Wykład 7 z rachunku prawdopodobieństwa I (15.04.24)

1. Absolutna ciągłość i równoważność miar.

2. Twierdzenie: Dla miar μ, ν na σ-ciele $\mathcal{F}$, jeżeli ν jest miarą skończoną, to następujące warunki są równoważne:

   - $\nu << \mu$
   - $\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta \; \forall A \in \mathcal{F} \; \mu(A) < \delta \Rightarrow \nu(A) < \epsilon$.

3. Twierdzenie Radona-Nikodyma (bez dowodu): Jeżeli μ i ν są miarami σ-skończonymi na $\mathcal{F}$ i $\nu << \mu$, to istnieje nieujemna, $\mathcal{F}$-mierzalna funkcja f taka, że $\forall A \in \mathcal{F} \; \nu(A) = \int_A f d\mu$.

4. Pochodna Radona-Nikodyma: $f = d\nu/d\mu$, wersje tej pochodnej.

5. Własności pochodnej Radona-Nikodyma:

   - Jeżeli $\nu << \mu$ i $\mu << m$, to $\nu << m$ i $\dfrac{d\nu}{dm} = \dfrac{d\nu}{d\mu}\dfrac{d\mu}{dm}$.
   - $d\mu/d\mu = 1$
   - Jeżeli $\nu \equiv \mu$, to $\dfrac{d\nu}{d\mu} = \left[\dfrac{d\mu}{d\nu}\right]^{-1}$.

6. Twierdzenie: Gdy $\mu << m$, to dla nieujemnych f

$$\int f d\mu = \int f \frac{d\mu}{dm} dm.$$

   Ponadto, dla dowolnych mierzalnych f, μ-całkowalność f jest równoważna m-całkowalności $f\frac{d\mu}{dm}$ i w przypadku całkowalności zachodzi równość całek.

7. Przykład: $\mathcal{B}$ - zbiory borelowskie w $\Omega = [-1, 1]$, λ - miara Lebesgue'a, $f(x) = x/2 + 1/2$, $d\nu = f d\lambda$, $\mathcal{F} = \sigma([-1, 0], (0, 1])$, $\nu|_{\mathcal{F}} << \mu|_{\mathcal{F}}$, $d\nu|_{\mathcal{F}}/d\mu|_{\mathcal{F}} = 1/4 \cdot \mathbf{1}_{[-1,0]} + 3/4 \cdot \mathbf{1}_{(0,1]}$

8. Osobliwość miar i tw. Lebesgue'a o rozkładzie miary. Przykłady.