Statystyka Inżynierska

dr hab. inż. Jacek Tarasiuk

AGH , WFiIS 2014

Wykład 5

Testowanie Hipotez Statystycznych

Hipotezy statystyczne

Hipotezą statystyczną nazywamy każde przypuszczenie dotyczące nieznanego rozkładu, o prawdziwości lub fałszywości którego wnioskuje się na podstawie pobranej próby.

- Średni czas oczekiwania na autobus wynosi 8 minut.
- Grubość pędów bambusa ma rozkład normalny.
- Odchylenie standardowe kilogramowych torebek z cukrem jest nie większe niż 5g.
- Liczba wadliwych produktów schodzących z taśmy produkcyjnej nie przekracza 0.5%.
- Średnie zarobki w północnych i południowych województwach kraju są sobie równe.
- Lek X nie ma wpływu na poziom cholesterolu.
- Sprzedaż laptopów koreluje ze sprzedażą komputerów stacjonarnych.

Hipotezy statystyczne

Hipotezy, które dotyczą wyłącznie wartości parametru jakiegoś rozkładu nazywamy **hipotezami parametrycznymi**. Wszystkie pozostałe, to **hipotezy nieparametryczne**

Wszelkie testy statystyczne rozpoczynamy od sformułowanie hipotezy H i hipotezy alternatywnej (kontrhipotezy) K. Tak naprawdę, spodziewamy się, że to hipoteza alternatywna będzie prawdziwa. Będziemy mogli ją przyjąć po odrzuceniu hipotezy H.

Hipotez alternatywnych może być kilka:

H_0: średnia waga nakrętki to 2g

K_1: średnia waga nakrętki jest różna od 2g

K_2: średnia waga nakrętki jest większa niż 2g

K_3: średnia waga nakrętki jest mniejsza niż 2g

Hipotezy statystyczne

Decyzja	**Hipoteza H**	
	jest prawdziwa	jest fałszywa
przyjęta	decyzja poprawna	decyzja błędna (II rodzaju)
odrzucona	decyzja błędna (I rodzaju)	decyzja poprawna

Minimalizujemy ten błąd

Poziom istotności testu α to prawdopodobieństwo popełnienia błędu pierwszego rodzaju.

Ogólny schemat testowania hipotez statystycznych.

1. Ustalić hipotezę H_0 i hipotezę alternatywną K.
2. Wybrać właściwą funkcję do testów (statystykę testową).
3. Przyjąć zakładany poziom ufności.
4. Ustalić obszary krytyczne dla danego testu.
5. Obliczyć wartość badanej statystyki na podstawie próby.
6. Jeżeli wartość badanej statystyki leży w obszarze krytycznym odrzucamy hipotezę H na rzecz hipotezy K.
7. W przeciwnym przypadku, **nie mamy podstaw do odrzucenia hipotezy H**.

Wartość oczekiwana

Rozkład normalny o znanej wariancji

Statystyka testowa: $U = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$

$H: \mu = \mu_0 \quad K: \mu < \mu_0 \qquad (-\infty, u(1-\alpha)]$

$H: \mu = \mu_0 \quad K: \mu > \mu_0 \qquad [u(1-\alpha), \infty)$

$H: \mu = \mu_0 \quad K: \mu \neq \mu_0 \qquad \left(-\infty, u\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right] \cup \left[u\left(1-\frac{\alpha}{2}\right), \infty\right)$

Wartość oczekiwana

Rozkład normalny o nieznanej wariancji

Statystyka testowa: $t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S}\sqrt{n-1}$

$H: \mu = \mu_0 \quad K: \mu < \mu_0 \qquad \left(-\infty, -t(1-\alpha, n-1)\right]$

$H: \mu = \mu_0 \quad K: \mu > \mu_0 \qquad \left[t(1-\alpha, n-1), \infty\right)$

$H: \mu = \mu_0 \quad K: \mu \neq \mu_0 \qquad \left(-\infty, -t\left(1-\frac{\alpha}{2}, n-1\right)\right] \cup \left[t\left(1-\frac{\alpha}{2}, n-1\right), \infty\right)$

Wariancja

Rozkład normalny, mała próba n< ok.50

Statystyka testowa: $\chi^2 = \dfrac{n \cdot S^2}{\sigma_0^2}$

$$H: \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad K: \sigma^2 < \sigma_0^2 \qquad \left(0, \chi^2(\alpha, n-1)\right]$$

$$H: \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad K: \sigma^2 < \sigma_0^2 \qquad \left[\chi^2(1-\alpha, n-1), \infty\right)$$

$$H: \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad K: \sigma^2 < \sigma_0^2 \qquad \left(0, \chi^2\left(\frac{\alpha}{2}, n-1\right)\right] \cup \left[\chi^2\left(1-\frac{\alpha}{2}, n-1\right), \infty\right)$$

