## *1.5. Relacje prawostronnie niezmiennicze*

Omawiane w niniejszym podrozdziale relacje zdefiniowane są w zbiorze wszystkich słów nad pewnym skończonym alfabetem.

Relacja prawostronnie niezmiennicza

Relację $R \subseteq T^* \times T^*$ (gdzie $T$ jest skończonym alfabetem symboli) nazywamy prawostronnie niezmienniczą wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(\forall u, v \in T^*)\ (uRv \Rightarrow (\forall z \in T^*)\ uzRvz)$$

Przykładem relacji prawostronnie niezmienniczej jest relacja $R_L$ indukowana przez język $L$

Relacja indukowana przez język

Relacją indukowaną przez język $L \subseteq T^*$ nazywamy relację $R_L \subseteq T^* \times T^*$ (gdzie $T$ jest skończonym alfabetem symboli) taką, że

$$(\forall u, v \in T^*)\ (uR_Lv \equiv ((\forall z \in T^*)\ uz \in L \Leftrightarrow vz \in L))$$

Uzasadnienie, że relacja $R_L$ jest relacją prawostronnie niezmienniczą sprowadza się do pokazania, że jeśli $uR_Lv$ to dla dowolnego $z \in T^*$ również $uzR_Lvz$. Z definicji relacji $R_L$ mamy, że $uzR_Lvz$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $y \in T^*$ zachodzi $(uz)y \in L \equiv (vz)y \in L$. Ponieważ złożenie łańcuchów jest operacją łączną, więc ostatnią zależność można zapisać w postaci $u(zy) \in L \equiv v(zy) \in L$. Oznaczając $zy$ przez $x$ ($x$ jako złożenie dwóch dowolnych łańcuchów z $T^*$ jest dowolnym łańcuchem należącym do $T^*$) otrzymamy $ux \in L \equiv vx \in L$, co kończy uzasadnienie prawostronnej niezmienniczości relacji $R_L$.

Relacja $R_L$ indukowana przez język $L$ jest relacją równoważności. Zwrotność i symetria relacji $R_L$ jest oczywista (czytelnik zechce sprawdzić sam). Uzasadnimy przechodniość relacji $R_L$. Dla dowolnych $u,v,w \in T^*$ oraz dla dowolnych $x,y \in T^*$ mamy:

dla $uR_Lv$ zachodzi $ux \in L \equiv vx \in L$

dla $vR_Lw$ zachodzi $vy \in L \equiv wy \in L$

Ponieważ $x$ i $y$ są dowolne, więc także dla dowolnego $z \in T^*$ jest:

$uz \in L \equiv vz \in L$ oraz $vz \in L \equiv wz \in L$ czyli z przechodniości równoważności $uz \in L \equiv wz \in L$.

Wobec tego $uR_Lw$.

Def. relacji równoważności o indeksie skończonym

Mówimy, że relacja równoważności jest relacją o indeksie skończonym, jeżeli ta relacja równoważności posiada skończoną liczbę klas abstrakcji.

Przykład [Homenda]:

Dany jest język:

$$\{a^m b^n c^k \mid m+n > 0; n+k > 0\}$$

Znaleźć liczbę klas abstrakcji relacji $R_L$.

Rozważymy następujące zbiory:

- $K_0 = \{\varepsilon\}$

- $K_1 = \{a^p \mid p \geq 1\}$
- $K_2 = \{a^p b^r \mid p \geq 0;\ r \geq 1\}$
- $K_3 = \{a^p b^q c^r \mid p+q \geq 1,\ r \geq 1\}$
- $K_4$ – pozostałe słowa nad alfabetem $T = \{a, b, c\}$

Zbiory $K_0, K_1, K_2, K_3, K_4$ stanowią podział zbioru wszystkich słów nad alfabetem $T = \{a,b,c\}$. Uzasadnimy, że każde dwa słowa z dowolnego ze zbiorów $K_0, K_1, K_2, K_3, K_4$ pozostają ze sobą w relacji $R_L$:

- $K_0$ słowo ε będzie ze sobą w relacji, gdyż relacja $R_L$ jest zwrotna,
- $K_1$ – dowolne dwa słowa $u = a^p$ i $v = a^q$, gdzie $p,q \geq 1$, uzupełnione o słowo $w$ będą należeć do języka $L$ wtedy i tylko wtedy, gdy $w = a^r b^s c^t$, gdzie $r \geq 0,\ s+t \geq 1$,
- $K_2$ – dowolne dwa słowa $u=a^k b^p$ $i$ $v=a^l b^q$, gdzie $k,l \geq 0,\ p,q \geq 1,$ uzupełnione o słowo $w$ będą należeć do języka $L$ wtedy i tylko wtedy, gdy $w=b^s c^t$, gdzie $s,t \geq 0$
- $K_3$ – dowolne dwa słowa $u=a^p b^q c^r$ i $v=a^k b^m c^n$, gdzie $p+q \geq 1,\ r \geq 1,\ k+m \geq 1,$ $n \geq 1$, uzupełnione o słowo $w$ będą należeć do języka $L$ wtedy i tylko wtedy, gdy $w=c^t$, gdzie $t \geq 0,$
- $K_4$ – żadne słowo z tego zbioru nie będzie należeć do języka po uzupełnieniu go o dowolne inne słowo.

