Wykład 2 z rachunku prawdopodobieństwa II (09.10.23)

1. Własności prawdopodobieństw warunkowych:

   - Dla $A \in \mathcal{F}$, $P(A \,|\, \mathcal{G}) \in [0,1]$ P-p.w.
   - Dla rozłącznych $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$, $P(\bigcup_i A_i \,|\, \mathcal{G}) = \sum_i P(A_i \,|\, \mathcal{G})$ P-p.w.

2. Regularne rozkłady warunkowe na $(\Omega, \mathcal{F})$ i trudności w ich konstrukcji.

3. Twierdzenie: Niech $X : (\Omega, \mathcal{F}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n, P^X)$ będzie wektorem losowym i niech $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ będzie σ-podciałem. Istnieje funkcja $\mu(H, \omega)$ określona na $\mathcal{B}_n \times \Omega$ taka, że

   1. $\forall \omega \in \Omega$ $\mu(\cdot, \omega)$ jest rozkładem prawdopodobieństwa na $\mathcal{B}_n$
   2. $\forall H \in \mathcal{B}_n$ $\mu(H, \cdot)$ jest wersją $P(X \in H \,|\, \mathcal{G})$

4. Definicja: Rodzinę miar $\{\mu(\cdot, \omega) \,:\, \omega \in \Omega\}$ nazywamy rozkładem warunkowym wektora X względem $\mathcal{G}$.

5. Rozkłady warunkowe w przypadku dyskretnym: $P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}$. Na zbiorze wartości X zdefiniujmy rozkład zadając $p_{i|j} = p_{ij}/p_{\cdot j}$, gdy $p_{\cdot j} \neq 0$. W przypadku $p_{\cdot j} = 0$ przyjmujemy dowolny rozkład prawdopodobieństwa. Zdefiniujmy $\tilde{\mu}(H, y_j) = \sum_{k:\, x_k \in H} p_{k|j}$. Wtedy $\mu(H, \omega) = \tilde{\mu}(H, Y(\omega))$ zadaje rozkład warunkowy $X \,|\, Y$.

6. Rozkłady warunkowe w przypadku ciągłym: Gdy $(X, Y) \sim f(x, y)$, a $f_x(x)$ oznacza brzegową gęstość X, definiujemy:

$$g(y|x) = \begin{cases} f(x,y)/f_x(x) & \text{gdy} \quad f_x(x) > 0 \\ \text{dowolna gęstość prob.} & \text{gdy} \quad f_x(x) = 0 \end{cases}$$

   oraz $\tilde{\mu}(H, x) = \int_H g(u|x)du$ i $\mu(H, \omega) = \tilde{\mu}(H, X(\omega))$. Wtedy $\{\mu(H, \omega) :\, \omega \in \Omega\}$ jest rozkładem warunkowym $Y|X$.