



Akademia Górniczo-Hutnicza  
im. Stanisława Staszica  
w Krakowie

---

---

Rozprawa doktorska

**Topologiczne metody dla silnie  
stabilnych i silnie niestabilnych  
rozmaitości niezmienniczych w  
układach dynamicznych**

Anna Wasieczko-Zajac

Katedra  
Równań Różniczkowych

Promotor  
dr hab. Maciej Capiński



Wydział Matematyki Stosowanej

---

---

Kraków 2017

*Składam serdeczne podziękowania mojemu promotorowi dr hab. Maciejowi Capińskiemu za poświęcony mi czas, niezwykle cenne uwagi merytoryczne, nieustanną mobilizację do pracy, zaangażowanie i wszechstronną pomoc.*

*Szczególnie dziękuję mojemu Mężowi za olbrzymie wsparcie i zrozumienie w trudnych chwilach oraz nieskończone pokłady cierpliwości.*

# Spis treści

<b>Streszczenie</b> . . . . .	4
<b>Wykaz oznaczeń</b> . . . . .	5
<b>Wstęp</b> . . . . .	7
<b>1. Preliminaria</b> . . . . .	12
1.1. Zbiory stabilne i niestabilne dla odwzorowań . . . . .	12
1.2. Zbiory stabilne i niestabilne dla równań różniczkowych . . . . .	15
1.3. Arytmetyka interwałowa . . . . .	17
1.3.1. Podstawowe pojęcia i definicje . . . . .	17
1.3.2. Interwałowa metoda Newtona . . . . .	20
1.4. Wybrane własności z teorii równań różniczkowych . . . . .	21
1.5. Pewne fakty z topologii . . . . .	21
<b>2. Warunki stożka i dyski horyzontalne</b> . . . . .	22
2.1. Warunki stożka . . . . .	22
2.2. Dyski horyzontalne . . . . .	26
2.3. Szczególne przypadki transformacji dysków horyzontalnych . . . . .	33
<b>3. Rozmaitości silnie stabilne i silnie niestabilne dla odwzorowań</b> . . . . .	37
3.1. Podstawowe definicje . . . . .	37
3.2. Twierdzenia o istnieniu rozmaitości silnie stabilnej i niestabilnej . . . . .	38
3.2.1. Rozmaitość silnie niestabilna . . . . .	39
3.2.2. Rozmaitość silnie stabilna . . . . .	47
3.3. Zależność rozmaitości od parametru odwzorowania . . . . .	52
3.4. Weryfikacja istnienia rozmaitości silnie stabilnych i niestabilnych w praktyce . . . . .	54
<b>4. Rozmaitości silnie stabilne i silnie niestabilne dla równań różniczkowych</b> . . . . .	59
4.1. Podstawowe definicje . . . . .	59
4.2. Twierdzenia o istnieniu rozmaitości silnie niestabilnej . . . . .	60
4.3. Zależność rozmaitości od parametru równania różniczkowego . . . . .	64
<b>5. Komputerowa weryfikacja warunków stożka</b> . . . . .	67
<b>6. Ograniczony Kołowy Problem Trzech Ciał</b> . . . . .	72
6.1. Opis problemu . . . . .	72
6.2. Odpowiednia zamiana współrzędnych . . . . .	75

---

6.3. Domknięcie interwałowe zbioru niestabilnego dla całego przedziału parametrów . . . . .	77
6.4. Domknięcie interwałowe zbioru niestabilnego na krańcach przedziału parametrów . . . . .	80
6.5. Dowód istnienia orbity homoklinicznej . . . . .	81
6.6. Wyniki ścisłych obliczeń numerycznych . . . . .	83
<b>Podsumowanie</b> . . . . .	88
<b>A. Dowody lematów pomocniczych</b> . . . . .	89
<b>Bibliografia</b> . . . . .	97

# Streszczenie

Prezentujemy metodę weryfikacji istnienia rozmaitości silnie stabilnych i silnie niestabilnych punktów stałych układów dynamicznych generowanych przez odwzorowania oraz przez równania różniczkowe zwyczajne. Metoda ta oparta jest o warunki stożka, sformułowane w sposób pozwalający na wykorzystanie jej w dowodach wspomaganych komputerowo. W przypadku równań różniczkowych spełnienie wymaganych założeń będzie wynikać z oszacowań nałożonych na pole wektorowe, w związku z czym nie znajdzie konieczność całkowania układu. Opracowaną przez nas metodę zastosujemy do Ograniczonego Kołowego Problemu Trzech Ciał i pokażemy, że dla pewnej określonej wartości parametru masy istnieje orbita homokliniczna leżąca w przecięciu wyznaczonych przez nas rozmaitości silnie stabilnej i silnie niestabilnej jednego z punktów libracji.

