3. Relacje – odpowiedzi

3.1.

$R^+ = \{(a,a), (a,b), (a,c), (a,d), (d,d), (d,c), (d,b), (d,a)\}$
$R^* = R^+ \cup \{(b,b), (c,c), (e,e)\}$

3.2.

$R^+ = \{ (a,b), (a,c), (a,d), (b,c), (b,d), (c,d) \}$
$R^* = R^+ \cup \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (e,e)\}$

3.3.

$R^+ = \{a, b, c, d\} \times \{a, b, c, d\}$
$R^* = R^+ \cup \{(e,e)\}$

3.4.

$R^+ = \{a, b, c, d\} \times \{a, b, c, d\}$
$R^* = R^+ \cup \{(e,e)\}$

3.5.

$R^+ = \{a,b,c,d\} \times \{a,b,c,d\}$
$R^* = R^+ \cup \{ (e,e) \}$

3.6.

$R^+ = \{ (a,a), (a,d), (b,a), (b,b), (b,c), (b,d), (c,a), (c,b), (c,c), (c,d), (d,a), (d,d) \}$
$R^* = R^+ \cup \{ (e,e) \}$

3.7.

$R^+ = \{(a,b), (a,c), (a,d), (a,e), (b,c), (b,d), (b,e), (c,d), (c,e), (d,e)\}$
$R^* = R^+ \cup \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (e,e)\}$

3.8.

Szkic algorytmu:
(1) $R_e := R$;
(2) $R_e := R_e \cup \{ (a,a) \mid a \in A \}$; /* dla uzyskania zwrotności */
(3) $R_e := R_e \cup \{ (a,b) \mid (b,a) \in R_e \}$; /* dla uzyskania symetrii */
(4) $R_e := R_e \cup \{ (a,c) \mid ((a,b) \in R_e) \wedge ((b,c) \in R_e) \}$; /* dla uzyskania przechodniości */
Dla $R = \{ (a,b), (a,c), (d,e) \}$ przy alfabecie $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ otrzymamy (wypisujemy tylko nowopowstałe pary w każdym kroku):
(1) $R_e := \{ (a,b), (a,c), (d,e) \}$;
(2) $R_e := R_e \cup \{ (a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (e,e), (f,f) \} = \{ (a,b), (a,c), (d,e), (a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (e,e), (f,f) \}$
(3) $R_e := R_e \cup \{ (b,a), (c,a), (e,d) \} = \{ (a,b), (a,c), (d,e), (a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (e,e), (f,f), (b,a), (c,a), (e,d) \}$
(4) $R_e := R_e \cup \{ (b,c), (c,b) \} = \{ (a,b), (a,c), (d,e), (a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (e,e), (f,f), (b,a), (c,a), (e,d), (b,c), (c,b) \}$
Mamy więc trzy klasy abstrakcji relacji R_e:
$[a] = [b] = [c] = \{a, b, c\}$
$[d] = [e] = \{d, e\}$
$[f] = \{f\}$

3.9.

$FIRST^1 = \{ (S,S), (S,A), (A,C), (B,e), (C,A), (C,e) \}$
$FIRST^2 = \{ (S,S), (S,A), (S,C), (A,A), (A,e), (C,C) \}$
$FIRST^3 = \{ (S,S), (S,A), (S,C), (S,e), (A,C), (C,A), (C,e) \}$
$FIRST^4 = \{ (S,S), (S,A), (S,C), (S,e), (A,A), (A,e), (C,C) \}$
$FIRST^5 = \{ (S,S), (S,A), (S,C), (S,e), (A,C), (C,A), (C,e) \} = FIRST^3$
$FIRST^+ = \{ (S,S), (S,A), (S,C), (S,e), (A,A), (A,C), (A,e), (B,e), (C,A), (C,C), (C,e) \}$
$FIRST^* = FIRST^+ \cup \{ (B,B), (e,e), (f,f), (g,g) \}$

$LAST^1 = \{ (S,A), (S,g), (A,B), (A,e), (B,e), (C,A), (C,g) \}$
$LAST^2 = \{ (S,B), (S,e), (A,e), (C,B), (C,e) \}$
$LAST^3 = \{ (S,e), (C,e) \}$
$LAST^4 = \varnothing$
$LAST^+ = \{ (S,A), (S,B), (S,e), (S,g), (A,B), (A,e), (B,e), (C,A), (C,B), (C,e), (C,g) \}$
$LAST^* = LAST^+ \cup \{ (S,S), (A,A), (B,B), (C,C), (e,e), (f,f), (g,g) \}$

$head(S) = \{ S, A, C, e \}$
$head(A) = \{ A, C, e \}$
$head(B) = \{ B, e \}$
$head(C) = \{ A, C, e \}$

$tail(S) = \{ S, A, B, e, g \}$
$tail(A) = \{ A, B, e \}$
$tail(B) = \{ B, e \}$
$tail(C) = \{ A, B, C, e, g \}$

3.10.

