w $\mathbb{R}^n$ i w ogólnych przestrzeniach topologicznych.
8. Definicja: Klasę zbiorów zamkniętą ze względu na skończone iloczyny nazywamy π-układem. (Przykład: Klasa przedziałów $(a, b]$)
9. Aksjomaty Kołmogorowa, rozkład prawdopodobieństwa, przestrzeń probabilistyczna.
10. Definicja: Nośnikiem rozkładu P na σ-ciele $\mathcal{F}$ nazywamy każdy zbiór $A \in \mathcal{F}$ taki, że $P(A) = 1$. Rozkład posiadający nośnik przeliczalny nazywamy rozkładem dyskretnym.

Na ćwiczenia:

1. Udowodnić fakty z punktów 3 i 4.
2. Pokazać, że każde nieskończone σ-ciało jest nieprzeliczalne. (Np. Billingsley 2.11)