11. Własności języków regularnych – odpowiedzi

11.1
Nie; przypuśćmy, że język ten jest regularny i niech k będzie stałą z lematu o rozrastaniu języków regularnych. Rozważamy słowo $w = a^m = xuz$, gdzie $m = k^2$. Słowo w ma długość równą $k^2>k$. Wówczas u może zawierać od jednej do maksymalnie k liter a. Wtedy łańcuch xu^2z zawiera co najmniej k^2+1 i co najwyżej k^2+k liter a. Ponieważ $k^2 < k^2+1 < k^2+k < k^2+2k+1=(k+1)^2$ więc liczba liter a w słowie xu^2z nie może być kwadratem żadnej liczby naturalnej większej od k. Tak więc xu^2z nie należy do naszego języka, język ten nie może być regularny.

11.2.
Nie; przypuśćmy, że język ten jest regularny i niech k będzie stałą z lematu o rozrastaniu języków regularnych. Rozważamy słowo $w = a^m = xuz$, gdzie $m = k^3$. Słowo w ma długość równą $k^3>k$. Wówczas u może zawierać od jednej do maksymalnie k liter a. Wtedy łańcuch xu^2z zawiera co najmniej k^3+1 i co najwyżej k^3+k liter a. Ponieważ $k^3 < k^3+1 < k^3+k < k^3+3k^2+3k+1=(k+1)^3$ więc liczba liter a w słowie xu^2z nie może być sześcianem żadnej liczby naturalnej większej od k. Tak więc xu^2z nie należy do naszego języka, język ten nie może być regularny.

11.3.
Nie; przypuśćmy, że język ten jest regularny i niech k będzie stałą z lematu o rozrastaniu języków regularnych. Rozważamy słowo $w = a^m = xuz$, gdzie $m = k!$. Słowo w ma długość równą $k!>k$. Wówczas u może zawierać od jednej do maksymalnie k liter a. Wtedy łańcuch xu^2z zawiera co najmniej $k!+1$ i co najwyżej $k!+k$ liter a. Ponieważ $k! < k!+1 < k!+k < k!\cdot(k+1)=(k+1)!$ (ostatnia nierówność słuszna dla $k\geq 2$) więc liczba liter a w słowie xu^2z nie może być silnią żadnej liczby naturalnej większej od k. Tak więc xu^2z nie należy do naszego języka, język ten nie może być regularny.

11.4.
Nie; przypuśćmy, że język ten jest regularny i niech k będzie stałą z lematu o rozrastaniu języków regularnych. Rozważamy słowo $w = a^m = xuz$, gdzie $m = 2^k$. Słowo w ma długość równą $2^k>k$. Wówczas u może zawierać od jednej do maksymalnie k liter a. Wtedy łańcuch xu^2z zawiera co najmniej 2^k+1 i co najwyżej 2^k+k liter a. Ponieważ $2^k < 2^k+1 < 2^k+k < 2^k+2^k=2\cdot 2^k=2^{k+1}$ więc liczba liter a w słowie xu^2z nie może być naturalną potęgą dwójki dla żadnej liczby naturalnej stojącej w wykładniku większej od k. Tak więc xu^2z nie należy do naszego języka, język ten nie może być regularny.

11.5.
Tak; gdyż język ten może być opisany przy pomocy wyrażenia regularnego $\mathbf{aa(aa)^*}$, jest więc językiem regularnym.

11.6.
Tak, gdyż język ten może być opisany przy pomocy wyrażenia regularnego $\mathbf{aaa(aaa)^*}$, jest więc językiem regularnym.

11.7.
Nie; przypuśćmy, że język ten jest regularny i niech k będzie stałą z lematu o rozrastaniu języków regularnych. Rozważamy słowo $w = a^kb^kc^{2k} = xuz$. Słowo w ma długość równą $4k>k$. Wówczas u może zawierać od jednej do maksymalnie k liter a (przypadek (1)) lub

u może zawierać od jednej do maksymalnie k liter b (przypadek (2)) lub u może zawierać od jednej do maksymalnie k liter c (przypadek (3)). Wybranie u w inny sposób spowoduje, że przy rozrastaniu u^i pojawią się "przeplatanki" symboli, np. *abab*... lub *bcbc*... Rozważymy łańcuch xu^2z. W przypadku (1) zawiera on co najmniej $k+1$ i co najwyżej $2k$ liter a. Wówczas xu^2z nie należy do języka, gdyż liczba liter b pozostaje bez zmiany, zaś liter c jest zbyt mało. Analogicznie rozpatrujemy przypadek (2). W przypadku (3) łańcuch xu^2z zawiera co najmniej $2k+1$ i co najwyżej $3k$ liter c, zaś liczba liter a oraz b pozostaje bez zmiany, jest więc za dużo liter c i słowo xu^2z także nie należy do języka. Tak więc xu^2z w żadnym możliwym przypadku nie należy do naszego języka, język ten nie może być regularny.

11.8.

Tak, gdyż język ten może być opisany przy pomocy wyrażenia regularnego $\mathbf{aa^*bb^*cc^*}$, jest więc językiem regularnym.

Tw. Jeśli L jest językiem regularnym to $(\exists\ k)\ ((w \in L \wedge |w| \geq k) \Rightarrow (w = xuz\ \wedge\ 0 < |u| \leq k \wedge (\forall i \geq 0)\ (xu^iz \in L)))$