## Wykaz oznaczeń

$\mathbb{N}$	zbiór liczb naturalnych $\{0, 1, 2, \dots\}$
$\mathbb{Z}$	zbiór liczb całkowitych
$\mathbb{C}$	zbiór liczb zespolonych
$\mathbb{R}$	zbiór liczb rzeczywistych
$\mathbb{R}_+$	zbiór liczb rzeczywistych nieujemnych
$B_k(p, r)$	kula w $\mathbb{R}^k$ o środku w $p$ i promieniu $r$
$B_k(r)$	kula w $\mathbb{R}^k$ o środku w $0$ i promieniu $r$
$B_k$	kula w $\mathbb{R}^k$ o środku w $0$ i promieniu $1$
$\overline{A}$	domknięcie zbioru $A$
$\partial A$	brzeg zbioru $A$
$\text{Int}(A)$	wnętrze zbioru $A$
$\text{Id}_n$	macierz identycznościowa wymiaru $n$
$\text{Dom}(f)$	dziedzina odwzorowania $f$
$Df$	macierz Jacobiego odwzorowania $f$
$f _X$	obcięcie odwzorowania $f$ do zbioru $X$
$\text{Spect}(A)$	spektrum macierzy $A$
$p^*$	punkt stały odwzorowania
$\Gamma_U^+(p)$	zbiór zawierający wszystkie trajektorie w przód punktu $p$ w $U$
$\Gamma_U^{+,k}(p)$	zbiór zawierający wszystkie trajektorie w przód długości $k$ punktu $p$ w $U$
$\Gamma_U^-(p)$	zbiór zawierający wszystkie trajektorie w tył punktu $p$ w $U$
$\Gamma_U^{-,k}(p)$	zbiór zawierający wszystkie trajektorie w tył długości $k$ punktu $p$ w $U$
$\Gamma_U(p)$	zbiór zawierający wszystkie trajektorie punktu $p$ w $U$
$W_U^s(p^*)$	zbiór stabilny punktu $p^*$ w otoczeniu $U$
$W_U^u(p^*)$	zbiór niestabilny punktu $p^*$ w otoczeniu $U$
$W_{\mu,U}^s(p^*)$	zbiór silnie stabilny punktu $p^*$ ze współczynnikiem kontraktacji $\mu$ w otoczeniu $U$

$W_{\mu,U}^u(p^*)$	zbiór silnie niestabilny punktu $p^*$ ze współczynnikiem ekspansji $\mu$ w otoczeniu $U$
$Q_\alpha$	forma kwadratowa zdefiniowana na $\mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^s$ jako $Q(x,y) = \alpha^2 \ x\ ^2 - \ y\ ^2$
$Q$	$Q_1$
$Q_\alpha^+(p_0)$	stożek dodatni o wierzchołku w $p_0$ , indukowany przez $Q_\alpha$
$Q^+(p_0)$	$Q_1^+(p_0)$
$Q_\alpha^-(p_0)$	stożek ujemny o wierzchołku w $p_0$ , indukowany przez $Q_\alpha$
$Q^-(p_0)$	$Q_1^-(p_0)$
$Q_\alpha$	macierz formy kwadratowej $Q_\alpha$
$\pi_x$	projekcja na współrzędną $x$ , tj. $\pi_x(x,y) = x$
$\pi_y$	projekcja na współrzędną $y$ , tj. $\pi_y(x,y) = y$
$N$	iloczyn kartezjański dwóch kul domkniętych, tj. $N = \overline{B}_u \times \overline{B}_s$
$N(p, r_u, r_s)$	$\overline{B}_u(\pi_x p, r_u) \times \overline{B}_s(\pi_y p, r_s)$
$\hat{h}$	dysk horyzontalny otrzymany z dysku $h$ przez przekształcenie $f$ , zob. Lemat 2.15

