

Statystyka Inżynierska

dr hab. inż. Jacek Tarasiuk

AGH , WFiIS 2013

Wykład 4

**RACHUNEK NIEPEWNOŚCI + KILKA
UŻYTECZNYCH NARZĘDZI STATYSTYCZNYCH**

Wykład w większości oparty na opracowaniu prof. A. Zięby
http://www.fis.agh.edu.pl/~pracownia_fizyczna/pomoce/OpracowanieDanychPomiarowych.pdf

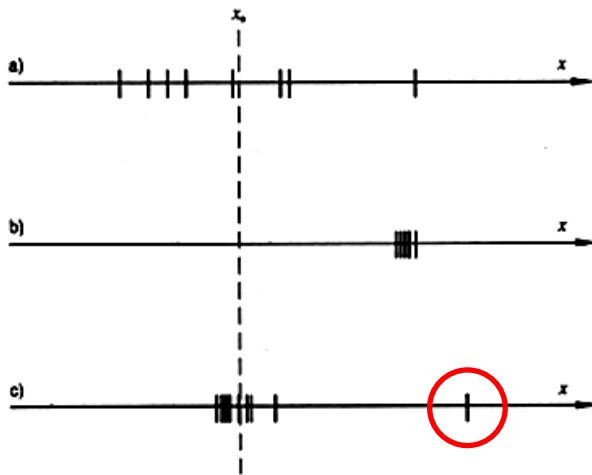
- ❑ wynik pomiaru = „prawdziwa” wartość mierzona + błędy
- ❑ Wynik pomiaru (zazwyczaj) jest zmienną losową.
- ❑ Podanie samego tylko wyniku pomiaru (ściśle rzecz biorąc) nie niesie żadnej informacji.
- ❑ W codziennej praktyce, często przyjmujemy pewne milczące założenia na temat wiarygodności pomiaru. W nauce i pracy inżynierskiej tak czynić nie możemy.
- ❑ Dlatego powinniśmy podać wynik pomiaru wraz z oceną jego wiarygodności nazywaną **niepewnością pomiarową**.
- ❑ Teoria niepewności pomiaru nie jest nauką ścisłą, choć ma cechy nauki (podobnie jak medycyna).
- ❑ *Guide to Expression of Uncertainty in Measurement* przyjęty w r. 1995 przez Międzynarodową Organizację Normalizacyjną ISO
- ❑ *Wyrażanie Niepewności Pomiaru. Przewodnik*. Przetłumaczony i wydany w 1999 przez Główny Urząd Miar

1. Pomiar i jego niepewność

2. Rodzaje błędów pomiarowych
3. Niepewność pomiarowa
4. Ocena niepewności typu A
5. Ocena niepewności typu B
6. Prawo przenoszenia niepewności
7. Prawo przenoszenia niepewności względnych
8. Niepewność rozszerzona
9. Zapis niepewności
10. Histogramy
11. Wykresy
12. Regresja jeszcze raz
13. Test χ^2
14. Test T

Błąd pomiaru to różnica pomiędzy wartością zmierzoną x_i a rzeczywistą x_0 .

$$\text{błąd pomiaru} = x_i - x_0$$



błąd przypadkowy

błąd systematyczny

błąd gruby

1. Pomiar i jego niepewność

2. Rodzaje błędów pomiarowych

3. Niepewność pomiarowa

4. Ocena niepewności typu A

5. Ocena niepewności typu B

6. Prawo przenoszenia niepewności

7. Prawo przenoszenia niepewności względnych

8. Niepewność rozszerzona

9. Zapis niepewności

10. Histogramy

11. Wykresy

12. Regresja jeszcze raz

13. Test χ^2

14. Test T

Niepewność pomiaru jest związanym z rezultatem pomiaru parametrem, charakteryzującym rozrzut wyników, który można w uzasadniony sposób przypisać wartości mierzonej.

