Wykład 9 z rachunku prawdopodobieństwa (25.11.24)

1. Zespolone zmienne losowe i ich wartości oczekiwane.
2. Definicja i własności funkcji charakterystycznej: $\varphi_X(0) = 1$, $|\varphi_X(t)| \leq 1\ \forall t$, $\varphi_X(-t) = \overline{\varphi_X(t)}$, jednostajna ciągłość.
3. Dla niezależnych X, Y, $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$.
4. $\varphi_{aX+b}(t) = \mathrm{e}^{itb}\varphi_X(at)$.
5. Przykład: Wyliczenie funkcji charakterystycznej rozkładu normalnego.
6. Twierdzenie: Jeżeli $\mathrm{E}|X|^n < \infty$, to dla $k = 0, 1, \ldots, n$ istnieją jednostajnie ciągłe pochodne $\varphi_X^{(k)}$ oraz $\varphi_X^{(k)}(0) = i^k \mathrm{E}X^k$.
7. Gdy $\mathrm{E}|X|^n < \infty$, to
$$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{E}X^k \frac{(it)^k}{k!} + o(t) \qquad \text{gdy} \qquad t \to 0.$$
8. Twierdzenie: Jeżeli rozkład P na $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ ma funkcję charakterystyczną $\varphi_P(t)$ oraz $P(\{a\}) = P(\{b\}) = 0$, to
$$P([a,b]) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{\mathrm{e}^{-ita} - \mathrm{e}^{-itb}}{it} \varphi_P(t)dt$$
9. Wniosek: Funkcja charakterystyczna jednoznacznie wyznacza rozkład.
10. Twierdzenie: Jeżeli φ jest funkcją charakterystyczną rozkładu P oraz $\int |\varphi(t)|dt < \infty$, to P jest rozkładem o ciągłej gęstości f względem miary Lebesgue'a postaci
$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int \mathrm{e}^{-itx} \varphi(t)dt.$$

<u>Na ćwiczenia:</u> Udowodnić, że dla dowolnej zespolonej zmiennej losowej Z mamy $|\mathrm{E}Z| \leq \mathrm{E}|Z|$ (por. Billingsley, s. 216).