

Mikrotomografia

Rekonstrukcja



WYKŁAD OBIERALNY
JACEK TARASIUK

WYDZIAŁ FIZYKI I INFORMATYKI STOSOWANEJ
AGH, KRAKÓW

ver. 2018

Problem rekonstrukcji 3D



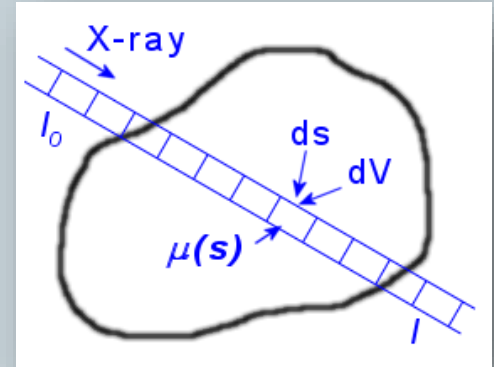
- Zaczynamy od równania na osłabienie wiązki: $I = I_0 e^{-\mu \cdot x}$

- Liczymy pochodną: $\frac{dI}{dx} = I_0 e^{-\mu \cdot x} \cdot (-\mu) = -\mu \cdot I$

- przepisujemy w postaci: $\frac{dI}{I} = -\mu \cdot dx$

- po scałkowaniu otrzymamy: $\ln|I| + C = -\int \mu(s) \cdot ds$

$$I = I_0 \cdot e^{-\int \mu(s) \cdot ds}$$



- Jedyne co znamy dla każdego wybranego promienia przenikającego przez próbkę to stosunek I_0/I . Znając ten stosunek, chcemy odtworzyć funkcję $\mu(s)$, która związana jest ze stosunkiem I_0/I niejednoznaczną relacją:

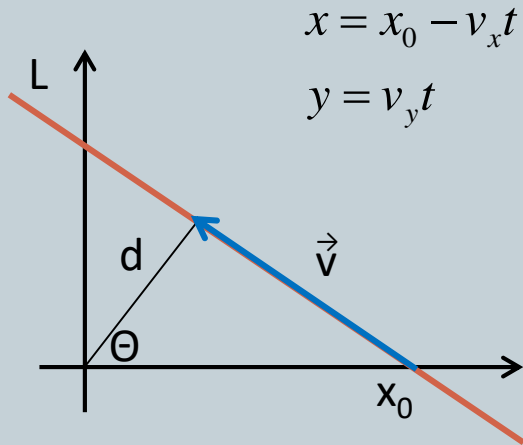
$$\int \mu(s) \cdot ds = \ln\left(\frac{I_0}{I}\right)$$

Matematyczne sformułowanie problemu



- Matematycznie zagadnienie sprowadza się do problemu:
 - dana jest dwuwymiarowa funkcja f szybko gasnąca w nieskończoności
 - dla każdej prostej L znamy: $F_L = \int_L f(s) ds$
 - wyznaczyć nieznaną funkcję f
- Powyższy problem został sformułowany i w pełni rozwiązany w 1917 roku przez Johanna Radona
- W teorii rekonstrukcji istotną rolę odgrywa przekształcenie nazywane transformatą Radona

Transformacja Radona



$$x = x_0 - v_x t$$

$$y = v_y t$$

$$x = x_0 - \frac{v_x}{v_y} y \quad \frac{d}{x_0} = \cos \theta \rightarrow x_0 = \frac{d}{\cos \theta}$$

$$v_x = x_0 - d \cos \theta = \frac{d}{\cos \theta} - d \cos \theta = \frac{d}{\cos \theta} \sin^2 \theta$$

$$v_y = d \sin \theta$$

$$x = \frac{d}{\cos \theta} - \frac{d \sin^2 \theta}{\cos \theta \cdot d \cdot \sin \theta} y$$

$$x \cos \theta + y \sin \theta = d$$

Transformacja Radona przekształca funkcję $f(x, y)$ w $F(d, \theta)$ i zdefiniowana jest jako:

co można zapisać:

$$F(d, \theta) = (Rf)(d, \theta) = \int_{L_{d, \theta}} f(x, y) \cdot ds$$

$$F(d, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \cdot \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - d) \cdot dx dy$$

Transformacja Radona



Istnieje transformata odwrotna do transformaty Radona:

$$f(x, y) = (R^{-1}F)(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{\partial F(d, \theta)}{\partial d}}{x \cos \theta + y \sin \theta - d} dd \cdot d\theta$$

- Jedno z możliwych podejść do problemu polega na przedstawieniu funkcji f w postaci szeregu wielomianów Hermite'a:

$$f(x, y) = \sum_{k,l=0} a_{k,l} \psi_{k,l}(x, y) \qquad \psi_{k,l}(x, y) = H_k(x) H_l(y) e^{-x^2 - y^2}$$

$$(Rf)(d, \theta) = \sum_{k,l=0} a_{k,l} (R\psi_{k,l})(d, \theta)$$

w takim podejściu rekonstrukcja sprowadza się do wyznaczenia współczynników rozwinięcia w szereg $a_{k,l}$

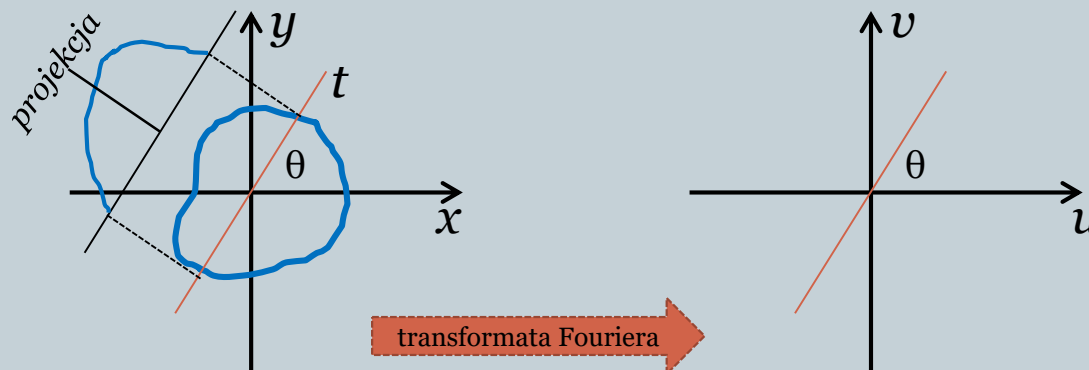
Metoda fourierowska



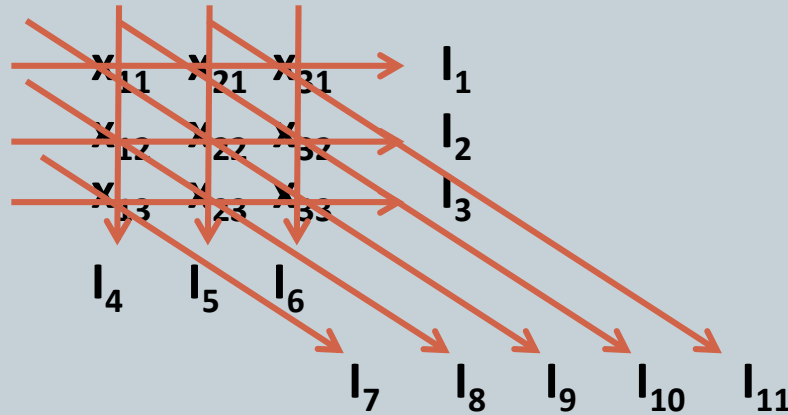
- Do rekonstrukcji stosuje się również transformatę Fouriera:

$$F(u, v) = \iint f(x, y) \cdot e^{-2\pi i(ux+vy)} dx dy \quad f(x, y) = \iint F(u, v) \cdot e^{2\pi i(ux+vy)} du dv$$

