Wykład 11 z rachunku prawdopodobieństwa I (13.05.24)

1. Definicja i interpretacja σ-ciała generowanego przez element losowy w terminach informacji niesionej przez zmienną losową.

2. Twierdzenie (Dooba-Dynkina): Jeżeli X i Y są zmiennymi losowymi, to X jest $\sigma(Y)$-mierzalna wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnej borelowskiej funkcji $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest $X(\cdot) = h[Y(\cdot)]$.

3. Definicja: Mówimy, że elementy losowe $X_1, \ldots, X_n$ są niezależne, gdy niezależne są $\sigma(X_1), \ldots, \sigma(X_n)$. Interpretacja. Miary produktowe a niezależność.

4. Twierdzenie: Jeżeli F jest dystrybuantą wektora $(X_1, \ldots, X_n)$, a F_i oznacza dystrybuantę brzegową X_i, to $X_1, \ldots, X_n$ są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \qquad F(x_1, \ldots, x_n) = F_1(x_1) \ldots F_n(x_n)$$

5. Twierdzenie: Jeżeli f jest gęstością wektora $(X_1, \ldots, X_n)$, a f_i oznacza gęstość brzegową X_i, to $X_1, \ldots, X_n$ są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy dla prawie wszystkich $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1) \ldots f_n(x_n)$$