AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

Relacje

Teoria automatów i języków formalnych

Dr inż. Janusz Majewski
Katedra Informatyki

Określenie relacji

Określenie relacji:

Relacja *R* jest zbiorem par uporządkowanych, czyli podzbiorem iloczynu kartezjańskiego dwóch zbiorów: *A* (dziedzina relacji) i *B* (przeciwdziedzina relacji)

$R \subseteq A \times B$

Zamiast pisać $(a, b) \in R$ piszemy często aRb.

Jeśli dziedzina i przeciwdziedzina relacji są tym samym zbiorem $(A=B)$, to mówimy o relacji określonej na zbiorze *A*.

$R \subseteq A \times A$

Właściwości relacji

Własności relacji:

Mówimy, że relacja *R* na zbiorze *A* jest:

- zwrotna, jeśli $(\forall a \in A)\ (aRa)$
- przeciwzwrotna, jeśli $(\forall a \in A)\ (\neg(aRa))$
- przechodnia, jeśli $(aRb \wedge bRc) \Rightarrow aRc$
- symetryczna, jeśli $aRb \Rightarrow bRa$
- przeciwsymetryczna, jeśli $aRb \Rightarrow \neg(bRa)$
- antysymetryczna, jeśli $(aRb \wedge bRa) \Rightarrow a=b$

Relacje równoważności

Relację *R* na zbiorze *A* nazywamy relacją równoważności, gdy *R* jest:

- zwrotna,
- symetryczna,
- przechodnia.

Relacja równoważności dzieli zbiór *A* na klasy równoważności (klasy abstrakcji). Przez $[a]_R$ oznaczamy klasę równoważności relacji *R* o reprezentancie *a*.

$$[a]_R = \{ b \mid b \in A \wedge aRb \}$$

$$(\forall a,b \in A)\ ([a]_R = [b]_R \vee [a]_R \cap [b]_R = \emptyset)$$

$$\bigcup_{a \in A} [a]_R = A$$

Relacje częściowego porządku (1)

Relacją <u>częściowego porządku</u> na zbiorze *A* nazywamy relację ≤, która jest:

- zwrotna,
- przechodnia,
- antysymetryczna.

Jeśli ≤ jest relacją częściowo porządkującą zbiór *A* to parę (A, ≤) nazywamy zbiorem częściowo uporządkowanym.

Przykładem relacji częściowego porządku może być relacja zawierania się zbiorów (⊆) określona na zbiorze potęgowym.

Relacje częściowego porządku (2)

<u>Przykład</u>: Zbiór **P** = {1, 2, …} jest częściowo uporządkowany przez relację podzielności | ($n|m \Leftrightarrow n$ jest dzielnikiem m), gdyż:

- $n|n$ (zwrotność),
- $(n|m \wedge m|k) \Rightarrow n|k$ (przechodniość),
- $(n|m \wedge m|n) \Rightarrow n=m$ (antysymetria).

Jeśli ≤ jest relacją częściowego porządku na zbiorze *A*, to relacja ≺ zdefiniowana w *A* następująco:

$a \prec b \Leftrightarrow (a \leq b \ \wedge \ a \neq b)$

jest relacją przeciwzwrotną, przechodnią i przeciwsymetryczną nazywaną <u>quasi-porządkiem</u>. Każdy częściowy porządek w zbiorze *A* wyznacza pewien quasi-porządek i, na odwrót, jeśli ≺ jest quasi-porządkiem w A, to relacja ≤ zdefiniowana formułą

$a \leq b \Leftrightarrow (a \prec b \ \vee \ a = b)$

jest częściowym porządkiem w *A*.

Relacje porządkujące - element minimalny

Niech $(A, \leq)$ będzie zbiorem częściowo uporządkowanym. Element a_0 nazywamy minimalnym, jeśli nie poprzedza go żaden element w tym zbiorze, czyli

$\neg(\exists a \in A)\ (a \prec a_0)$

Przykład: w zbiorze $\mathbf{P}_1 = \{1, 2, \ldots\}$ częściowo uporządkowanym przez relację podzielności | ($n|m \Leftrightarrow n$ jest dzielnikiem m) jest dokładnie jeden element minimalny. Jest to 1, gdyż dzieli ona wszystkie pozostałe liczby, a nie istnieje liczba, która dzieli jedynkę.

Przykład: w zbiorze $\mathbf{P}_2 = \{2, 3, \ldots\}$ częściowo uporządkowanym przez relację podzielności | ($n|m \Leftrightarrow n$ jest dzielnikiem m) jest nieskończenie wiele elementów minimalnych. Są to wszystkie liczby pierwsze, gdyż żadna liczba $n \neq p$ ze zbioru nie dzieli liczby pierwszej p.