- W praktyce wykorzystuje się twierdzenie o przekrojach w przestrzeni fouriera, które mówi że: „jednowymiarowa transformata fouriera równoległej projekcji funkcji $f(x, y)$ wykonanej pod kątem θ jest równoważna przekrojowi przez dwuwymiarową funkcję transformaty $F(u, v)$ wykonaną pod kątem θ do kierunku u ”.



Rekonstrukcja algebraiczna



$$\begin{aligned}x_{11} + x_{21} + x_{31} &= I_1 \\x_{12} + x_{22} + x_{32} &= I_2 \\x_{13} + x_{23} + x_{33} &= I_3 \\x_{11} + x_{12} + x_{13} &= I_4 \\x_{21} + x_{22} + x_{23} &= I_5 \\&\dots\end{aligned}$$

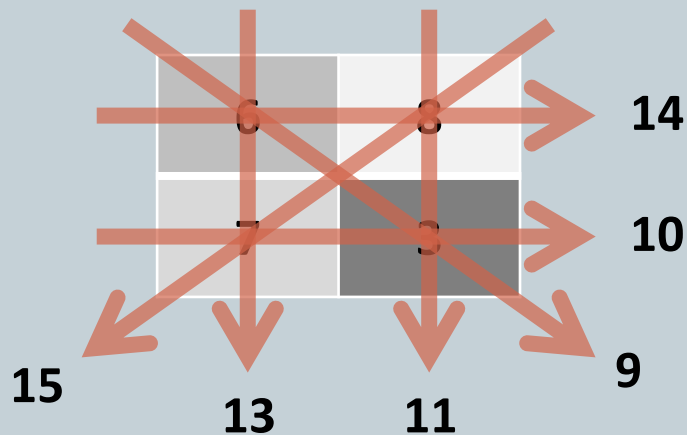
- Metoda algebraiczna opiera się na rozwiązywaniu układu równań liniowych
- Metoda nie sprawdza się już przy niezbyt dużych rozdzielczościach z powodu kosztów obliczeniowych
- Współcześnie, mówiąc o metodzie algebraicznej najczęściej ma się na myśli metodę iteracyjną, która sprowadza się do iteracyjnego rozwiązywania układu równań.

Rekonstrukcja algebraiczna

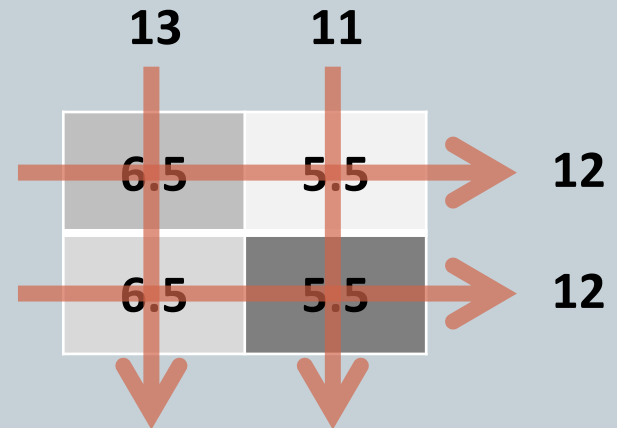


- Technika rekonstrukcji algebraicznej (**ART**. – *ang. algebraic reconstruction technique*) jest metodą iteracyjną opartą na zasadzie prób i błędów
- Przykład: prześwietlamy obiekt składający się z czterech wokseli przy użyciu sześciu promieni w czterech kierunkach

Krok 0 - prześwietlenie



Krok 1 – pierwsze przybliżenie



Rekonstrukcja algebraiczna

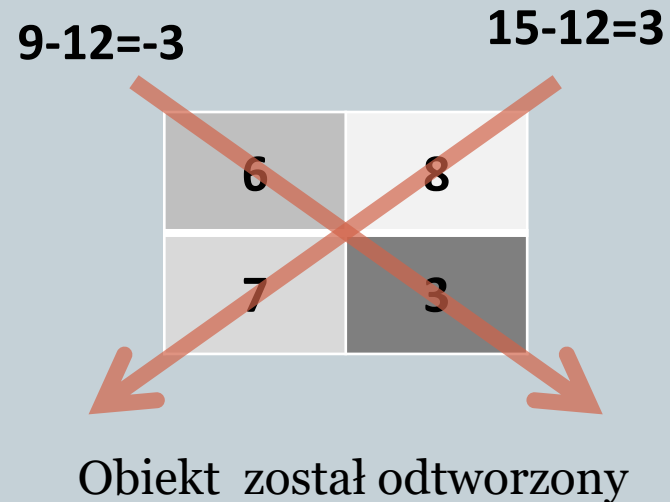


- Technika rekonstrukcji algebraicznej (**ART**. – *ang. algebraic reconstruction technique*) jest metodą iteracyjną opartą na zasadzie prób i błędów
- Przykład: prześwietlamy obiekt składający się z czterech wokseli przy użyciu sześciu promieni w czterech kierunkach