$FIRST^1 = \{ (E,E); (E,T); (T,T); (T,F); (F,(); (F,a) \}$
$FIRST^2 = \{ (E,E); (E,T); (E,F); (T,T); (T,F); (T,(); (T,a) \}$
$FIRST^3 = \{ (E,E); (E,T); (E,F); (E,(); (E,a); (T,T); (T,F); (T,(); (T,a) \}$
$FIRST^4 = \{ (E,E); (E,T); (E,F); (E,(); (E,a); (T,T); (T,F); (T,(); (T,a) \} = FIRST^3$
$FIRST^+ = \{ (E,E); (E,T); (E,F); (E,(); (E,a); (T,T); (T,F); (T,(); (T,a), (F,(); (F,a) \}$
$FIRST^* = FIRST^+ \cup \{ (F,F); (+,+); (*,*); ((,(); (),)); (a,a) \}$

$LAST^1 = \{ (E,T); (T,F); (F,)); (F,a) \}$
$LAST^2 = \{ (E,F); (T,)); (T,a) \}$
$LAST^3 = \{ (E,)); (E,a) \}$
$LAST^4 = \varnothing$
$LAST^+ = \{ (E,T); (E,F); (E,)); (E,a); (T,F); (T,)); (T,a); (F,)); (F,a) \}$
$LAST^* = LAST^+ \cup \{ (E,E); (T,T); (F,F); (+,+); (*,*); ((,(); (),)); (a,a) \}$

$head(E) = \{ E, T, F, (, a \}$
$head(T) = \{ T, F, (, a \}$
$head(F) = \{ F, (, a \}$

$tail(E) = \{ E, T, F,), a \}$
$tail(T) = \{ T, F,), a \}$
$tail(F) = \{ F,), a \}$

3.11.

Niech R będzie relacją równoważności na A oraz niech a i b będą elementami A. Dalej, niech $[a]_R$ i $[b]_R$ będą odpowiednio klasami abstrakcji zawierającymi a i b, tzn. $[a]_R = \{ c \mid aRc \}$ i $[b]_R = \{ c \mid bRc \}$. Pokażemy, że albo $[a]_R = [b]_R$, albo też $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$. Przypuśćmy, że $[a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset$, i niech d należy do $[a]_R \cap [b]_R$. Niech teraz e będzie dowolnym elementem $[a]_R$. Wtedy aRe. Ponieważ d należy do $[a]_R \cap [b]_R$, więc mamy aRd i bRd. Na mocy symetrii R, dRa. Stosując dwukrotnie własność przechodniości R, otrzymamy bRa i bRe. Tak więc e należy do $[b]_R$, skąd $[a]_R \subseteq [b]_R$. Ponieważ w analogiczny sposób można wykazać, że $[b]_R \subseteq [a]_R$, to $[a]_R = [b]_R$. Zatem różne klasy abstrakcji są rozłączne. Aby wykazać, że klasy te tworzą podział A, wystarczy zauważyć, że wobec zwrotności R każde a należy do klasy abstrakcji $[a]_R$, czyli sumą klas abstrakcji jest A.

3.12.

Niech $A = \{a, b, c, d\}$ i $R \subseteq A \times A$. Wtedy np. $R = \{ (a,b), (b,a), (a,a), (b,b) \}$

3.13.

(g) $K_0 = \{ 0^n \mid n \geq 0 \}$
$K_1 = \{ 0^n 2 \mid n \geq 0 \}$
$K_2 = \{ 0^n 201^m \mid n \geq 0, m \geq 0 \}$
$K_3 = \{ 0^n 210^m \mid n \geq 0, m \geq 0 \}$
$K_4 = \{ 0^n 201^m 0 \mid n \geq 0, m \geq 0 \} \cup \{ 0^n 210^m 1 \mid n \geq 0, m \geq 0 \}$
$K_5 = \{0, 1, 2\}^* - (K_0 \cup K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4)$

(h) $K_0 = \{ \varepsilon \}$
Klasy jednoelementowe $K_{ai} = \{a^i \mid 100 \geq i \geq 1 \}$
Klasy wieloelementowe $K_{bi} = \{a^m b^n \mid 100 \geq m \geq n \geq 1,\ 99 \geq m\text{-}n \geq 0$ dla $i = m\text{-}n \}$
$K_x = \{a, b\}^* - (K_0 \cup \bigcup_i K_{ai} \cup \bigcup_i K_{bi})$
Liczba klas abstrakcji: 1+100+100+1=202
Liczba słów języka: 1+2+3+…+100 = 5050

(i) Klasy jednoelementowe $K_{bi} = \{b^i \mid 16 \geq i \geq 0 \}$
Klasy pięcioelementowe $K_{aj} = \{b^i a^j \mid 1024 \geq j \geq 1,\ i = 2^m,\ 4 \geq m \geq 0 \}$
$K_x = \{a, b\}^* - (\bigcup_{i=0}^{16} K_{bi} \cup \bigcup_{j=1}^{1024} K_{aj})$
Liczba klas abstrakcji: 1+17+1024=1042
Liczba słów języka: 5·11 = 55