Wykład 5 z rachunku prawdopodobieństwa (04.11.24)

1. Twierdzenie: Jeżeli $\mu(\cdot, \omega)$ jest rozkładem warunkowym wektora losowego $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}^p, \mathcal{B}_p)$ względem σ-ciała $\mathcal{G}$, a $\phi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ jest borelowska i taka, że $\phi(X)$ jest całkowalna, to $\int \phi(x)\mu(dx, \omega)$ jest wariantem $E[\phi(X)|\mathcal{G})]$.

2. Własności WWO (równości i nierówności P-pw):

   W1. Dla $a \in \mathbb{R}$, $E(a|\mathcal{G}) = a$

   W2. Dla $a, b \in \mathbb{R}$, $E(aX + bY|\mathcal{G}) = aE(X|\mathcal{G}) + bE(Y|\mathcal{G})$.

   W3. Jeżeli X jest całkowalna i nieujemna p.w., to $E(X|\mathcal{G}) \geq 0$.

   W4. Nierówność Jensena dla WWO.

   W5. Dla całkowalnej X, $\mathrm{E}[\mathrm{E}(X|\mathcal{G})] = \mathrm{E}(X)$
   Przykład na istotność założenia całkowalności X.

   W6. Jeżeli X jest niezależna od $\mathcal{G}$, to $\mathrm{E}(X|\mathcal{G}) = \mathrm{E}(X)$.

   W7. Jeżeli X jest $\mathcal{G}$-mierzalna, a Y i XY są całkowalne, to $\mathrm{E}(XY|\mathcal{G}) = X\mathrm{E}(Y|\mathcal{G})$.