Wariancja

Rozkład normalny, duża próba n> ok.50

Statystyka testowa: $U = \sqrt{\frac{2 \cdot n \cdot S^2}{\sigma_0^2}} - \sqrt{2n-3}$

$$H:\sigma^2 = \sigma_0^2 \quad K:\sigma^2 < \sigma_0^2 \qquad (-\infty, -u(1-\alpha)]$$

$$H:\sigma^2 = \sigma_0^2 \quad K:\sigma^2 > \sigma_0^2 \qquad [u(1-\alpha), \infty)$$

$$H:\sigma^2 = \sigma_0^2 \quad K:\sigma^2 \neq \sigma_0^2 \qquad \left(-\infty, -u\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right] \cup \left[u\left(1-\frac{\alpha}{2}\right), \infty\right)$$

Współczynnik korelacji

Dwuwymiarowy rozkład normalny,
duża próba n> ok.100

Statystyka testowa: $U = \frac{R}{1-R}\sqrt{n}$ $\qquad |R| \le 1$

$$H:\rho=0 \quad K:\rho<0 \qquad \left(-\infty,-u(1-\alpha)\right]$$

$$H:\rho=0 \quad K:\rho>0 \qquad \left[u(1-\alpha),\infty\right)$$

$$H:\rho=0 \quad K:\rho\neq 0 \qquad \left(-\infty,-u\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right]\cup\left[u\left(1-\frac{\alpha}{2}\right),\infty\right)$$

WYKŁAD 5

Współczynnik korelacji

Dwuwymiarowy rozkład normalny,
duża próba n> ok.10

Statystyka testowa:

$$U = \left(\frac{1}{2} \ln \frac{1+R}{1-R} - \frac{1}{2} \ln \frac{1+\rho_0}{1-\rho_0} \right) \sqrt{n-3} \qquad |R| \le 1$$

$$H: \rho = \rho_0 \quad K: \rho < \rho_0 \qquad \left(-\infty, -u(1-\alpha)\right]$$

$$H: \rho = \rho_0 \quad K: \rho > \rho_0 \qquad \left[u(1-\alpha), \infty\right)$$

$$H: \rho = \rho_0 \quad K: \rho \ne \rho_0 \qquad \left(-\infty, -u\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right] \cup \left[u\left(1-\frac{\alpha}{2}\right), \infty\right)$$

Równość średniej

Dwie populacje o rozkładach normalnych:
$N(\mu_1,\sigma_1)$ i $N(\mu_2,\sigma_2)$.
Znamy: σ_1 i σ_2. Nie znamy: μ_1 i μ_2.

Statystyka testowa:

$$U = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

$$H: \mu_1 = \mu_2 \quad K: \mu_1 < \mu_2 \qquad (-\infty, -u(1-\alpha)]$$

$$H: \mu_1 = \mu_2 \quad K: \mu_1 > \mu_2 \qquad [u(1-\alpha), \infty)$$

$$H: \mu_1 = \mu_2 \quad K: \mu_1 \neq \mu_2 \qquad \left(-\infty, -u\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right] \cup \left[u\left(1-\frac{\alpha}{2}\right), \infty\right)$$

WYKŁAD 5

Równość średniej

Dwie populacje o rozkładach normalnych:
$N(\mu_1,\sigma_1)$ i $N(\mu_2,\sigma_2)$.
Nie znamy: $\sigma_1=\sigma_2$, μ_1 i μ_2.

Statystyka testowa:

$$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \cdot \frac{n_1 + n_2}{n_1 \cdot n_2}}}$$

$$H: \mu_1 = \mu_2 \quad K: \mu_1 < \mu_2 \qquad \left(-\infty, -t(1-\alpha, n_1+n_2-2)\right]$$

$$H: \mu_1 = \mu_2 \quad K: \mu_1 > \mu_2 \qquad \left[t(1-\alpha, n_1+n_2-2), \infty\right)$$

$$H: \mu_1 = \mu_2 \quad K: \mu_1 \neq \mu_2 \qquad \left(-\infty, -t\left(1-\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2\right)\right] \cup \left[t\left(1-\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2\right), \infty\right)$$

Równość średniej

Dwie populacje o rozkładach normalnych: $N(\mu_1,\sigma_1)$ i $N(\mu_2,\sigma_2)$.
Nie znamy: σ_1 , σ_2 , μ_1 i μ_2.