Wynika stąd, że każdy ze zbiorów $K_0, K_1, K_2, K_3, K_4$ zawiera się w pewnej klasie abstrakcji relacji $R_L$. Aby pokazać, że zbiory $K_0, K_1, K_2, K_3, K_4$ są klasami abstrakcji należy jeszcze udowodnić, że żadne dwa słowa z różnych zbiorów nie będą ze sobą w relacji $R_L$:

- Żadne słowo z $K_0$ nie jest w relacji z żadnym słowem z $K_1$: niech $u=\varepsilon,\ v=a^p,$ $gdzie\ p \geq 1$. Jeśli $w=c$, to $uw \notin L$, natomiast $vw \in L,$
- Żadne słowo z $K_0$ nie jest w relacji z żadnym słowem z każdego ze zbiorów $K_2, K_3,$ $K_4$: niech $u=\varepsilon,\ v$ – dowolne słowo ze zbiorów $K_2, K_3, K_4$. Jeśli $w=abc$, to $uw \in L,$ natomiast $vw \notin L.$
- Żadne słowo z $K_1$ nie jest w relacji z żadnym słowem z każdego ze zbiorów $K_2, K_3,$ $K_4$: niech $u$ – dowolne słowo ze zbioru $K_1$, $v$ – dowolne słowo ze zbiorów $K_2, K_3,$ $K_4$. Jeśli $w=ab$, to $uw \in L$, natomiast $vw \notin L.$
- Żadne słowo z $K_2$ nie jest w relacji z żadnym słowem z każdego ze zbiorów $K_3, K_4$: niech $u$ – dowolne słowo ze zbioru $K_2$, $v$ – dowolne słowo ze zbiorów $K_3, K_4$. Jeśli $w=bc$, to $uw \in L$, natomiast $vw \notin L.$
- Żadne słowo z $K_3$ nie jest w relacji z żadnym słowem z $K_4$: niech $u$ – dowolne słowo ze zbioru $K_3$, $v$ – dowolne słowo ze zbioru $K_4$. Jeśli $w=c$, to $uw \in L$, natomiast $vw \notin L.$

Tak więc liczba klas abstrakcji relacji $R_L$ wynosi 5.

<u>Przykład</u>

Znaleźć liczbę klas abstrakcji relacji $R_L$ indukowanej przez język:

$$L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$$

Rozważymy jednoelementowe zbiory $K_{i,j}=\{a^i b^j\}$, gdzie $i=0,1,2,\ldots$, zaś $0 \leq j \leq i$ oraz zbiór $K_x$ zawierający wszystkie pozostałe słowa nad alfabetem $T=\{a,b\}$. Zbiory $K_{i,j}=\{a^i b^j\}$ oraz zbiór $K_x$ stanowią podział zbioru wszystkich słów nad alfabetem $T=\{a,b\}$. Elementy każdego ze zbiorów jednoelementowych $K_{i,j}$ są oczywiście w relacji z samymi sobą, ze względu na zwrotność relacji $R_L$. Element któregokolwiek ze zbiorów $K_{i,j}$ nie jest w relacji z elementem żadnego innego zbioru $K_{n,m}$. Prześledźmy to na czterech przykładach:

- Weźmy dwa różne zbiory $K_{i,j}=\{a^i b^j\}$ oraz $K_{i,m}=\{a^i b^m\}$. Niech $u=a^i b^j$ gdzie $0\le j\le i$ oraz $v=a^i b^m$ gdzie $0\le m\le i$, $j\ne m$. Niech $w=b^{i-j}$. Wtedy $uw\in L$, zaś $vw\notin L$.
- Weźmy dwa różne zbiory $K_{i,0}=\{a^i\}$ oraz $K_{n,m}=\{a^n b^m\}$. Niech $u=a^i$ oraz $v=a^n b^m$ gdzie $0\le m\le n$, przy czym $m\ne 0$ lub $i\ne n$. Niech $w=a^k b^{i+k}$. Wtedy $uw\in L$, zaś $vw\notin L$.
- Weźmy dwa różne zbiory $K_{i,j}=\{a^i b^j\}$ oraz $K_{n,m}=\{a^n b^m\}$. Niech $u=a^i b^j$ gdzie $0\le j\le i$ oraz $v=a^n b^m$ gdzie $0\le m\le n$, przy czym $j\ne m$ lub $i\ne n$. Niech $w=b^{i-j}$. Wtedy $uw\in L$, zaś $vw\notin L$.
- Weźmy dwa różne zbiory $K_{0,0}=\{\varepsilon\}$ oraz $K_{n,m}=\{a^n b^m\}$. Niech $u=\varepsilon$ oraz $v=a^n b^m$ gdzie $0\le m\le n$, przy czym $n\ne 0$. Niech $w=a^k b^k$, gdzie $k>0$. Wtedy $uw\in L$, zaś $vw\notin L$.

