

Wykład 13 z rachunku prawdopodobieństwa (13.01.25)

1. Rozkłady form kwadratowych wektorów normalnych:

- Twierdzenie: Gdy $Y \sim N_k(0, I)$ i A jest macierzą symetryczną, to $Y^T A Y \sim \chi_r^2$ wtedy i tylko wtedy, gdy A jest idempotentna i $r = \text{rank} A = \text{tr} A$.
- Lemat: Jeżeli $Y \sim N_k(m, \Sigma)$ i $\text{rank} \Sigma = r$, to istnieją $X \sim N_r(0, I)$ oraz macierz $B_{(k,r)}$ o ortogonalnych kolumnach takie, że $Y \stackrel{d}{=} B X + m$.
- Twierdzenie: Gdy $Y \sim N_k(m, \Sigma)$ i A jest macierzą symetryczną, to $(Y - m)^T A (Y - m) \sim \chi_r^2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\Sigma A \Sigma A \Sigma = \Sigma A \Sigma$ i $r = \text{tr}(A \Sigma)$.

2. Przykład: Gdy $Y = (n_1, \dots, n_k) \sim M(n, p)$, to

$$T(Y) = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} \xrightarrow{d} \chi_{k-1}^2.$$