Krok 2 – pierwsza korekta



Krok 3 – druga korekta

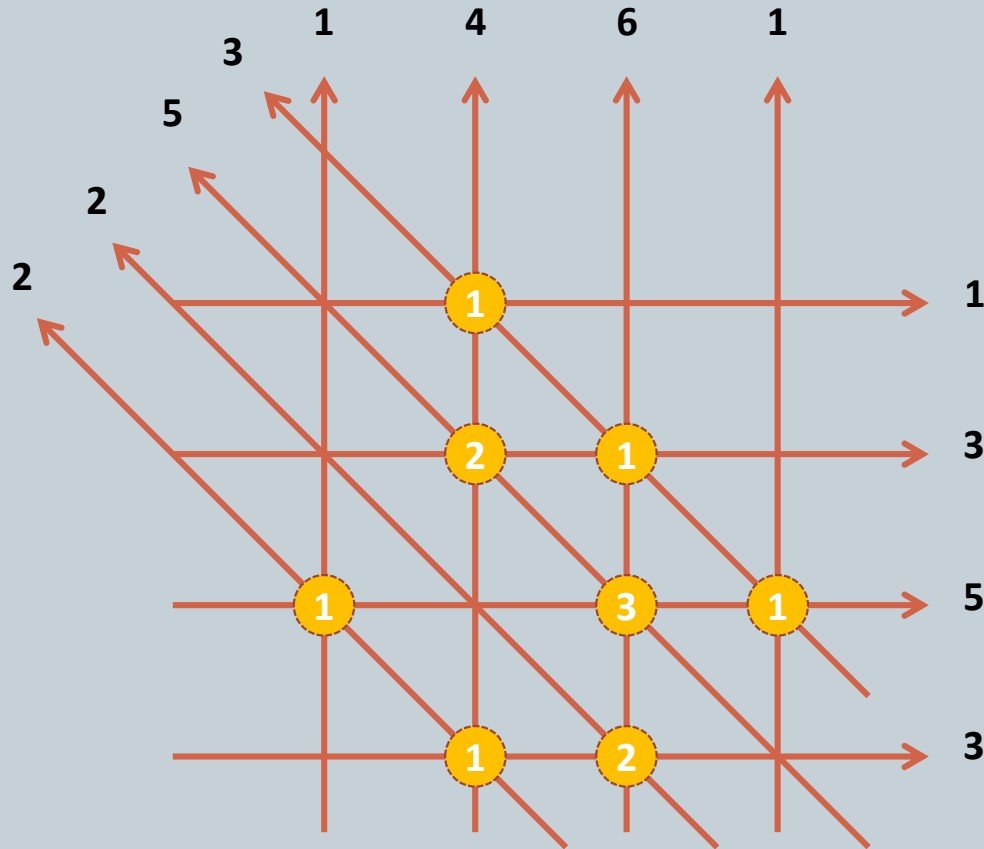


Rekonstrukcja algebraiczna

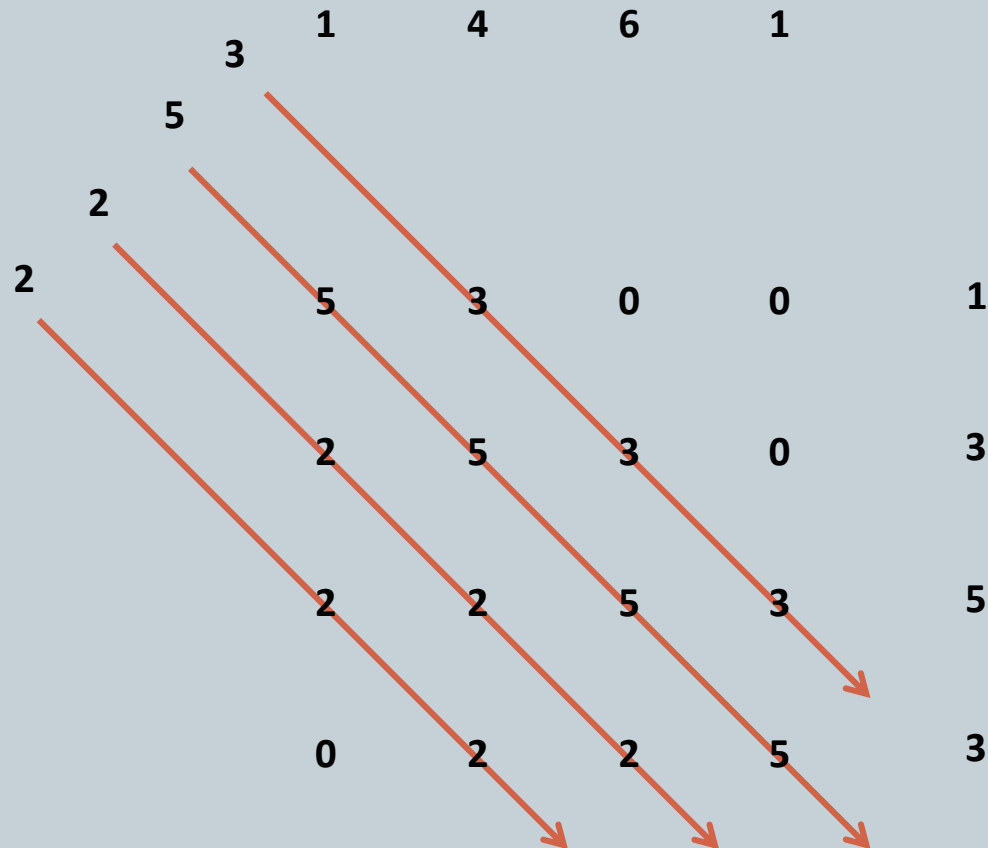


- Technika rekonstrukcji algebraicznej (**ART.** – *ang. algebraic reconstruction technique*) jest metodą iteracyjną opartą na zasadzie prób i błędów
- Przykład: prześwietlamy obiekt składający się z czterech wokseli przy użyciu sześciu promieni w czterech kierunkach
- Obecnie jedynym polem zastosowań rekonstrukcji algebraicznej są sytuacje, w których brakuje niektórych projekcji, a więc w niektórych kierunkach obiekt nie został prześwietlony. Takie sytuacje mogą wystąpić, na przykład gdy:
 - obiekt jest zbyt duży, aby wykonać nim pełen obrót
 - obiekt jest bardzo silnie spłaszczony i w jednym z kierunków promieniowanie jest praktycznie w całości pochłaniane

