

Wykład 12 z rachunku prawdopodobieństwa (07.01.25)

1. Wektorowa wersja twierdzenia Lindeberga-Lévy'ego.
2. Rozkład wielomianowy. Reprezentacja w postaci sumy niezależnych wektorów losowych o tym samym rozkładzie.
3. Momenty rozkładu wielomianowego.
4. Asymptotyka rozkładu wielomianowego.
5. Zbieżność wektorów losowych według prawdopodobieństwa i z prawdopodobieństwem jeden:
 $X_n \rightarrow X \stackrel{def}{\iff} \|X_n - X\| \rightarrow 0$ w tym samym sensie.
6. Równoważność zbieżności wektora ze zbieżnością wszystkich jego składowych w przypadku zbieżności według prawdopodobieństwa i zbieżności z prawdopodobieństwem jeden, brak tej równoważności dla zbieżności słabej.
7. Twierdzenie Riesz: Z ciągu wektorów losowych zbieżnego według prawdopodobieństwa można wybrać podciąg zbieżny do tej samej granicy z prawdopodobieństwem jeden.
8. Twierdzenie o odwzorowaniu ciągłym: Jeżeli $X, X_1, X_2, \dots$ są wektorami losowymi, $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ funkcją borelowską ciągłą P^X -prawie wszędzie, oraz $X_n \rightarrow X$ z prawdopodobieństwem jeden, według prawdopodobieństwa lub słabo, to $g(X_n) \rightarrow g(X)$ w tym samym sensie.

9. Przykłady:

- $X_n \xrightarrow{d} N(0, 1) \implies X_n^2 \xrightarrow{d} \chi_1^2$
- $(X_n, Y_n) \xrightarrow{d} N_2(0, I) \implies X_n/Y_n \xrightarrow{d} C(0, 1)$
- $X_n \xrightarrow{d} X \implies AX_n \xrightarrow{d} AX$ i $X_n^T BX_n \xrightarrow{d} X^T BX$
- $(X_n \rightarrow X \text{ i } Y_n \rightarrow Y \text{ p.p lub wg. prawd.}) \implies (X_n + Y_n \rightarrow X + Y \text{ i } X_n Y_n \rightarrow XY \text{ w tym samym sensie})$
- brak ostatniej implikacji dla zbieżności słabej