

## 7. Własności języków bezkontekstowych – zadania

### 7.1.

(a) Jaka jest postać słów języka generowanego przez poniższą gramatykę?

$$G = \langle N = \{ S, A, B, C, D \}; T = \{ 0, 1, 2 \}; P; Z = S \rangle$$

gdzie:  $P = \{ S \rightarrow AB \mid C$

$$A \rightarrow 0A \mid 0$$

$$B \rightarrow 1B2 \mid B2 \mid 12$$

$$C \rightarrow 0C2 \mid C2 \mid 0D2$$

$$D \rightarrow 1D \mid 1$$

$\}$

(b) Niech  $L$  będzie językiem. Definiuje się operację  $MIN$  w następujący sposób:

$$MIN(L) = \{ x \in L \mid \text{żadne } w \text{ należące do } L \text{ nie jest właściwym przedrostkiem } x \}$$

Pokazać, że klasa języków bezkontekstowych nie jest zamknięta ze względu na operację  $MIN$  (tzn. nieprawdą jest, że jeżeli język  $L$  jest bezkontekstowy, to zawsze  $MIN(L)$  jest bezkontekstowy).

Wskazówka: rozważyć język z punktu (a).

### 7.2.

(a) Jaka jest postać słów języka generowanego przez poniższą gramatykę?

$$G = \langle N = \{ S, A, B, C, D \}; T = \{ 0, 1, 2 \}; P; Z = S \rangle$$

gdzie:  $P = \{ S \rightarrow AB \mid C$

$$A \rightarrow 0A \mid 0$$

$$B \rightarrow 1B2 \mid 1B \mid 12$$

$$C \rightarrow 0C2 \mid 0C \mid 0D2$$

$$D \rightarrow 1D \mid 1$$

$\}$

(b) Niech  $L$  będzie językiem. Definiuje się operację  $MAX$  w następujący sposób:

$$MAX(L) = \{ x \in L \mid x \text{ nie jest właściwym przedrostkiem żadnego słowa z } L \}$$

Pokazać, że klasa języków bezkontekstowych nie jest zamknięta ze względu na operację  $MAX$  (tzn. nieprawdą jest, że jeżeli język  $L$  jest bezkontekstowy, to zawsze  $MAX(L)$  jest bezkontekstowy).

Wskazówka: rozważyć język z punktu (a).

### 7.3.

Odpowiedz i uzasadnij szczegółowo: czy poniższe języki są językami bezkontekstowymi?

(a)  $L_1 = \{ a^i b^j c^k \mid i \geq 1, j \geq 1, k \geq 1, k = \max(i, j) \}$

(b)  $L_2 = \{ a^i b^j c^k \mid i \geq 1, j \geq 1, k \geq 1, (k \leq i \text{ lub } k \leq j) \}$

### 7.4.

Odpowiedz i uzasadnij szczegółowo: czy poniższe języki są językami bezkontekstowymi?

(a)  $L_1 = \{ a^i b^j c^k \mid i \geq 1, j \geq 1, k \geq 1, k = \min(i, j) \}$

(b)  $L_2 = \{ a^i b^j c^k \mid i \geq 1, j \geq 1, k \geq 1, (k \geq i \text{ lub } k \geq j) \}$

### 7.5.

Odpowiedz i uzasadnij szczegółowo: czy poniższe języki są językami bezkontekstowymi?

(a)  $\{ a^m \mid m = 2^n, n \geq 0 \}$

(b)  $\{ a^m \mid m = 2n, n \geq 1 \}$

**7.6.**

Odpowiedz i uzasadnij szczegółowo: czy poniższe języki są językami bezkontekstowymi?

- (a)  $\{ a^m \mid m = n^2, n \geq 0 \}$   
 (b)  $\{ a^m \mid m = 3n, n \geq 1 \}$

**7.7.**

Które z następujących języków są językami bezkontekstowymi? Odpowiedzi dokładnie uzasadnić.

- (a)  $L_1 = \{ ww^R \mid w \in \{ a, b \}^* \}$   
 (b)  $L_2 = \{ ww \mid w \in \{ a, b \}^* \}$   
 (c)  $L_3 = \{ ww^Rw \mid w \in \{ a, b \}^* \}$   
 (d)  $L_4 = \{ www \mid w \in \{ a, b \}^* \}$

**7.8.**

(a) Które z następujących języków są językami bezkontekstowymi? Odpowiedzi dokładnie uzasadnić.

$$L_1 = \{ a^i b^i c^i \mid i \geq 1 \}$$

$$L_2 = \{ a^i b^i c^j \mid i \geq 1 \text{ oraz } j \geq 1 \}$$

$$L_3 = \{ a^i b^j c^i \mid i \geq 1 \text{ oraz } j \geq 1 \}$$

(b) Pokazać, że klasa języków bezkontekstowych nie jest zamknięta ze względu na iloczyn teoriomnościowy (tzn. nieprawdą jest, że jeżeli języki  $L_a$  i  $L_b$  są bezkontekstowe, to zawsze  $L_a \cap L_b$  jest bezkontekstowy).