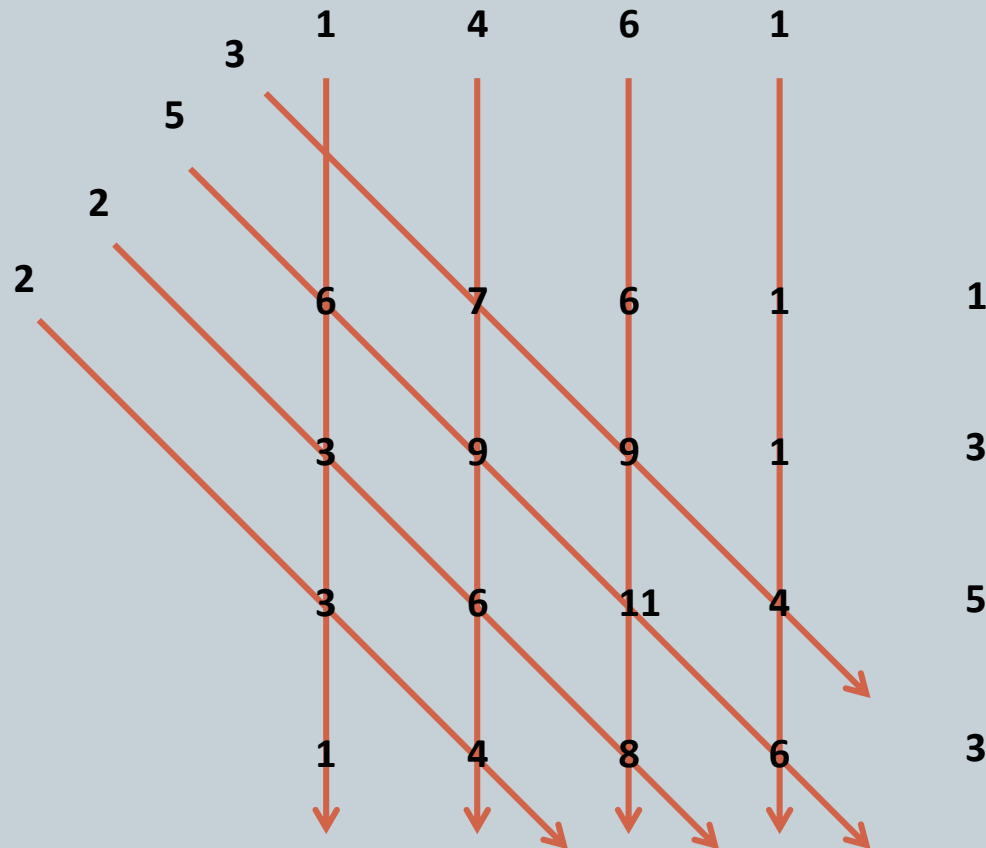
Projekcja wsteczna



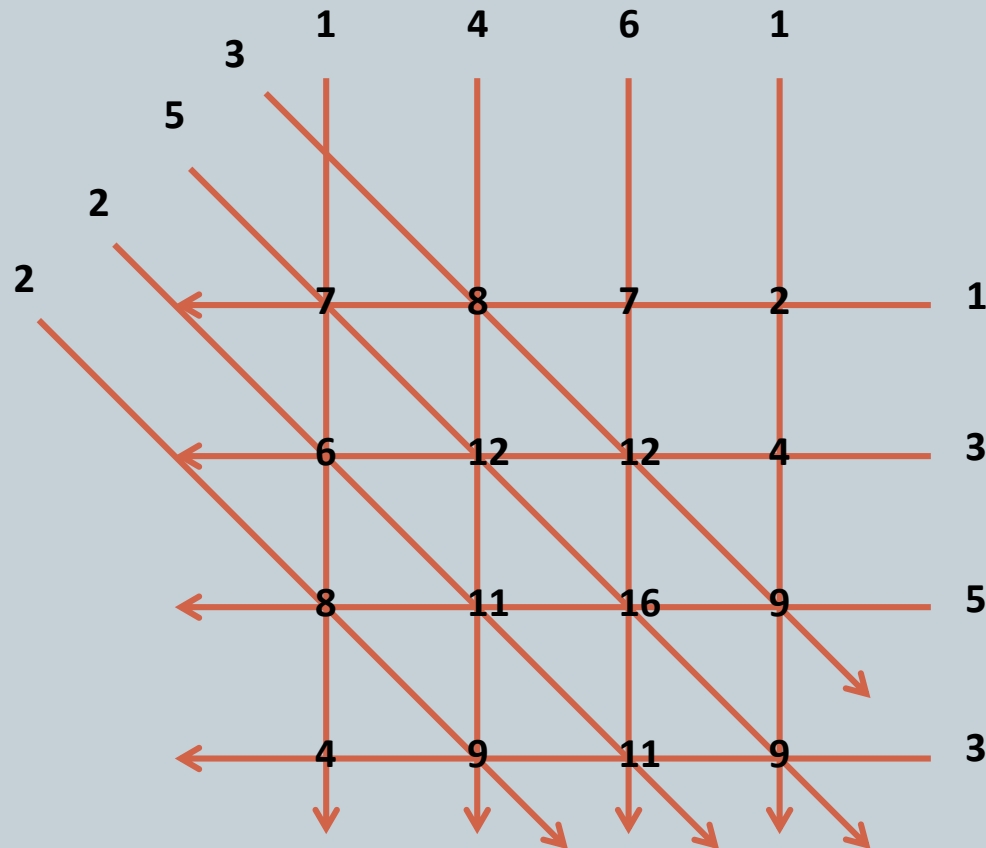
Projekcja wsteczna



Projekcja wsteczna



Projekcja wsteczna

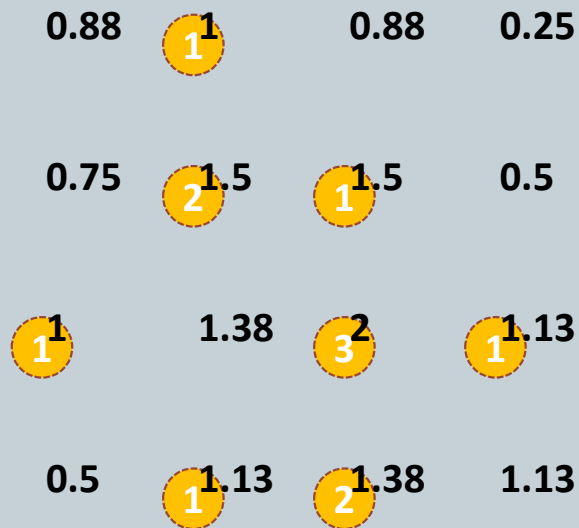


Projekcja wsteczna



7	8 1	7	2
6	12 2	12 1	4
8 1	11	16 3	9 1
4	9 1	11 2	9

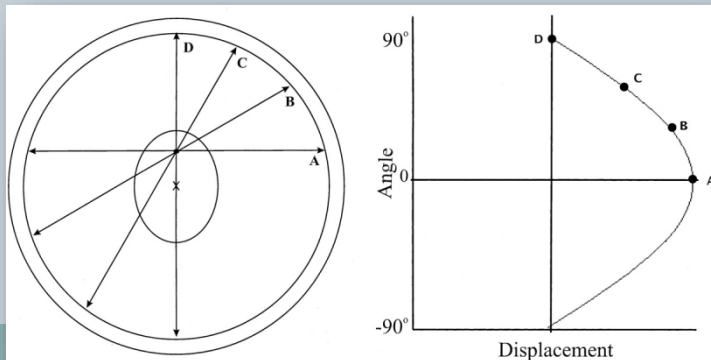
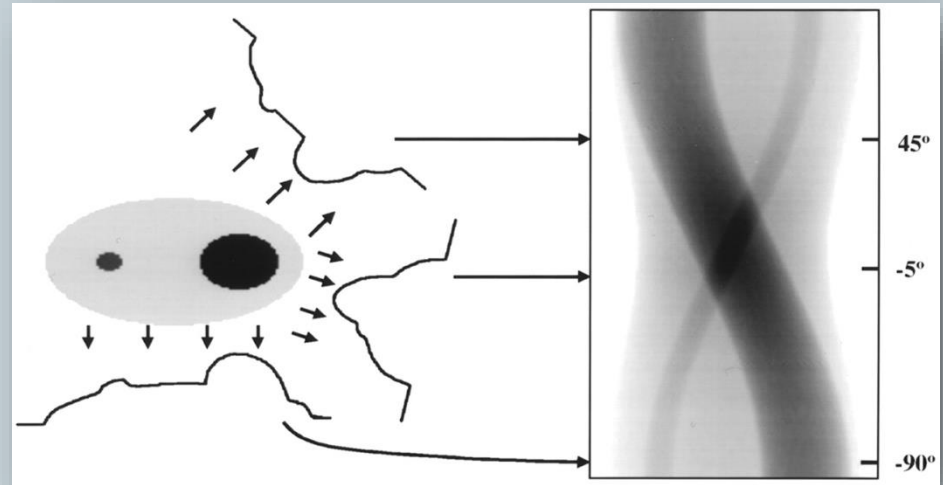
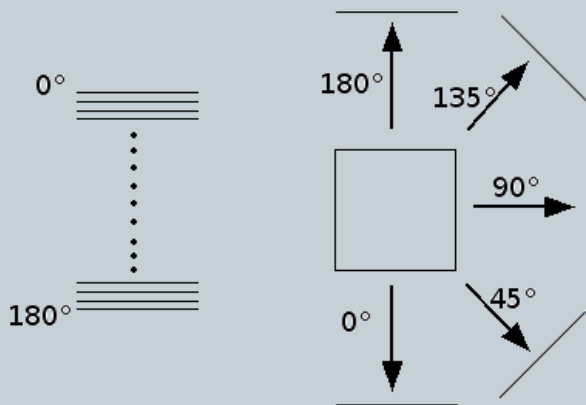
Projekcja wsteczna



Sinogram



- Reprezentacja osłabienia wiązki dla jednego wybranego przekroju dla wszystkich projekcji (prześwietleń dla wszystkich kątów)



