Wykład 5 ze statystyki matematycznej (25.03.2024)

1. Przykład: $X = (X_1, \ldots, X_n)$ jest próbą prostą z $N(\theta, 1)$, $\theta \in \mathbb{R}$, $T(X) = \sum_i X_i$ jest dostateczna, $d(X) = (X_1 + X_2)/2$ jest estymatorem θ, przy kwadratowej funkcji strat $d_0(T(X)) = E(d(X) \,|\, T) = \bar{X}$ jest nie gorszy od $d(X)$.

2. Twierdzenie: Jeżeli $X_1, \ldots, X_n$ jest próbą prostą z rozkładu o gęstości f na $\mathbb{R}$, to $X^* = (X_{(1)}, \ldots, X_{(n)})$ ma gęstość $f^*(y) = n! f(y_1) \cdot \ldots \cdot f(y_n) \mathbf{1}_{\{y_1 < \ldots < y_n\}}(y)$.

3. Przykład: Gdy $X = (X_1, \ldots, X_n)$ jest próbą prostą z $U(0, \theta)$, $\theta > 0$, to
$$X^* \sim \frac{n!}{\theta^n} \mathbf{1}_{\{0 < y_1 < \ldots < y_n < \theta\}}$$
oraz
$$(X_{(1)}, \ldots, X_{(n-1)}) \,|\, X_{(n)} = t \sim \frac{(n-1)!}{t^{n-1}} \mathbf{1}_{\{0 < y_1 < \ldots < y_{n-1} < t\}}$$
czyli rozkład jest taki, jak dla $n-1$ elementowej próby prostej z $U(0, t)$. Rozkład wektora statystyk pozycyjnych wyznacza rozkład próby prostej a $X_{(1)}, \ldots, X_{(n-1)}$ są statystykami pozycyjnymi z $n-1$ najmniejszych X_i, więc warunkowo, przy $X_{(n)} = t$, wartości X_i na lewo od t tworzą próbę prostą z $U(0, t)$.

4. Ogólniej prawdziwe jest twierdzenie: Niech $X = (X_1, \ldots, X_n)$ będzie próbą prostą z rozkładu o gęstości f i dystrybuancie F. Warunkowo, przy $X_{(i)} = a$
   - $i - 1$ obserwacji mniejszych od a tworzy próbę prostą z rozkładu o gęstości
   $$\frac{f(x)}{F(a)} \mathbf{1}_{(-\infty, a)}(x)$$
   - $n - i$ obserwacji większych od a tworzy próbę prostą z rozkładu o gęstości
   $$\frac{f(x)}{1 - F(a)} \mathbf{1}_{(a, \infty)}(x)$$
   - te dwie próby proste są (warunkowo) niezależne.

5. Ryzyko bayesowskie, bayesowskie reguły decyzyjne.

6. Twierdzenie o dopuszczalności bayesowskich reguł decyzyjnych.