Wykład 9 z rachunku prawdopodobieństwa I (29.04.24)

1. Przekształcenia mierzalne i transport miary

2. Przykład: $\mu(A) = \int_A f dx$, $f = \mathbf{1}_{[0,1]}$, $T(x) = x^2$. Wtedy μT^{-1} ma gęstość $\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathbf{1}_{(0,1)}(x)$.

3. Twierdzenie o zmianie zmiennych w całce Lebesgue'a:
   Jeżeli $T : (\Omega, \mathcal{F}, \mu) \to (\Omega', \mathcal{F}', \mu T^{-1})$ oraz $f : \Omega' \to \mathbb{R}$ jest mierzalna, to

   1. Jeżeli f jest nieujemna, to

   $$\int f[T(\omega)] d\mu(\omega) = \int f(\omega') d(\mu T^{-1})(\omega') \qquad (*)$$

   2 Funkcja f jest μT^{-1}-całkowalna wtedy i tylko wtedy, gdy $f \circ T$ jest μ-całkowalna. Zachodzi wówczas $(*)$ oraz

   $$\forall A \in \mathcal{F}' \quad \int_{T^{-1}(A)} f[T(\omega)] d\mu(\omega) = \int_A f(\omega') d(\mu T^{-1})(\omega')$$

4. Zmienne losowe, wektory losowe i ich rozkłady.

5. Równość w sensie rozkładu $X \stackrel{d}{=} Y \iff P^X = P^Y$, zmienne losowe typu dyskretnego i ciągłego.

6. Przykłady: rozkład jednopunktowy, dwupunktowy, dwumianowy, Poissona, dyskretny o nośniku gęstym w $\mathbb{R}$, jednostajny, wykładniczy, własność braku pamięci, rozkład normalny.