Tak naprawdę, sinogram wynika z tego, że obrazem punktu w transformacji Radona jest sinusoida.

Projekcja wsteczna filtrowana

- W celu uniknięcia efektów rozmycia i fałszywych wartości odtworzonej funkcji stosuje się funkcje filtrujące projekcje
- Typowe funkcje filtrujące:
 - Ram-Lak z prostokątnym oknem
 - Shepp-Logan z oknem sinusoidalnym
 - kosinus z oknem kosinusowym
 - funkcja Hamminga z uogólnionym oknem Hamminga

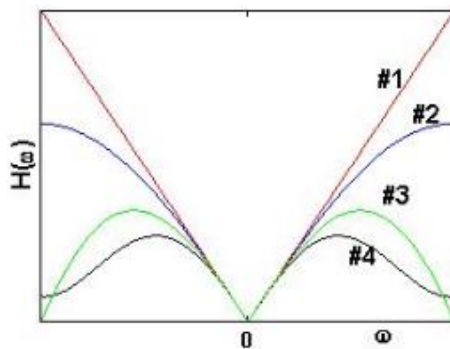
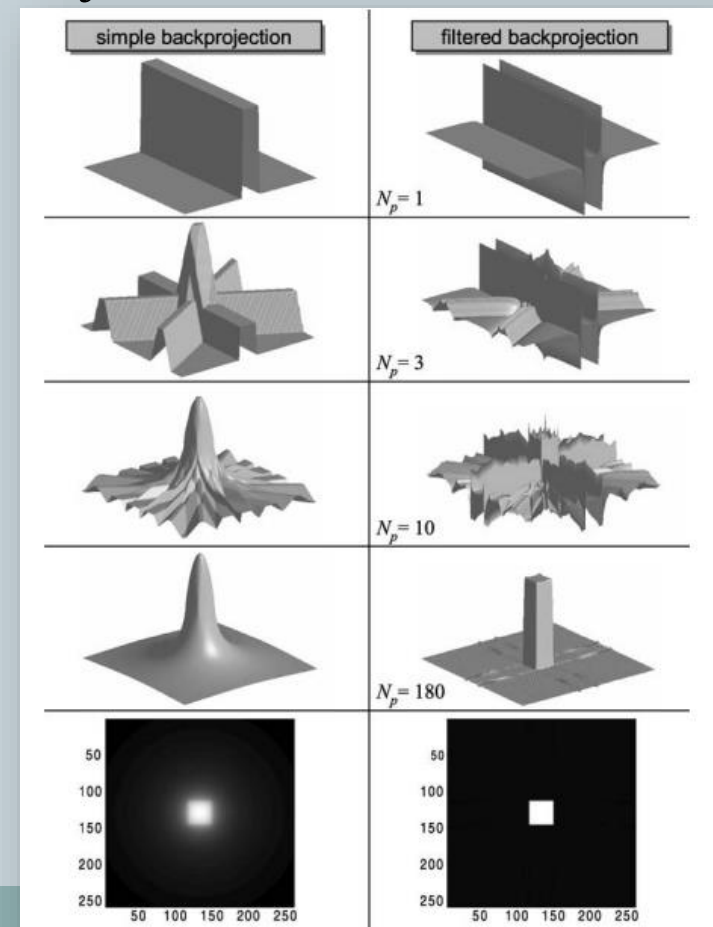
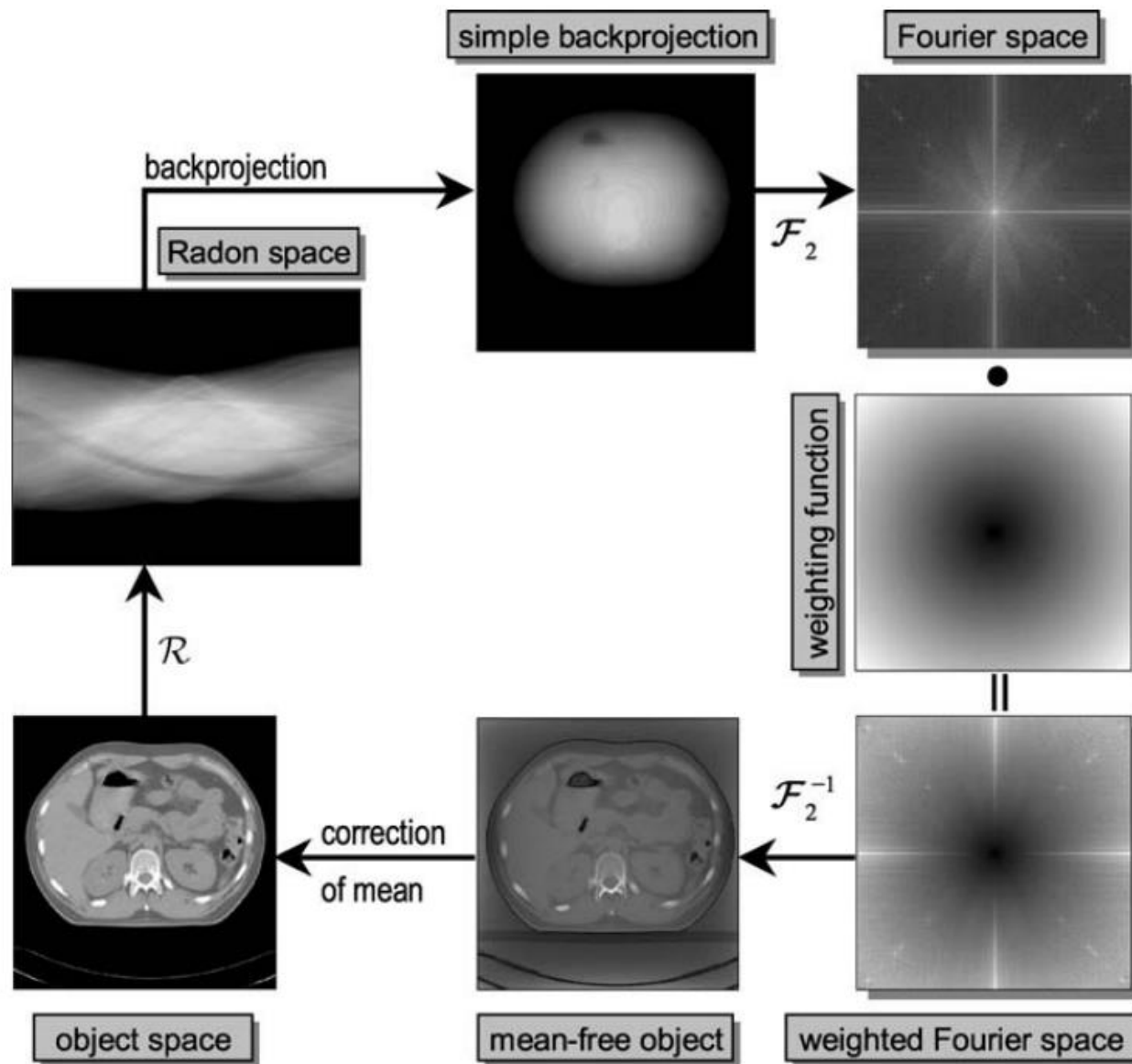


