dr hab. inż. Waldemar Kaczmarczyk
Katedra Badań Operacyjnych
Wydział Zarządzania AGH

D-14, ul. Gramatyka 10, p. 216
e-mail: waldek@agh.edu.pl
www: home.agh.edu.pl\waldek

Metody i algorytmy podejmowania decyzji **16 maja 2018**

1 Programowanie dynamiczne

1.1 Wieloetapowe zadanie decyzyjne

- na etapie i trzeba podjąć **decyzję** x_i
- stan przed podjęciem decyzji x_i opisuje **zmienna stanu** s_{i-1}, a po podjęciu s_i,

$$s_0 \overset{x_1}{\Longrightarrow} s_1 \overset{x_2}{\Longrightarrow} s_2 \overset{x_3}{\Longrightarrow} s_3 \overset{x_4}{\Longrightarrow} s_4$$

- $s_i(s_{i-1}, x_i)$ — **funkcja przejścia** ze stanu s_{i-1} do stanu s_i po decyzji x_i,
- $c_i(s_{i-1}, x_i)$ — przyrost wartości funkcji celu,
- $F(s, x) = F(c_1(s_0, x_1), \ldots, c_n(s_{n-1}, x_n))$ — funkcja celu.

Zasada optymalności Bellmana (odpowiednik własności Markowa)

Dla danego etapu i procesu decyzyjnego $x = (x_1, \ldots, x_n)$ optymalność pozostałej części procesu $(x_i, \ldots, x_n)$ zależy wyłącznie od stanu s_{i-1}, w którym proces się znajduje, a **nie zależy od tego jak ten stan został osiągnięty**.

Wniosek: podejmując w danej sytuacji decyzję trzeba myśleć o przyszłych zyskach i przyszłych kosztach, a nie o tym co nas do tej sytuacji doprowadziło.

1.2 Równanie Bellmana i programowanie dynamiczne

Minimalizację (pełnej) funkcji celu $F(x_1, \ldots, x_n)$ można zastąpić **minimalizacją rekurencyjnej** (cząstkowej) funkcji $f_i(s_{i-1}, x_i)$:

$$f_i(s_{i-1}, x_i) = c_i(s_{i-1}, x_i) \oplus f^*_{i+1}(s_i(s_{i-1}, x_i)) \tag{1.1a}$$

$$f^*_i(s_{i-1}) = \min_{x_i} f_i(s_{i-1}, x_i) \tag{1.1b}$$

$$f^*_{n+1}(s_n) = c_{n+1} \tag{1.1c}$$

Rekurencyjne równanie (1.1) opisuje schemat obliczeń **programowania dynamicznego**:

1. **$f^*_i(s_{i-1})$ to minimalny przyrost wartości funkcji celu od stanu s_{i-1} aż do końca.**
2. najpierw z (1.1c) należy wyznaczyć $f^*_{n+1}(s_n)$, gdzie c_{n+1} jest na ogół elementem neutralnym operatora $\oplus$, t.j. 0 dla dodawania, 1 dla mnożenia,
3. następnie trzeba wyszukiwać najlepsze rozwiązania zadania (1.1b), kolejno dla dla $i = n, n-1, \ldots, 1$, posługując się (1.1a),
4. aż wyznaczona zostanie $f^*_1(s_0)$ równa optymalnej wartości funkcji celu F^*,
5. idąc z powrotem od $i = 1$ do n można wskazać rozwiązanie dające tę wartość F^*.

Kiedy można zastosować PD?

Gdy funkcja celu jest **rozkładalna monotonicznie**, t.j. da się przedstawić w następującej rekurencyjnej postaci:

- $F(s, x) = g_1(c_1, \ldots, c_n)$
- $g_n(c_n) = c_n$
- $g_i(c_i, \ldots, c_n) = c_i \oplus g_{i+1}(c_{i+1}, \ldots, c_n)$

gdzie c_i jest funkcją zmiennych s_{i-1} oraz x_i,
a $\oplus$ reprezentuje dowolne działania.

1.3 Przykład

$$\begin{array}{lll} \min & F(x) = 40(x_1 - 3)^2 & +(1 + x_2^2)(10 + 50x_3) \\ \text{p. o.} & x_1 + x_2 + x_3 & = 6 \\ & x_1, x_2, x_3, & \geqslant 0, \quad \text{całkowite} \end{array}$$

W optymalnym rozwiązaniu **zasób musi być w pełni wykorzystany**: $\sum_{i=1,\ldots,3} x_i = 6$.

Definicja zmiennych stanu i zmiennych decyzyjnych

- s_i — **zmienna stanu** podaje wielkość niewykorzystanej części zasobu czyli $s_i = 6 - \sum_{j=1,\ldots,i} x_j$, przy czym $s_0 = 6$, $s_3 = 0$,
- funkcja przejścia $s_i = s_{i-1} - x_i$,
- x_i — **zmienna decyzyjna**, $0 \leqslant x_i \leqslant s_{i-1}$.

Interpretacja równania Bellmana

$$\begin{array}{llll} c_1(s_0, x_1) & = 40(x_1 - 3)^2 & f_1(s_0, x_1) & = c_1 + f_2^* \\ c_2(s_1, x_2) & = 1 + x_2^2 & f_2(s_1, x_2) & = c_2 * f_3^* \\ c_3(s_2, x_3) & = 10 + 50x_3 & f_3(x_3) & = c_3 \end{array}$$

$$F(x) = c_1 + c_2 * c_3$$

Uwaga! Przy odwrotnej kolejności etapów wynik byłby niepoprawny: $F(x) = (c_1 + c_2) * c_3$

Rozwiązanie krok 1. (etap 3.)