Niepewność graniczna Δx określa przedział, w którym mieszczą się wszystkie wyniki pomiarów, dotychczasowe i przyszłe.

$$x_0 - \Delta x < x_i < x_0 + \Delta x$$

Niepewność standardowa jest oszacowaniem odchylenia standardowego. Niepewność standardową oznaczamy symbolem $u(x)$ – **co nie oznacza funkcji!** Zapis ten czytamy „niepewność pomiarowa wielkości x ”. Zapis taki może być użyty na przykład w taki sposób: $u(\text{stężenie NaCl})$.

Niepewnością względną nazywamy stosunek niepewności (bezwzględnej) do wielkości mierzonej: $\frac{u(x)}{x}$

a co z dokładnością pomiaru?

1. Pomiar i jego niepewność
2. Rodzaje błędów pomiarowych
- 3. Niepewność pomiarowa**
4. Ocena niepewności typu A
5. Ocena niepewności typu B
6. Prawo przenoszenia niepewności
7. Prawo przenoszenia niepewności względnych
8. Niepewność rozszerzona
9. Zapis niepewności
10. Histogramy
11. Wykresy
12. Regresja jeszcze raz
13. Test χ^2
14. Test T

Ocenę niepewności **typu A** stosujemy w pomiarach, w których występuje błąd przypadkowy, a kolejne wyniki pomiarów nie są ze sobą skorelowane i mają taki sam rozkład. Dodatkowo zakłada się, że wyniki podlegają rozkładowi normalnemu.

W praktyce rzadko sprawdzamy te założenia, ale dobrze się jest przynajmniej zastanowić, czy w oczywisty sposób nie są one niespełnione.

Jako **najlepsze oszacowanie wartości mierzonej** przyjmuje się średnią arytmetyczną: $x \equiv \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_n x_i$

Miarą rozrzutu pojedynczego pomiaru jest estymator odchylenia standardowego:

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

Za **niepewność pomiaru** przyjmuje się estymator odchylenia standardowego średniej, czyli:

$$u(x) = S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}$$

1. Pomiar i jego niepewność
2. Rodzaje błędów pomiarowych
3. Niepewność pomiarowa
- 4. Ocena niepewności typu A**
5. Ocena niepewności typu B
6. Prawo przenoszenia niepewności
7. Prawo przenoszenia niepewności względnych
8. Niepewność rozszerzona
9. Zapis niepewności
10. Histogramy
11. Wykresy
12. Regresja jeszcze raz
13. Test χ^2
14. Test T

Ocena **typu B** stosowana jest, gdy statystyczna analiza serii obserwacji nie jest możliwa. Na przykład dla błędu systematycznego lub gdy występuje błąd przypadkowy, ale dysponujemy tylko jednym rezultatem pomiaru. **Ocena niepewności typu B opiera się na naukowym osądzie eksperymentatora** wykorzystującym wszystkie informacje o pomiarze i źródłach jego niepewności.

Do oceny typu B wykorzystać można między innymi:

- dane z pomiarów poprzednich,
- doświadczenie i wiedzę nt. przyrządów i obiektów mierzonych,
- informacje producenta przyrządów,
- niepewności przypisane danym zaczerpniętym z literatury.

1. Pomiar i jego niepewność
2. Rodzaje błędów pomiarowych
3. Niepewność pomiarowa
4. Ocena niepewności typu A
- 5. Ocena niepewności typu B**
6. Prawo przenoszenia niepewności
7. Prawo przenoszenia niepewności względnych
8. Niepewność rozszerzona
9. Zapis niepewności
10. Histogramy
11. Wykresy
12. Regresja jeszcze raz
13. Test χ^2
14. Test T

Przyrządy tradycyjne (przymiar milimetrowy, termometr cieczowy, stoper mechaniczny) mają skale z podziałką.

Najmniejsza działka skali zwana jest działką elementarną.