# Wstęp

Zbiorem stabilnym (odpowiednio niestabilnym) punktu stałego układu dynamicznego nazywamy zbiór wszystkich tych punktów z przestrzeni stanów, których trajektorie w przód (odpowiednio w tył) zbiegają do tego punktu stałego. Dodatkowo możemy rozważać pojęcie zbiorów *silnie* stabilnych/niestabilnych. Ich elementami są te punkty, których tempo zbieżności trajektorii do punktu stałego jest odpowiednio duże (a dokładniej wykładnicze z dostatecznie dużym współczynnikiem zbieżności). Zbiory te są jednymi z przykładów zbiorów niezmienniczych w układach dynamicznych. Zbiory stabilne i niestabilne punktu stałego rozpatrujemy najczęściej wyłącznie w pewnym otoczeniu danego punktu. Od punktów z takich zbiorów, wymagamy aby ich odpowiednie trajektorie (poza naturalnym warunkiem zbieżności do punktu stałego) nigdy nie opuszczały rozważanego otoczenia. Mówimy wówczas o lokalnym zbiorze stabilnym/niestabilnym. W sytuacji gdy zbiór taki okaże się być rozmaitością, nazywamy go rozmaitością stabilną (odpowiednio niestabilną). Celem tej rozprawy jest opracowanie metody pozwalającej weryfikować istnienie rozmaitości silnie stabilnych i silnie niestabilnych w otoczeniu danego punktu stałego. Metoda, którą tutaj zaprezentujemy oparta jest na pracy [15]. W rozprawie w pewnym stopniu modyfikujemy i uogólniamy główne wyniki z [15] oraz przedstawiamy pełne wersje dowodów wszystkich twierdzeń i lematów pomocniczych.

Znalezienie rozmaitości stabilnych i niestabilnych punktów stałych jest kluczowe do naszego zrozumienia wielu cech związanych z dynamiką danego układu (zarówno ciągłego jak i dyskretnego). Przykładowo, ich istnienie dostarcza teoretycznych podstaw pozwalających na zbadanie własności analitycznych potoku danego równania różniczkowego w otoczeniu hiperbolicznego punktu równowagi. W takiej sytuacji wystarczy zbadać jak zachowuje się linearyzacja układu - rozmaitości stabilne (niestabilne) układu niezlinearyzowanego posiadają wiele cech takich rozmaitości układu zlinearyzowanego. Dzięki temu możemy badać stabilność danego punktu równowagi i geometryczne własności trajektorii w jego otoczeniu. Tego typu podejście zostało zastosowane przez Hadamarda do skonstruowania rozmaitości niestabilnej dyfeomorfizmu na płaszczyźnie (zob. [4]). Ponadto rozmaitości stabilne i niestabilne rozgraniczają również inne regiony niezmiennicze w przestrzeni fazowej i organizują dynamikę układu. Przede wszystkim jednakże istnienie rozmaitości stabilnych i niestabilnych oraz sposób w jaki się przecinają, są ściśle powiązane z obecnością chaotycznej dy-



namiki występującej w wielu nieliniowych równaniach różniczkowych zwyczajnych. Fenomen ten stał się kluczowy w badaniach nad chaosem deterministycznym (zob. [40]), których początki sięgają XIX wieku.

Nasza wiedza o danym układzie dynamicznym może zostać dodatkowo wzbogacona poprzez zlokalizowanie różnorodności silnie stabilnych i silnie niestabilnych. Stanowią one podrozmaitości różnorodności odpowiednio stabilnych i niestabilnych i pozwalają wyodrębnić te kierunki w przestrzeni fazowej, wzdłuż których trajektorie układu poruszają się znacznie szybciej w porównaniu do innych kierunków stabilnych/niestabilnych. Znajduje to zastosowanie w badaniu jakościowego zachowania tzw. układów wolnych-szybkich (ang. *slow-fast systems*), tj. układów, w których dwie zmienne poruszają się na dwóch różnych skalach czasowych. Układy takie bardzo często służą do opisu zjawisk występujących w biologii, chemii i medycynie (zob. [5], Rozdział 2).

Dużo uwagi w literaturze naukowej z dziedziny układów dynamicznych zostało poświęconej tzw. orbitom homoklinicznym (tj. orbitom leżącym w przecięciu zbiorów stabilnego i niestabilnego danego punktu stałego). Pierwszym naukowcem, który zauważył znaczenie takich orbit w badaniu jakościowego zachowania układów dynamicznych był H. Poincaré. Swoje obserwacje zawarł w pracy dotyczącej problemu trzech ciał (zob. [29]). Słuszność jego spostrzeżeń została potwierdzona w 1935 roku w [6] przez G. Birkhoffa. Wykazał on, że w otoczeniu orbit homoklinicznych istnieją orbity okresowe dużego rzędu. Natomiast w 1967 r. S. Smale uogólnił wnioski Birkhoffa, formułując Twierdzenie Smale'a-Birkhoffa (mówiące, że istnienie transversalnego przecięcia homoklinicznego dyfeomorfizmu implikuje istnienie niezmienniczego zbioru Cantora, w którym zbiór orbit periodycznych jest gęsty). Od tego czasu wiele prac z układów dynamicznych koncentrowało się na dowodach istnienia orbit homoklinicznych w badanych układach. Dowody te bardzo często bazują na wyznaczeniu lokalnych różnorodności stabilnej i niestabilnej danego układu, a następnie ustaleniu warunków, których spełnienie gwarantuje przecięcie się trajektorii danych punktów z tych różnorodności.