**7.9.**

(a) Które z następujących języków są językami bezkontekstowymi? Które są językami regularnymi? Odpowiedzi dokładnie uzasadnić.

$$L_1 = \{ a^i b^j a^i b^j \mid i \geq 1 \text{ oraz } j \geq 1 \}$$

$$L_2 = \{ a^i b^j a^k b^n \mid i \geq 1, j \geq 1, k \geq 1 \text{ oraz } n \geq 1 \}$$

(b) Dowiedzono, że klasa języków bezkontekstowych jest zamknięta ze względu na iloczyn teoriomnościowy ze zbiorem regularnym (tzn. wykazano, że jeżeli język  $L$  jest językiem bezkontekstowym oraz język  $R$  jest zbiorem regularnym, to zawsze  $L \cap R$  jest językiem bezkontekstowym). Co można powiedzieć o bezkontekstowości języka

$$L_3 = \{ ww \mid w \in \{ a, b \}^* \}$$

korzystając wyłącznie z wyników punktu (a) oraz powyższego twierdzenia.

**7.10.**

Które z następujących języków są językami bezkontekstowymi? Które są językami regularnymi? Odpowiedzi dokładnie uzasadnić.

- (a)  $L_1 = \{ a^i b^j c^k \mid i \geq 1, j \geq 1, k \geq 1, j = \max(i, k) \}$   
 (b)  $L_2 = \{ a^i b^j c^k \mid i \geq 1, j \geq 1, k \geq 1 \}$   
 (c)  $L_3 = \{ a^i b^j c^k \mid i \geq 1, j \geq 1, k \geq 1, i = k \}$

**7.11.**

Które z następujących języków są językami bezkontekstowymi? Które są językami regularnymi? Odpowiedzi dokładnie uzasadnić.

- (a)  $L_1 = \{ a^i b^j c^k d^m \mid i \geq 1, j \geq 1, k \geq 1, m \geq 1, i = k, j = m \}$   
 (b)  $L_2 = \{ a^i b^j c^k d^m \mid i \geq 1, j \geq 1, k \geq 1, m \geq 1 \}$   
 (c)  $L_3 = \{ a^i b^j c^k d^m \mid i \geq 1, j \geq 1, k \geq 1, m \geq 1, i = m, j = k \}$

**7.12.**

Odpowiedz i uzasadnij szczegółowo: czy poniższe języki są językami bezkontekstowymi?

- (a)  $\{ a^i b^j \mid i \geq 1, j = n^2, n \geq 1 \}$   
 (b)  $\{ a^i b^j \mid i \geq 1, j = 2n, n \geq 1 \}$

**7.13.**

Odpowiedz i uzasadnij szczegółowo: czy poniższe języki są językami bezkontekstowymi?

- (a)  $\{ a^i b^j \mid i \geq 1, j = i! \}$   
 (b)  $\{ a^i b^j c^k \mid i \geq 1, j \geq 1, k \geq 1, i \neq j, j \neq k, k \neq i \}$   
 (c)  $\{ a^i b^j c^j \mid i \geq 1, j \geq 1, i \neq j \}$

**7.14.**

Pokazać, że klasa języków bezkontekstowych jest zamknięta ze względu na operacje:

- (a)  $CYKL(L) = \{ x_1 x_2 \mid x_2 x_1 \in L \}$   
 (b)  $L^R = \{ x^R \mid x \in L \}$
- 

Dana jest gramatyka bezkontekstowa:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AB \mid BC \\ A &\rightarrow BA \mid a \\ B &\rightarrow CC \mid b \\ C &\rightarrow AB \mid a \end{aligned}$$

Zastosować algorytm Cocke'a–Youngera–Kasamiego do rozstrzygnięcia, czy podane poniżej słowa należą do języka generowanego przez tę gramatykę:

**7.15.**

aaaaa

**7.16.**

aaaaaaa

**7.17.**

baaba

**7.18.**

bbbab

---

**7.19.**

Rozmiar  $|G|$  gramatyki  $G$  przyjęto obliczać według wzoru:

$$|G| = \sum_{(A \rightarrow \alpha) \in P} |A\alpha|,$$

gdzie  $|A\alpha|$  - długość łańcucha  $A\alpha$ ,  $P$  - zbiór produkcji gramatyki

- (a) Napisać gramatykę bezkontekstową o rozmiarze  $O(n)$ , która generuje wszystkie słowa nad alfabetem  $\{a\}$  o długości co najwyżej  $2^n$  i nie generuje żadnego słowa dłuższego od  $2^n$ .  
 (b) Do jakiej (najwyższej) klasy (według hierarchii Chomsky'ego) należy język generowany przez tę gramatykę (dla ustalonego  $n$ )?

**7.20.**

Czy następujące języki są językami bezkontekstowymi? Odpowiedzi dokładnie uzasadnij.

$$(a) L_1 = \{ xx^R ww^R \mid x \in \{a, b\}^+, w \in \{a, b\}^+ \}$$

$$(b) L_2 = \{ ww^R ww^R \mid w \in \{a, b\}^+ \}$$

**7.21.**

Czy następujące języki są językami bezkontekstowymi? Odpowiedzi dokładnie uzasadnij.

$$(a) L_1 = \{ a^i b^j c^k \mid i \geq 1, j \geq 1, k \geq 1, (i \neq j \wedge j \neq k \wedge k \neq i) \}$$

$$(b) L_2 = \{ a^i b^j c^k \mid i \geq 1, j \geq 1, k \geq 1, (i \neq j \vee j \neq k) \}$$

**7.22.**

Czy następujące języki są językami bezkontekstowymi? Odpowiedzi dokładnie uzasadnij.

$$(a) L_1 = \{ ww \mid w \in \{a, b\}^+ \}$$

$$(b) L_2 = \{a, b\}^* - \{ww \mid w \in \{a, b\}^+ \}$$