- Wstawiając $s_3 = 0$ do $s_3 = s_2 - x_3$ otrzymujemy $x_3 = s_2$, tzn. decyzja na tym etapie polega na pełnym wykorzystaniu reszty zasobu.
- Podstawiając za x_3 do $f_3(s_2, x_3) = 10 + 50x_3$ otrzymujemy $f_3 = 10 + 50s_2$.

$s_2 = x_3$	0	1	2	3	4	5	6
f_3^*	10	60	110	160	210	260	310

Rozwiązanie krok 2. (etap 2.)

s_2	0	1	2	3	4	5	6
f_3^*	10	60	110	160	210	260	310

Jeżeli $f_2(s_1, x_2) = (1 + x_2^2) * f_3^*(s_2)$ oraz $s_2 = s_1 - x_2$ to $f_2 = (1 + x_2^2) * f_3^*(s_1 - x_2)$.

$f_2(s_1, x_2)$	x_2								
s_1	0	1	2	3	4	5	6	x_2^*	f_2^*
0	10	–	–	–	–	–	–	0	10
1	60	20	–	–	–	–	–	1	20
2	110	120	50	–	–	–	–	2	50
3	160	220	300	100	–	–	–	3	100
4	210	320	550	600	170	–	–	4	170
5	260	420	800	1000	1020	260	–	$0 \vee 5$	260
6	310	520	1050	1600	1870	1560	370	0	310

Rozwiązanie krok 3. (etap 1.)

s_1	0	1	2	3	4	5	6
f_2^*	10	20	50	100	170	260	310

$f_1 = 40(x_1 - 3)^2 + f_2^*(s_1)$ oraz $s_1 = s_0 - x_1 = 6 - x_1$ stąd $f_1 = 40(x_1 - 3)^2 + f_2^*(6 - x_1)$

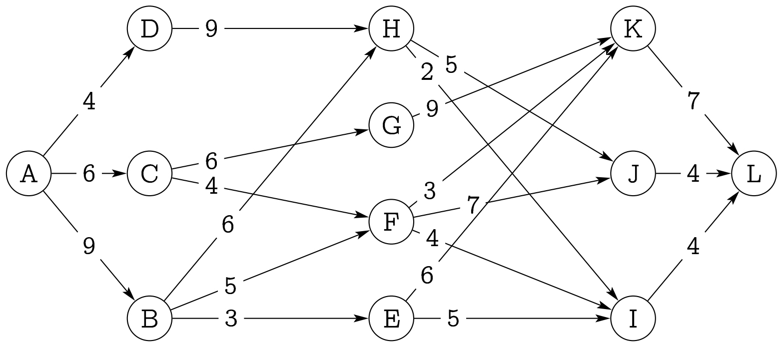
	x_1								
s_0	0	1	2	3	4	5	6	x_1^*	f_1^*
6	670	420	210	100	90	180	370	4	90

Wyznaczanie optymalnego rozwiązania x^*:

1. dla $s_0 = 6$ optymalna jest decyzja $x_1 = 4$, stąd $F^* = 90$,
2. dla $s_1 = 2$ optymalna jest decyzja $x_2 = 2$,
3. dla $s_2 = 0$ optymalna jest decyzja $x_3 = 0$, stąd $x^* = (4, 2, 0)$

2 Zadania

1. Znajdź najkrótszą drogę z miasta A do miasta L za pomocą programowania dynamicznego. Czasy przejazdu pomiędzy miastami podane są przy łukach reprezentujących drogi.



2. Pewna firma wprowadza na rynek nowy produkt. Na kampanię promocyjną może wydać 5 milionów złotych. Kampania będzie podzielona na trzy etapy. W pierwszym, dzięki zaniżonym cenom firma chce pozyskać klientów. W drugim , kampania reklamowa ma przekonać klienta, że produkt jest wart również pełnej ceny. W trzecim etapie, różne akcje mają podtrzymywać zainteresowanie klientów. Oblicz za pomocą programowania dynamicznego ile firma powinna wydać na kolejnych etapach, aby na koniec mieć jak najwięcej klientów.

Etap	Wydatek	0	1	2	3	4	5
1	Odsetek pozyskanych klientów	0	10	20	30	35	40
2	Odsetek zatrzymanych klientów	30	50	70	80	90	
3	Odsetek zatrzymanych klientów	40	50	70	80	90	

3. Rozwiąż za pomocą programowania dynamicznego następujące zadanie programowania matematycznego:

$$\begin{aligned} \max \quad (x_1/2)^4 + (2x_2+5)^3 * 3x_3^2 & \\ x_1^2 + x_2^3 + 4x_3 &\leqslant 12 \\ x_1, x_2, x_3 &\geqslant 0, \text{całkowite} \end{aligned}$$

4. Pewna firma ma wyprodukować na zamówienie jedną część, niezwykle ważną i złożoną. Jedynie co druga taka część spełnia wszystkie wymagania jakościowe. Z uwagi na czas realizacji zlecenia można wykonać trzy partie takich części, w nadziei, że choć jedna będzie dostatecznie dobra. Koszt uruchomienia partii 30 tys. zł, koszt wykonania jednej sztuki 10 tys zł. Koszty karne za niedostarczenie części wynoszą 160 tys zł. Oblicz przy pomocy programowania dynamicznego optymalne wielkości partii.