Przyjmuje się, że: $u(x) \approx \text{działka elementarna}$

Mierniki elektroniczne analogowe mają podaną tzw. *klasę przyrządu*, a pomiaru dokonujemy na określonym *zakresie*,

wówczas:

$$\Delta x = \frac{\text{klasa przyrz.}}{100} \cdot \text{zakres}$$

W przypadku **mierników elektronicznych cyfrowych** producent podaje albo niepewność graniczną na danym zakresie, albo dwie wartości C_1 i C_2 , które posłużą do wyznaczenia:

$$\Delta x = C_1 \cdot x + C_2 \cdot \text{zakres}$$

W obu powyższych przypadkach zakłada się, że rozkład wyników w zakresie Δx jest równomierny, co daje niepewność:

$$u(x) = \frac{\Delta x}{\sqrt{3}}$$

1. Pomiar i jego niepewność
2. Rodzaje błędów pomiarowych
3. Niepewność pomiarowa
4. Ocena niepewności typu A

5. Ocena niepewności typu B

6. Prawo przenoszenia niepewności
7. Prawo przenoszenia niepewności względnych
8. Niepewność rozszerzona
9. Zapis niepewności
10. Histogramy
11. Wykresy
12. Regresja jeszcze raz
13. Test χ^2
14. Test T

W wielu przypadkach szukanej wielkości nie da się zmierzyć pojedynczym pomiarem, da się ją natomiast wyliczyć wykonując kilka innych pomiarów na podstawie wzoru $y(x_1, \dots, x_n)$.

W takiej sytuacji niepewność wielkości y wyliczamy na podstawie **prawa przenoszenia niepewności** i nazywamy ją niepewnością złożoną $u_c(x)$:

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_k \left[\frac{\partial y}{\partial x_k} u(x_k) \right]^2}$$

W tym przypadku wyliczamy wartość pochodnej w punkcie, będącym wynikiem pomiaru. Niepewność jest więc konkretną liczbą, a nie funkcją.

1. Pomiar i jego niepewność
2. Rodzaje błędów pomiarowych
3. Niepewność pomiarowa
4. Ocena niepewności typu A
5. Ocena niepewności typu B
- 6. Prawo przenoszenia niepewności**
7. Prawo przenoszenia niepewności względnych
8. Niepewność rozszerzona
9. Zapis niepewności
10. Histogramy
11. Wykresy
12. Regresja jeszcze raz
13. Test χ^2
14. Test T

Bardzo często stosuje się również **prawo przenoszenia niepewności względnych**:

$$\frac{u_c(y)}{y} = \frac{1}{y} \sqrt{\sum_k \left[\frac{\partial y}{\partial x_k} u(x_k) \right]^2} = \sqrt{\sum_k \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x_k} \cdot \frac{x_k}{y} \right) \cdot \frac{u(x_k)}{x_k} \right]^2}$$

$$\frac{u_c(y)}{y} = \sqrt{\sum_k \left[p_k \cdot \frac{u(x_k)}{x_k} \right]^2}$$

postać funkcji	$p_k = \frac{x_k}{y} \frac{\partial y}{\partial x_k}$
$y = \text{const} \cdot x_k$	1
$y = \text{const} / x_k$	-1
$y = \text{const} \cdot x_k^n$	n
$y = \text{const} \cdot \exp(a \cdot x_k)$	$a x_k$
$y = \text{const} \cdot \ln(a \cdot x_k)$	const / y

1. Pomiar i jego niepewność
2. Rodzaje błędów pomiarowych
3. Niepewność pomiarowa
4. Ocena niepewności typu A
5. Ocena niepewności typu B
6. Prawo przenoszenia niepewności
- 7. Prawo przenoszenia niepewności względnych**
8. Niepewność rozszerzona
9. Zapis niepewności
10. Histogramy
11. Wykresy
12. Regresja jeszcze raz
13. Test χ^2
14. Test T

Własnością niepewności standardowej jest, że w przedziale od $x - u(x)$ do $x + u(x)$ wartość rzeczywista znajduje się z prawdopodobieństwem około 2/3 (dokładnie: 68% dla rozkładu Gaussa, 58% dla rozkładu jednostajnego).