Relacje porządkujące - element najmniejszy

Niech $(A, \leq)$ będzie zbiorem częściowo uporządkowanym. Element a_0 nazywamy najmniejszym, jeśli jest on w relacji $\leq$ ze wszystkimi elementami tego zbioru, czyli

$a_0 \leq a$ dla każdego $a \in A$

Przykład: w zbiorze $\mathbf{P}_1 = \{1, 2, \ldots\}$ częściowo uporządkowanym przez relację podzielności | ($n|m \Leftrightarrow n$ jest dzielnikiem m) jest dokładnie jeden element najmniejszy. Jest to 1, gdyż dzieli ona wszystkie pozostałe liczby.

Przykład: w zbiorze $\mathbf{P}_2 = \{2, 3, \ldots\}$ częściowo uporządkowanym przez relację podzielności | ($n|m \Leftrightarrow n$ jest dzielnikiem m) nie ma elementu najmniejszego, gdyż żadna liczba $n > 1$ nie dzieli wszystkich liczb większych od 1.

Relacje liniowego porządku

Relacją <u>liniowego porządku</u> na zbiorze *A* nazywamy relację *R*, która posiada następujące własności:

- jest relacją częściowego porządku, tzn. jest zwrotna, przechodnia i antysymetryczna,
- spełnia warunek spójności:

$$(\forall a,b \in A)\ (\ aRb\ \vee\ bRa\ )$$

Jeśli ≤ jest relacją liniowo porządkującą zbiór *A* to parę (A, ≤) nazywamy zbiorem liniowo uporządkowanym.

Przykładem relacji liniowego porządku jest relacja „mniejszy lub równy” (≤) określona na zbiorze nieujemnych liczb całkowitych.

Relacje liniowego porządku oraz relacje dobrego porządku

Jeśli (A, ≤) jest zbiorem liniowo uporządkowanym, a $B \subseteq A$ jest podzbiorem zbioru A, to (B, ≤) jest również zbiorem liniowo uporządkowanym.

W zbiorze liniowo uporządkowanym (A, ≤) następujące warunki są równoważne:

- a_0 jest elementem minimalnym,
- $a_0 \prec a$ dla każdego $a \in A-\{a_0\}$
- a_0 jest elementem najmniejszym.

Zbiór liniowo uporządkowany (A, ≤) jest zbiorem <u>dobrze uporządkowanym</u>, jeśli każdy niepusty podzbiór B zbioru A ($B \subseteq A$, $B \neq \emptyset$) posiada element najmniejszy.

Jeśli (A, ≤) jest zbiorem dobrze uporządkowanym, a $B \subseteq A$ jest podzbiorem zbioru A, to (B, ≤) jest również zbiorem dobrze uporządkowanym.

Domknięcia relacji (1)

Domknięcia relacji:

k-ty stopień R^k relacji R na zbiorze A określamy następująco:

$aR^0b \Leftrightarrow a=b$

$aR^1b \Leftrightarrow aRb$

....

$aR^kb \Leftrightarrow (\exists c \in A)\ (aRc \wedge cR^{k-1}b)$

czyli np.

$aR^2b \Leftrightarrow (\exists c \in A)\ (aRc \wedge cRb)$

$aR^3b \Leftrightarrow (\exists c_1 \in A)\ (aRc_1 \wedge c_1R^2b) \Leftrightarrow$
$(\exists c_1, c_2 \in A)\ (aRc_1 \wedge c_1Rc_2 \wedge c_2Rb)$

Domknięcia relacji (2)

Przykład:

$R \subseteq \mathbf{N} \times \mathbf{N}$

$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, ...\}$ – zbiór liczb naturalnych (z zerem)

$nRm \Leftrightarrow n = m+2$

$nR^2m \Leftrightarrow n = p+2 \wedge p = m+2 \Leftrightarrow n = m+4$

$nR^3m \Leftrightarrow n = p_1+2 \wedge p_1 = p_2+2 \wedge p_2 = m+2 \Leftrightarrow n = m+6$

$(8, 6) \in R$

$(8, 4) \in R^2$

$(8, 2) \in R^3$

Domknięcia relacji (3)

Przechodnie domknięcie R^+ relacji R na zbiorze A definiujemy następująco:

$aR^+b \Leftrightarrow (\exists i \geq 1)\ (aR^ib)$

Przechodnie i zwrotne domknięcie R^* relacji R na zbiorze A definiujemy następująco:

$aR^*b \Leftrightarrow (\exists i \geq 0)\ (aR^ib)$

Inna (rekurencyjna) definicja domknięcia przechodniego R^+

1) $aRb \Rightarrow aR^+b$
2) $(aR^+b \wedge bR^+c) \Rightarrow aR^+c$
3) nic innego nie należy do R^+ poza tym, co wynika z punktów (1) i (2).