Statystyka testowa: $$t = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

$$\upsilon = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{s_1^4}{n_1^2(n_1-1)} + \frac{s_2^4}{n_2^2(n_2-1)}}$$

$H: \mu_1 = \mu_2 \quad K: \mu_1 < \mu_2 \qquad \left(-\infty, -t(1-\alpha,\upsilon)\right]$

$H: \mu_1 = \mu_2 \quad K: \mu_1 > \mu_2 \qquad \left[t(1-\alpha,\upsilon), \infty\right)$

$H: \mu_1 = \mu_2 \quad K: \mu_1 \neq \mu_2 \qquad \left(-\infty, -t\left(1-\frac{\alpha}{2},\upsilon\right)\right] \cup \left[t\left(1-\frac{\alpha}{2},\upsilon\right), \infty\right)$

Test Welcha

Równość średniej

Dwie populacje o rozkładach normalnych:
$N(\mu_1,\sigma_1)$ i $N(\mu_2,\sigma_2)$. $n_1=n_2=n$
Nie znamy: σ_1 , σ_2 , μ_1 i μ_2.

Statystyka testowa: $t = \frac{\overline{D}}{S_D}\sqrt{n}$

$$\overline{D} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_{1i} - x_{2i}\right)$$

$$S_D = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_{1i} - x_{2i} - \overline{D}\right)^2}$$

$$H: \mu_1 = \mu_2 \quad K: \mu_1 < \mu_2 \qquad \left(-\infty, -t(1-\alpha, \upsilon)\right]$$

$$H: \mu_1 = \mu_2 \quad K: \mu_1 > \mu_2 \qquad \left[t(1-\alpha, \upsilon), \infty\right)$$

$$H: \mu_1 = \mu_2 \quad K: \mu_1 \neq \mu_2 \qquad \left(-\infty, -t\left(1-\frac{\alpha}{2}, \upsilon\right)\right] \cup \left[t\left(1-\frac{\alpha}{2}, \upsilon\right), \infty\right)$$

Test t-Studenta dla par zależnych

Wskaźnik struktury

Rozkład dwupunktowy z nieznanym prawdopodobieństwem Θ. $n\Theta_0 > 50$

Statystyka testowa:

$$U = \frac{M - n\Theta_0}{\sqrt{n\Theta_0(1-\Theta_0)}}$$

$$H:\Theta = \Theta_0 \quad K:\Theta < \Theta_0 \qquad (-\infty, -u(1-\alpha)]$$

$$H:\Theta = \Theta_0 \quad K:\Theta > \Theta_0 \qquad [u(1-\alpha), \infty)$$

$$H:\Theta = \Theta_0 \quad K:\Theta \neq \Theta_0 \qquad \left(-\infty, -u\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right] \cup \left[u\left(1-\frac{\alpha}{2}\right), \infty\right)$$

WYKŁAD 5

Wskaźnik struktury

Rozkład dwupunktowy z nieznanym prawdopodobieństwem Θ. $n\Theta_0<50$

Statystyka testowa:

$$U=\left(2\arcsin\sqrt{\frac{M}{n}}-2\arcsin\sqrt{\Theta_0}\right)\sqrt{n}$$

$$H:\Theta=\Theta_0 \quad K:\Theta<\Theta_0 \qquad \left(-\infty,-u(1-\alpha)\right]$$

$$H:\Theta=\Theta_0 \quad K:\Theta>\Theta_0 \qquad \left[u(1-\alpha),\infty\right)$$

$$H:\Theta=\Theta_0 \quad K:\Theta\neq\Theta_0 \qquad \left(-\infty,-u\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right]\cup\left[u\left(1-\frac{\alpha}{2}\right),\infty\right)$$

Test chi kwadrat

Zadanie:

Sprawdzić, czy n wyników pomiarów $x_1, \dots, x_n$ może pochodzić z jakiegoś rozkładu teoretycznego (np. normalnego, równomiernego, Poissona itp.)

Przepis:

Zliczamy ile wartości x_i znalazło się w każdym z m równych przedziałów otrzymując obserwowane liczby zliczeń w każdym przedziale O_i. Wyliczamy dla każdego przedziału teoretyczną (oczekiwaną liczbę zliczeń w tym przedziale) E_i. Liczymy statystykę chi kwadrat X^2, zgodnie ze wzorem:

$$X^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

Z tablic rozkładu X^2 dla liczby stopni swobody n-1 oraz zadanego poziomu ufności 1-α (często równego 0.95) odczytujemy wartość $X^2_{n-1,\,1-\alpha}$. Jeżeli wartość ta jest większa od obliczonej z powyższego wzoru wartości X^2 – nie mamy podstaw do odrzucenia hipotezy, że wyniki pomiarów są zgodne z danym rozkładem teoretycznym.