Niepewność rozszerzona jest to „powiększona” niepewność standardowa, wybrana tak, by w przedziale $(y - U(y), y + U(y))$ znalazła się przeważająca część wyników pomiaru potrzebna do określonych zastosowań – w przemyśle, medycynie, ochronie środowiska. Wartość U obliczamy mnożąc niepewność złożoną przez bezwymiarowy współczynnik rozszerzenia k :

$$U(y) = k \cdot u_c(y)$$

Zgodnie z międzynarodową praktyką do obliczenia U przyjmuje się najczęściej umowną wartość $k = 2$. Wartości k inne niż 2 mogą być stosowane tylko w przypadku szczególnych zastosowań i winny być dyktowane przez ustalone i udokumentowane wymagania.

1. Pomiar i jego niepewność
2. Rodzaje błędów pomiarowych
3. Niepewność pomiarowa
4. Ocena niepewności typu A
5. Ocena niepewności typu B
6. Prawo przenoszenia niepewności
7. Prawo przenoszenia niepewności względnych
- 8. Niepewność rozszerzona**
9. Zapis niepewności
10. Histogramy
11. Wykresy
12. Regresja jeszcze raz
13. Test χ^2
14. Test T

Niepewność standardowa

- przyspieszenie ziemskie jest równe $9,866 \text{ m/s}^2$ z niepewnością $0,028 \text{ m/s}^2$;
- $g = 9,866 \text{ m/s}^2$; $u(g) = 0,028 \text{ m/s}^2$;
- $g = 9,866(28) \text{ m/s}^2$.

Niepewność rozszerzona

- przyspieszenie ziemskie wynosi $9,866 \text{ m/s}^2$ z niepewnością rozszerzoną $0,056 \text{ m/s}^2$;
- $g = 9,866 \text{ m/s}^2$; $U(g) = 0,056 \text{ m/s}^2$;
- $g = (9,866 \pm 0,056) \text{ m/s}^2$.

Zasady:

- Niepewność zapisujemy z dokładnością dwu cyfr znaczących.
- Wartość mierzoną zaokrąglamy do tego samego miejsca, co niepewność. Jeżeli ostatnią cyfrą wyniku jest zero, należy ją pozostawić, jako cyfrę znaczącą.

1. Pomiar i jego niepewność
2. Rodzaje błędów pomiarowych
3. Niepewność pomiarowa
4. Ocena niepewności typu A
5. Ocena niepewności typu B
6. Prawo przenoszenia niepewności
7. Prawo przenoszenia niepewności względnych
8. Niepewność rozszerzona
- 9. Zapis niepewności**
10. Histogramy
11. Wykresy
12. Regresja jeszcze raz
13. Test χ^2
14. Test T

Histogram (wykres słupkowy) reprezentuje dla każdego z przedziałów zmiennej x liczbę jej wystąpień w zbiorze danych. Jeżeli dla każdego przedziału liczbę tę podzielimy przez wielkość zbioru uzyskamy **histogram znormalizowany**.

Liczbę k lub szerokość przedziałów h można wyznaczyć arbitralnie lub z jednej z reguł:

❑ Reguła Sturgesa: $k = \lceil \log_2 n + 1 \rceil$

❑ Reguła Scotta: $h = \frac{3.5 \cdot S_x}{n^{1/3}}$

❑ Reguła pierwiastkowa: $k = \sqrt{n}$

❑ Reguły „zdroworozsądkowe”: braku dziur, monotoniczności

1. Pomiar i jego niepewność
2. Rodzaje błędów pomiarowych
3. Niepewność pomiarowa
4. Ocena niepewności typu A
5. Ocena niepewności typu B
6. Prawo przenoszenia niepewności
7. Prawo przenoszenia niepewności względnych
8. Niepewność rozszerzona
9. Zapis niepewności
- 10. Histogramy**
11. Wykresy
12. Regresja jeszcze raz
13. Test χ^2
14. Test T

1. Pomiar i jego niepewność
2. Rodzaje błędów pomiarowych
3. Niepewność pomiarowa
4. Ocena niepewności typu A
5. Ocena niepewności typu B
6. Prawo przenoszenia niepewności
7. Prawo przenoszenia niepewności względnych
8. Niepewność rozszerzona
9. Zapis niepewności
10. Histogramy
- 11. Wykresy**
12. Regresja jeszcze raz
13. Test χ^2
14. Test T