Żaden element zbioru $K_x$ nie jest w relacji $R_L$ z elementem któregokolwiek ze zbiorów jednoelementowych, gdyż prawostronne uzupełnienie każdego z łańcuchów z $K_x$ o dowolny łańcuch daje słowo nie będące elementem języka $L$, zaś dla każdego ze zbiorów jednoelementowych istnieje jakiś łańcuch, po dopisaniu którego z prawej strony do elementu tego zbioru otrzymamy słowo języka. Przykładowo:

- dla zbioru $K_{0,0}$ zawierającego element $\varepsilon$ będzie to zbiór łańcuchów $\{a^j b^j \mid j>0\}$,
- dla zbioru $K_{i,0}$ zawierającego element $a^i$ będzie to zbiór łańcuchów $\{a^j b^{i+j} \mid j\ge 0\}$,
- dla zbioru $K_{i,i-k}$ zawierającego element $a^i b^{i-k}$ będzie to łańcuch $b^k$,
- dla zbioru $K_{i,i}$ zawierającego element $a^i b^i$ będzie to łańcuch $\varepsilon$.

Tak więc jednoelementowe zbiory $K_{i,j}=\{a^i b^j\}$, gdzie $i=0,1,2,\dots;\ 0\le j\le i$ oraz zbiór $K_x$ zawierający wszystkie pozostałe słowa nad alfabetem $T=\{a,b\}$ są klasami abstrakcji relacji $R_L$. Liczba klas abstrakcji relacji $R_L$ jest w tym przypadku nieskończona.

<u>Przykład</u>

Znaleźć liczbę klas abstrakcji relacji $R_L$ indukowanej przez język:

$$L = \{a^n b^n \mid n\ge 1\}$$

Rozważymy jednoelementowe zbiory $K_{i,\bullet}=\{a^i \mid i\ge 0\}$, wieloelementowe zbiory $K_{\bullet,j}=\{a^i b^k \mid i\ge 1,\ k\ge 1,\ 0\le j\le i,\ j=i-k\}$ oraz zbiór $K_x$ zawierający wszystkie pozostałe słowa nad alfabetem $\Sigma=\{a,b\}$. Zbiory jednoelementowe $K_{i,\bullet}$, wieloelementowe zbiory $K_{\bullet,j}$ oraz zbiór $K_x$ stanowią podział zbioru wszystkich słów nad alfabetem $\Sigma=\{a,b\}$. Elementy każdego ze zbiorów $K_{i,\bullet}$ oraz $K_{\bullet,j}$ są oczywiście w relacji z samymi sobą. Element któregokolwiek ze zbiorów $K_{i,\bullet}$ oraz $K_{\bullet,j}$ nie jest w relacji z elementem żadnego innego zbioru $K_{i,\bullet}$ czy $K_{\bullet,j}$. Żaden element zbioru $K_x$ nie jest w relacji $R_L$ z elementem któregokolwiek ze zbiorów $K_{i,\bullet}$ oraz $K_{\bullet,j}$, gdyż prawostronne uzupełnienie każdego z łańcuchów z $K_x$ o dowolny łańcuch daje słowo nie będące elementem języka $L$, zaś dla każdego ze zbiorów $K_{i,\bullet}$ oraz $K_{\bullet,j}$ istnieje jakiś łańcuch, po dopisaniu którego z prawej strony do elementu tego zbioru otrzymamy słowo języka. Tak więc zbiory $K_{i,\bullet}$ oraz $K_{\bullet,j}$ oraz zbiór $K_x$ zawierający wszystkie pozostałe słowa nad alfabetem $\Sigma=\{a,b\}$ są klasami abstrakcji relacji $R_L$. Liczba klas abstrakcji relacji $R_L$ jest w tym przypadku nieskończona. Wszystkie słowa badanego języka należą do $K_{\bullet,0}$.