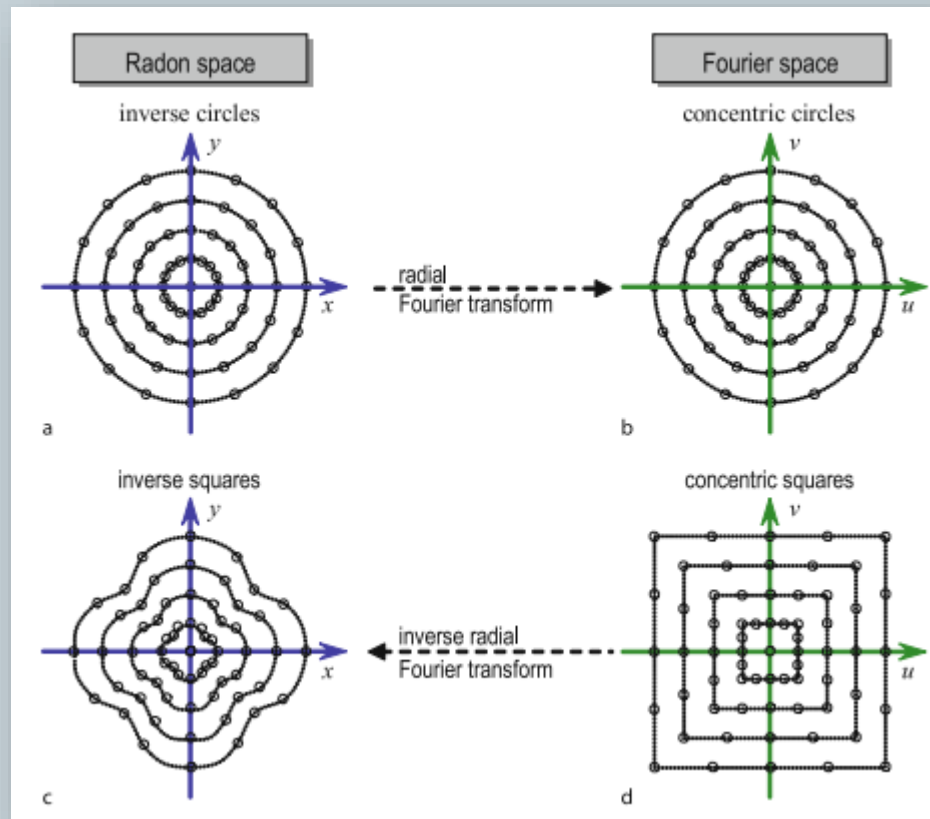
Fig. 2. Magnitude response of backprojection filters.
1=Ram-Lak (ramp), 2=Shepp-Logan, 3=Cosine, and 4=Hamming.



Projekcja wsteczna filtrowana



Projekcja wsteczna filtrowana



Jakość rekonstrukcji



- Jakość rekonstrukcji zależy od tego:
 - jak dokładnie obiekt jest próbkowany (rozmiary pojedynczej projekcji $W \times H$ oraz liczba projekcji N)
 - jak dokładnie określono osłabienie wiązki w każdym punkcie - $\ln(I_0/I)$ (szumy i błędy systematyczne)
 - jak dokładnie w kolejnych projekcjach utrzymano orientację geometryczną punktów względem globalnego układu współrzędnych
- W i H zależą od minimalnych rozmiarów obiektów, które chcemy rejestrować
- N zależy od tego jak dokładnie chcemy rekonstruować zewnętrzne (dalekie od osi obrotu) fragmenty próbki

