3. Relacje – zadania

Niech $A = \{a, b, c, d, e\}$ i $R \subseteq A \times A$. Znaleźć R^* i R^+, gdy:

3.1.

$R = \{ (a,b), (a,c), (a,d), (d,c), (d,b), (d,a) \}$

3.2.

$R = \{ (a,b), (a,c), (a,d), (b,c), (b,d), (c,d) \}$

3.3.

$R = \{ (a,b), (a,c), (a,d), (b,a), (c,a), (d,a) \}$

3.4.

$R = \{ (a,b), (b,c), (c,d), (d,a) \}$

3.5.

$R = \{ (a,b), (b,a), (c,d), (d,c), (a,d), (d,a) \}$

3.6.

$R = \{ (a,d), (b,c), (c,b), (d,a), (c,a), (b,d) \}$

3.7.

$R = \{ (a,b), (b,c), (c,d), (d,e) \}$

3.8.

Niech R będzie relacją nad alfabetem A ($R \subseteq A \times A$). Uzasadnić, że istnieje dokładnie jedna relacja R_e, taka że:

(1) $R \subseteq R_e$

(2) R_e jest relacją równoważności w zbiorze A

(3) jeśli R' jest pewną relacją równoważności nad alfabetem A oraz $R \subseteq R'$ to $R_e \subseteq R'$

(R_e nazywa się najmniejszą relacją równoważności zawierającą R). Podać algorytm tworzenia R_e na podstawie danej relacji R. Zbudować relację R_e dla:

$R = \{ (a,b), (a,c), (d,e) \}$ przy czym $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ i $R \subseteq A \times A$

Podać klasy równoważności relacji R_e.

Dana jest gramatyka $G = < N, T, P, Z >$ oraz relacje *FIRST* i *LAST* określone na zbiorze $N \cup T$ zgodnie z poniższymi definicjami:

$X \; FIRST \; Y \Leftrightarrow (\exists (X \rightarrow Y\alpha) \in P) \; (X \in N, \; Y \in N \cup T, \; \alpha \in (N \cup T)^*)$

$X \; LAST \; Y \Leftrightarrow (\exists (X \rightarrow \alpha Y) \in P) \; (X \in N, \; Y \in N \cup T, \; \alpha \in (N \cup T)^*)$

Dla poniższych gramatyk wyznaczyć zbiory *head(X)* i *tail(X)* dla wszystkich $X \in N$, przy czym zbiory te są zdefiniowane jak poniżej:

$head(X) = \{ Y \mid (X,Y) \in FIRST^*, X \in N, \; Y \in N \cup T \}$

$tail(X) = \{ Y \mid (X,Y) \in LAST^*, X \in N, \; Y \in N \cup T \}$

3.9.

$S \rightarrow Sg \mid A$
$A \rightarrow CfB \mid Ce$
$B \rightarrow e$
$C \rightarrow A \mid eg$

3.10.

$E \rightarrow T \mid E{+}T$
$T \rightarrow F \mid T{*}F$
$F \rightarrow a \mid (E)$

3.11.
Dowieść, że dowolna relacja równoważności R na zbiorze A dzieli A na rozłączne klasy abstrakcji.

3.12.
Podać przykład relacji, która jest symetryczna i przechodnia, ale nie jest zwrotna.

3.13.
Relacją indukowaną przez język $L \subseteq \Sigma^*$ nazywamy relację $R_L \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ (gdzie Σ jest skończonym niepustym alfabetem symboli) taką, że

$$(\forall u,v \in \Sigma^*)\ (uR_Lv \Leftrightarrow ((\forall z \in \Sigma^*)\ (uz \in L \Leftrightarrow vz \in L)))$$

Relacja R_L jest relacją równoważności. Podać klasy abstrakcji relacji R_L indukowanej przez język L i wyznaczyć indeks (liczbę klas abstrakcji) relacji R_L.

(a) $L = \{ 0^m10^k \mid k \geq 1, m \geq 1\}$
(b) $L = \{ 01^k0^m \mid k \geq 1, m \geq 1 \}$
(c) $L = \{ 0^k1^m0 \mid k \geq 1, m \geq 1 \}$
(d) $L = \{ 0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, ... \}$ (L jest zbiorem liczb binarnych bez nieznaczących zer)
(e) $L = \{ w \in \{0,1\}^*$ | liczba symboli 1 w słowie w jest parzysta i liczba symboli 0 w słowie w jest parzysta $\}$
(f) $L = \{ 0, 1, 01, 10 , 010, 101, 0101,1010, 01010, 10101, ... \}$
(g) $L = \{ 0^n201^m0 \mid n \geq 0, m \geq 0 \} \cup \{ 0^n210^m1 \mid n \geq 0, m \geq 0 \}$
(h) $L = \{a^mb^n \mid 100 \geq m \geq n \geq 1 \}$
(i) $L = \{ b^ia^j \mid i = 2^m, j = 2^n, 4 \geq m \geq 0, 10 \geq n \geq 0 \}$
(j) $L = \{ a^nb^m \mid n,m \geq 0, n+m=8 \}$

3.14.
Niech $N = \{0, 1, 2, ...\}$ i $R \subseteq N \times N$. Znaleźć R^0, R^1, R^2, R^3, R^k, R^+ i R^*, gdy:

(a) $R = \{ (a,b) \mid a \in N,\ b \in N,\ a + b = 9 \}$
(b) $R = \{ (a,b) \mid a \in N,\ b \in N,\ |b - a| = 9 \}$
(c) $R = \{ (a,b) \mid a \in N,\ b \in N,\ b - a = 9 \}$
(d) $R = \{ (a,b) \mid a \in N,\ b \in N,\ b = 9a \}$
(e) $R = \{ (a,b) \mid a \in N,\ b \in N,\ |a - b| \bmod 9 = 0\}$

(f) $R = \{ (a,b) \mid a \in N,\ b \in N,\ (b \cdot a) \bmod 3 = 0 \}$