Wykład 3 z rachunku prawdopodobieństwa (21.10.24)

1. Rozkłady warunkowe w przypadku ciągłym: Gdy $(X, Y) \sim f(x, y)$, a $f_x(x)$ oznacza brzegową gęstość X, definiujemy:

$$g(y|x) = \begin{cases} f(x,y)/f_x(x) & \text{gdy} \quad f_x(x) > 0 \\ \text{dowolna gęstość prob.} & \text{gdy} \quad f_x(x) = 0 \end{cases}$$

oraz $\tilde{\mu}(H, x) = \int_H g(u|x)du$ i $\mu(H, \omega) = \tilde{\mu}(H, X(\omega))$. Wtedy $\{\mu(H, \omega) : \omega \in \Omega\}$ jest rozkładem warunkowym $Y|X$.

2. Rozkłady warunkowe w przypadku mieszanym: Niech ν oznacza miarę liczącą na $\{y_i : i \in I\}$, λ- miarę Lebesgue'a na $\mathbb{R}$, a $\mu = \lambda \otimes \nu$ - miarę produktową na $\mathbb{R} \times \bigcup_{i \in I} \{y_i\}$. Niech $dP^{X,Y}/d\mu = p_i f_i(x)$, gdy $y = y_i$, gdzie $\sum_i p_i = 1$, $p_i \geq 0$, a f_i są gęstościami probabilistycznymi. Wtedy:

   A. $P(Y = y_i) = p_i$ jest dyskretnym rozkładem brzegowym Y

   B. f_i są gęstościami rozkładów warunkowych $X|Y = y_i$

   C. $p_{i|x} = p_i f_i(x) / \sum_k p_k f_k(x)$, $i \in I$, zadaje rozkłady warunkowe $Y|X = x$

   D. Rozkład brzegowy X ma gęstość $\sum_i p_i f_i(x)$.

3. Przykład: rozkład ujemny dwumianowy jako mieszanka rozkładów Poissona, interpretacje aktuarialne, rozkład Pascala jako rozkład liczby sukcesów przed ustaloną liczbą porażek.