Jakość rekonstrukcji



- Dokładność z jaką mogą być oszacowane liniowe współczynniki osłabienia można wyrazić za pomocą wariancji:

$$\sigma^2 = \text{const} \cdot \frac{\nu}{N \cdot \langle I \rangle}$$

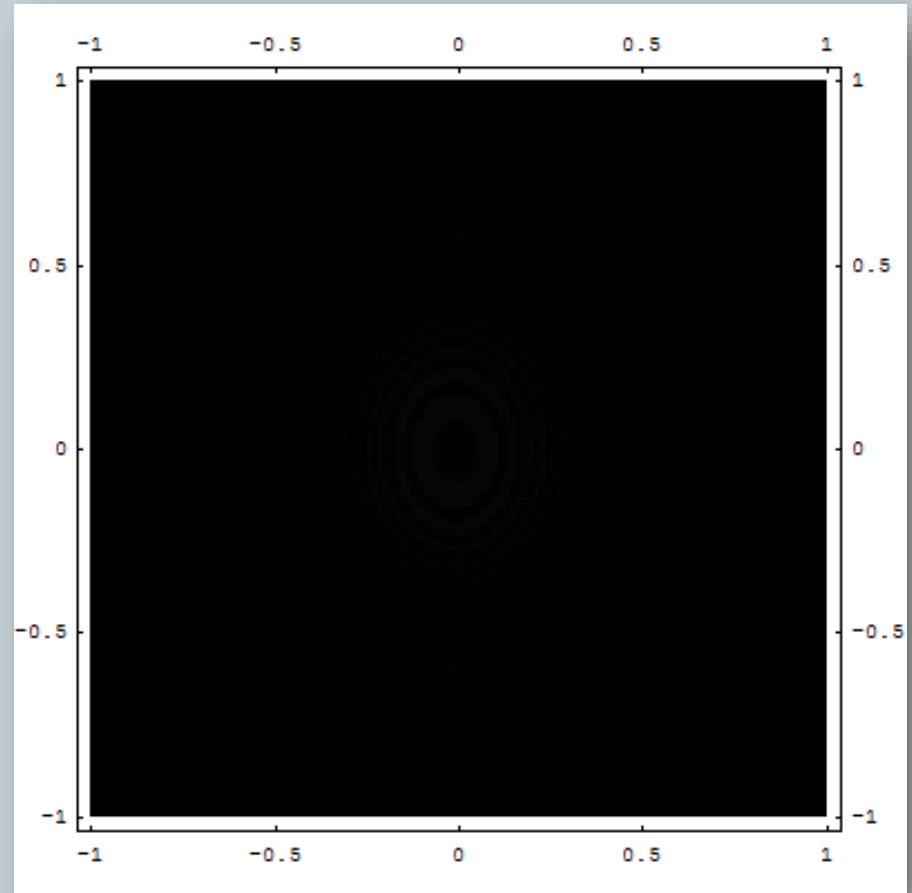
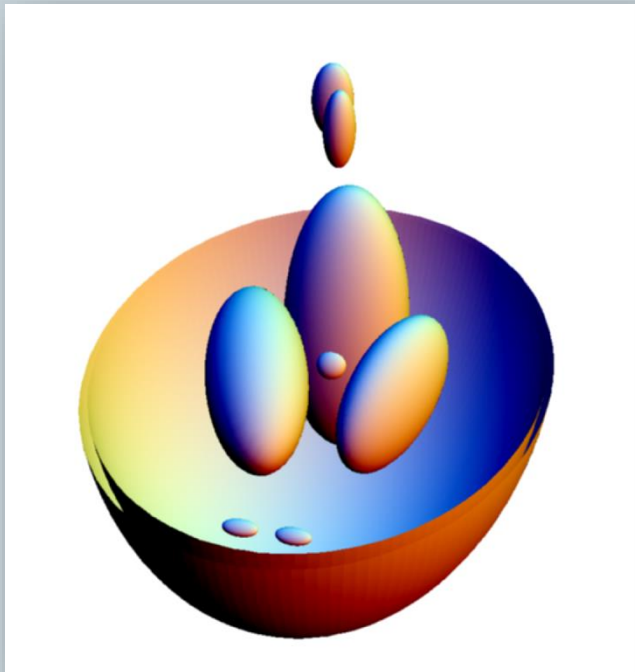
gdzie:

ν – rozdzielczość przestrzenna

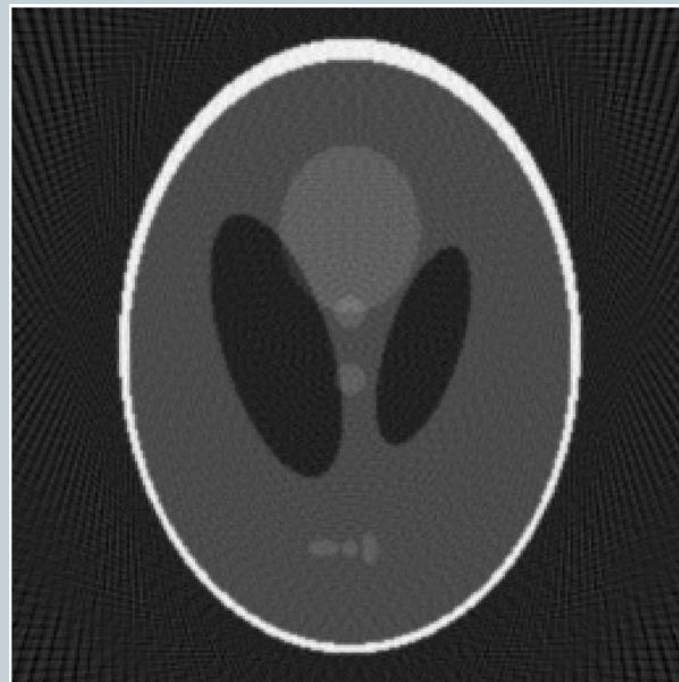
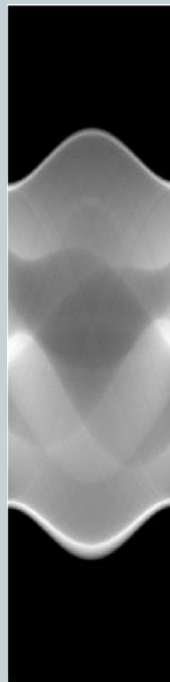
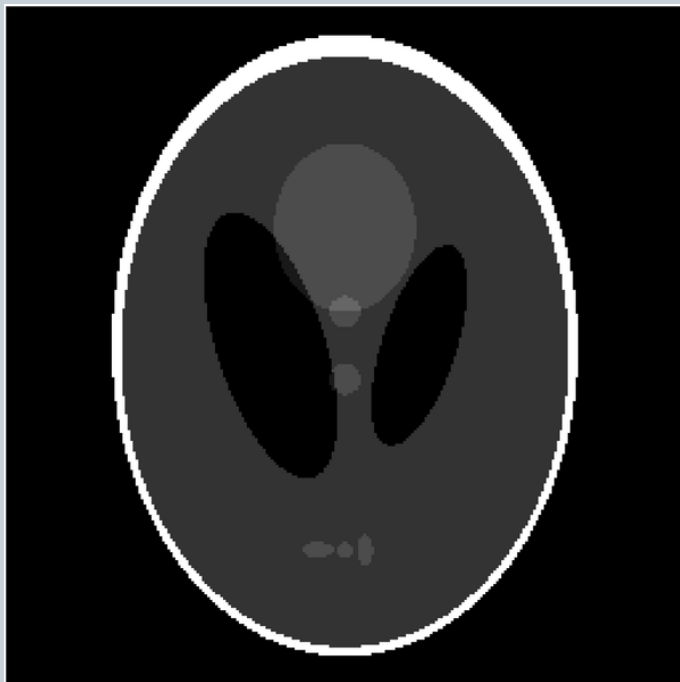
N – liczba projekcji