Regresja jeszcze raz

Jeżeli mamy zbiór par liczb (np. wyników pomiarów) (x_i, y_i) , wówczas, bez liczenia prawdopodobieństw można wyznaczyć:

$$a = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad b = \frac{1}{n} (\sum y_i - a \sum x_i)$$

Niepewności wyznaczenia stałych wynoszą odpowiednio:

$$S_a = \sqrt{\frac{n [\sum y_i^2 - a \sum x_i y_i - b \sum y_i]}{(n-2) [n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2]}} \quad S_b = \sqrt{\frac{1}{n} S_a^2 \sum x_i^2}$$

Linearyzacja funkcji

$$y = ab^x \quad \ln y = \ln a + x \ln b$$

$$y = ae^x \quad \ln y = \ln a + x$$

$$y = ax^b \quad \ln y = \ln a + b \ln x$$

1. Pomiar i jego niepewność
2. Rodzaje błędów pomiarowych
3. Niepewność pomiarowa
4. Ocena niepewności typu A
5. Ocena niepewności typu B
6. Prawo przenoszenia niepewności
7. Prawo przenoszenia niepewności względnych
8. Niepewność rozszerzona
9. Zapis niepewności
10. Histogramy
11. Wykresy
12. **Regresja jeszcze raz**
13. Test χ^2
14. Test T

Zadanie:

Sprawdzić, czy n wyników pomiarów x_1, \dots, x_n może pochodzić z jakiegoś rozkładu teoretycznego (np. normalnego, równomiernego, Poissona itp.)

Przepis:

Zliczamy ile wartości x_i znalazło się w każdym z m równych przedziałów otrzymując obserwowane liczby zliczeń w każdym przedziale O_i . Wyliczamy dla każdego przedziału teoretyczną (oczekiwaną liczbę zliczeń w tym przedziale) E_i . Liczymy statystykę chi kwadrat X^2 , zgodnie ze wzorem:

$$X^2 = \sum_{i=1}^m \left(\frac{O_i - E_i}{E_i} \right)^2$$

Z tablic rozkładu X^2 dla liczby stopni swobody $n-1$ oraz zadanego poziomu ufności $1-\alpha$ (często równego 0.95) odczytujemy wartość $X^2_{n-1, 1-\alpha}$. Jeżeli wartość ta jest większa od obliczonej z powyższego wzoru wartości X^2 – nie mamy podstaw do odrzucenia hipotezy, że wyniki pomiarów są zgodne z danym rozkładem teoretycznym.

1. Pomiar i jego niepewność
2. Rodzaje błędów pomiarowych
3. Niepewność pomiarowa
4. Ocena niepewności typu A
5. Ocena niepewności typu B
6. Prawo przenoszenia niepewności
7. Prawo przenoszenia niepewności względnych
8. Niepewność rozszerzona
9. Zapis niepewności
10. Histogramy
11. Wykresy
12. Regresja jeszcze raz
- 13. Test χ^2**
14. Test T

Zadanie:

Mamy dwie populacje. Chcemy sprawdzić, czy wartości średnie w obu populacjach są sobie równe.

Przepis:

$$t = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$
$$v = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{s_1^4}{n_1^2(n_1-1)} + \frac{s_2^4}{n_2^2(n_2-1)}}$$

Z tablic rozkładu Studenta dla liczby stopni swobody v oraz zadanego poziomu ufności $1-\alpha$ (często równego 0.95) odczytujemy wartość $t_{v, 1-\alpha}$. Jeżeli wartość ta jest większa od obliczonej z powyższego wzoru wartości t – nie mamy podstaw do odrzucenia hipotezy, że średnie w obu populacjach są sobie równe.

1. Pomiar i jego niepewność
2. Rodzaje błędów pomiarowych
3. Niepewność pomiarowa
4. Ocena niepewności typu A
5. Ocena niepewności typu B
6. Prawo przenoszenia niepewności
7. Prawo przenoszenia niepewności względnych
8. Niepewność rozszerzona
9. Zapis niepewności
10. Histogramy
11. Wykresy
12. Regresja jeszcze raz
13. Test χ^2

14. Test T