Domknięcia relacji (4)

Niektóre użyteczne zależności:

$aR^*b \Leftrightarrow aR^+b \vee a=b$

$R^* = R^+ \cup R^o$

$R^+ = \bigcup_{i \geq 1} R^i$

$R^* = \bigcup_{i \geq 0} R^i$

Domknięcia relacji (5)

Przechodnie domknięcie R^{+k} relacji R stopnia k na zbiorze A definiujemy następująco:

$aR^{+k}b \Leftrightarrow (\exists\ 1 \leq i \leq k) (aR^ib)$

Przechodnie i zwrotne domknięcie R^{*k} relacji R stopnia k na zbiorze A definiujemy następująco:

$aR^{*k}b \Leftrightarrow (\exists\ 0 \leq i \leq k) (aR^ib)$

Niektóre użyteczne zależności:

$$R^{+k} = R^1 \cup R^2 \cup \ldots \cup R^k = \bigcup_{1 \leq i \leq k} R^i$$

$$R^{*k} = R^0 \cup R^1 \cup \ldots \cup R^k = \bigcup_{0 \leq i \leq k} R^i$$

Twierdzenie:

Niech $n = \#A$, $n < \infty$ (zbiór A jest skończony). Wtedy $R^+ \subseteq R^{+n}$

Macierze boolowskie relacji (1)

<u>Macierze boolowskie relacji:</u>

Niech:

$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$

$R \subseteq A \times A$

$I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$

Macierzą boolowską M reprezentującą relację R nazywamy odwzorowanie:

$M: I_n \times I_n \to \{0, 1\}$

takie, że:

$$M_{ij} = M(i, j) = \begin{cases} 1 \Leftrightarrow a_i R a_j \\ 0 \Leftrightarrow \neg(a_i R a_j) \end{cases}$$

Macierze boolowskie relacji (2)

Przykład:

A = {a_1, a_2, a_3}

R = {(a_1, a_3), (a_2, a_3), (a_3, a_2)}

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Macierze boolowskie relacji (3)

Niech *R′* i *R″* będą relacjami i niech *M′* reprezentuje *R′* oraz *M″* reprezentuje *R″*.

$R' \subseteq A \times A \qquad R'' \subseteq A \times A$

Niech *R* będzie sumą teoriomnogościową *R′* i *R″*

$$R = R' \cup R''$$

$$a_1 R a_2 \Leftrightarrow a_1 R' a_2 \vee a_1 R'' a_2$$

Wówczas:

$$M = M' \vee M''$$

$$M_{ij} = \begin{cases} 1 \Leftrightarrow M'_{ij} = 1 \vee M''_{ij} = 1 \\ 0 \Leftrightarrow M'_{ij} = 0 \wedge M''_{ij} = 0 \end{cases}$$

Macierze boolowskie relacji (4)

Niech teraz *R* będzie złożeniem *R′* i *R″*

R = R′ R″

$a_1 R a_2 \Leftrightarrow (\exists a \in A)(a_1 R' a \wedge a R'' a_2)$

Wówczas:

M = M′ · M″

$$M_{ij} = \bigvee_{k=1}^{n} M'_{ik} \wedge M''_{kj}$$

$$M'_{ik} \wedge M''_{kj} = \begin{cases} 1 \Leftrightarrow M'_{ik} = 1 \wedge M''_{kj} = 1 \\ 0 \Leftrightarrow M'_{ik} = 0 \vee M''_{kj} = 0 \end{cases}$$

Macierze boolowskie relacji (5)

Przykład:

A = {a, b}

R′ = {(a, a), (a, b), (b, b)}

R″ = {(a, b), (b, a)}

R_1 = R′ ∪ R″= {(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)}

R_2 = R′ R″= {(a, a), (a, b), (b, a)}

$$M' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M'' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_1 = M' \vee M'' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_2 = M' \cdot M'' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Macierze boolowskie relacji (6)

Obliczanie domknięcia przechodniego dla $R \subset A{\times}A;\ n = \#A < \infty$

Ponieważ $R^{+} \subseteq R^{+n}$, więc wystarczy obliczyć

$R^{+} = R^{1} \cup R^{2} \cup \ldots \cup R^{n}$

Algorytm:

Wejście: *R* reprezentowane przez *M*

Wyjście: R^{+} reprezentowane przez M^{+}

```
M+ := 0;    (0 – macierz zerowa)
M' := M;
for i := 1 to n do
      begin
            M+ := M+ ∨ M';
            M' := M' · M;
      end;
```

Macierze boolowskie relacji (7)

Przykład:

A = {a, b, c}

R = {(a, c), (b, c), (c, a)}

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Początkowo:

$$M^{+} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \qquad M^{'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Macierze boolowskie relacji (8)

i = 1

$$M^{+} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \qquad M^{'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

i = 2

$$M^{+} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad M^{'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

i = 3

$$M^{+} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

Ostatecznie:

$R^{+} = \{(a, a), (a, c), (b, a), (b, c), (c, a), (c, c)\}$