$\langle I \rangle$ – średnia liczba fotonów transmitowanych przez środek próbki

Fantom Sheppa-Logana



Fantom Sheppa-Logana



Fantom Sheppa-Logana, jego sinogram oraz odwrotna transformacja Radona
(wikipedia.org)

Inne techniki bazujące na CT

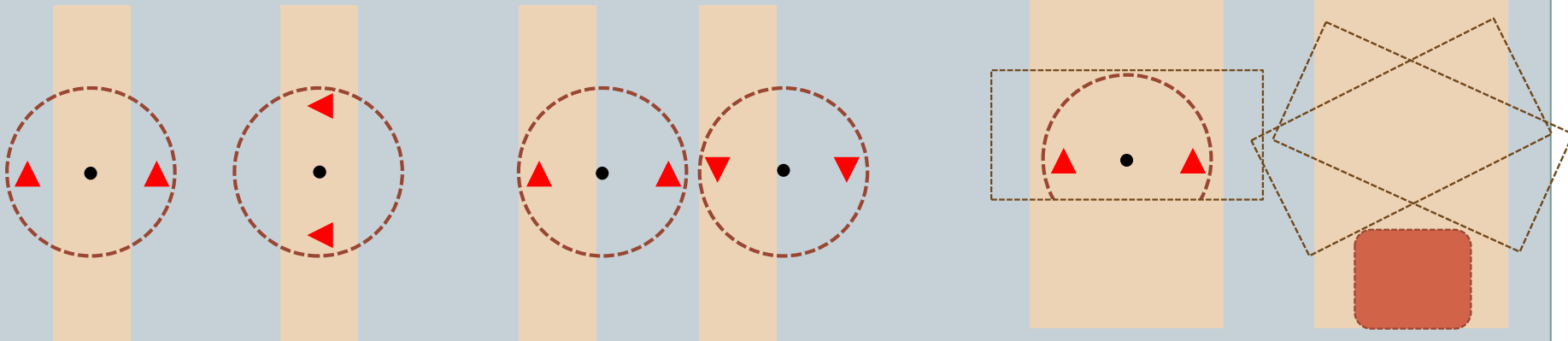


- Radiografia stereoskopowa
 - *Metoda stosowana do obrazowania obiektów o silnie anizotropowym kontraście (np. pęknięcia)*
- Tomografia lokalna
 - *Rozwinięcie tradycyjnej tomografii na badanie fragmentów obiektów nie mieszczących się w wiązce. Obecnie powszechnie stosowana.*
- Laminografia
 - *Do badania płaskich i rozległych struktur (warstwy, powierzchnie, płytki drukowane itp.)*

Tomografia lokalna

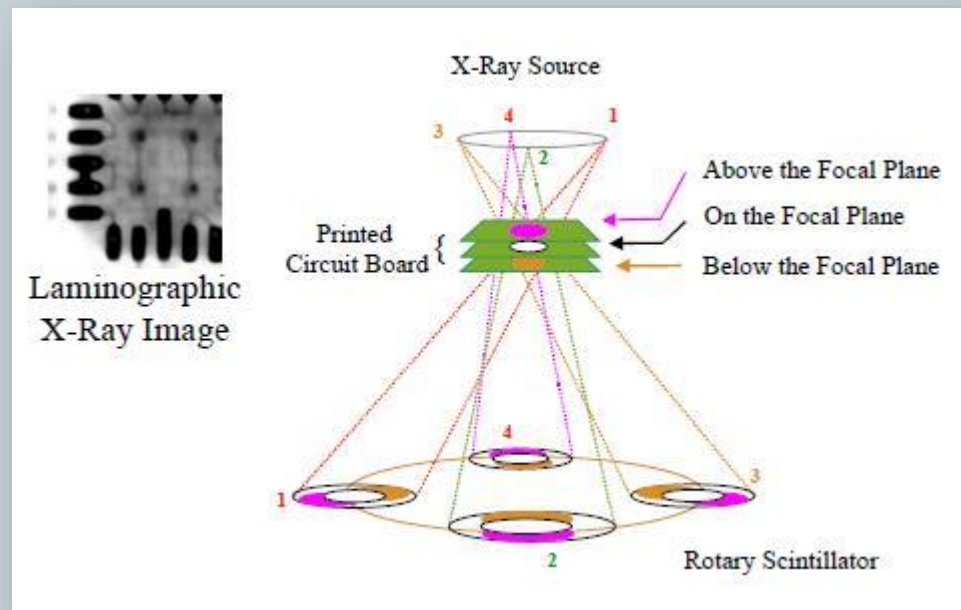
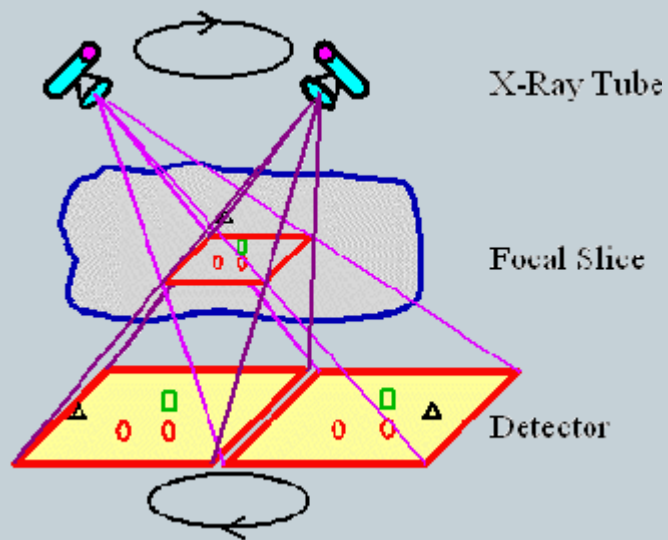


- Część próbki w trakcie pomiaru znajduje się poza wiązką.
- Błędy rekonstrukcji są tym większe im większa masa i im dłuższy czas znajduje się poza wiązką.
- Tomografia lokalna sprawdza się bardzo dobrze w przypadku lekkich próbek



Laminografia

- Rentgenowska metoda służąca do obrazowania struktury obiektów płaskich (dwa rozmiary duże, jeden mały)



Laminografia



- Rentgenowska metoda służąca do obrazowania struktury obiektów płaskich (dwa rozmiary duże, jeden mały)