Metody analityczne znajdowania zbiorów stabilnych i niestabilnych nie były powszechnie stosowane, ze względu na pojawiające się w takiej sytuacji problemy natury praktycznej. Jednakże ostatnie lata zaowocowały rozwojem wielu algorytmów pozwalających znaleźć różnorodności stabilne (niestabilne) przy użyciu metod numerycznych (zob. [8], [9], [10], [25]). Warto podkreślić, że najczęściej weryfikacja istnienia różnorodności stabilnej (niestabilnej) była przeprowadzana w sposób nieściśły, czego główną przyczyną było stosowanie obliczeń bazujących na zaimplementowanej w komputerach arytmetyce zmiennoprzecinkowej. Podstawowym problemem, który pojawia się podczas wykonywania obliczeń numerycznych z wykorzystaniem tego rodzaju arytmetyki jest fakt, że mimo iż większość programów daje wyniki bardzo zbliżone dokładnością do rzeczywistych, w pewnych sytuacjach może dojść do znacznego kumulowania się błędów zaokrągleń. Wówczas wartości otrzymywane w wyniku przeprowadzanych obliczeń mogą znacząco różnić się od poprawnego wyniku. Kwestii tej, niezwykle istotnej z punktu widzenia zastosowań, została poświęcona obszerna literatura (zob. np. [18], [23], [38]).

Arytmetyka interwałowa pozwoliła uporać się z powyższym problemem. Zamiast wykonywać obliczenia na zmiennoprzecinkowych przybliżeniach wartości danych liczb

rzeczywistych, można bowiem operować na przedziałach, które te liczby zawierają. Głównym założeniem takiej arytmetyki jest tzw. założenie poprawności (zob. [22]), tj. operacje na przedziałach zawsze definiuje się w taki sposób, aby otrzymany w wyniku przedział zawierał wartość właściwą dla wykonania analogicznej operacji na liczbach w tych przedziałach się znajdujących. Dzięki temu możliwe jest wykorzystanie komputera do przeprowadzenia poprawnego dowodu matematycznego.

Zastosowanie do obliczeń arytmetyki interwałowej pozwoliło na przeprowadzenie komputerowo wspieranych dowodów istnienia różnorodności stabilnych i niestabilnych w danych układach dynamicznych, wyznaczenie ich domknięć interwałowych oraz ścisłą weryfikację położenia orbit homoklinicznych (zob. np. [15], [34] [36], [37]).

Metoda znajdowania różnorodności silnie stabilnych i silnie niestabilnych, którą zaprezentujemy w naszej pracy bazuje na iteracyjnym przekształcaniu wykresu funkcji (ang. *graph transform*). Jej założenia oparte są na odpowiednio sformułowanych warunkach stożka, - czyli geometrycznych własnościach związanych ze sposobem w jaki funkcja odwzorowuje stożki. Powiemy mianowicie, że funkcja  $f : \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^s$  spełnia warunki stożka w pewnym otoczeniu punktu stałego, jeżeli dla pewnej formy kwadratowej  $Q_\alpha$  na  $\mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^s$  zdefiniowanej jako  $Q_\alpha(x, y) = \alpha^2 \|x\|^2 - \|y\|^2$  oraz pewnej stałej  $m > 0$  dowolne punkty  $p_1 \neq p_2$  z tego otoczenia spełniają warunek

$$Q_\alpha(f(p_1) - f(p_2)) > mQ_\alpha(p_1 - p_2).$$

Głównymi wynikami naszej pracy jest sformułowanie twierdzeń, które pozwalają stwierdzić, że zbiór silnie stabilny/silnie niestabilny danego odwzorowania spełniającego warunki stożka jest wykresem pewnej funkcji lipschitzowskiej (a więc różnorodnością) w pewnym (określonym) otoczeniu punktu stałego. Dokładniej rzecz ujmując, wykazemy m.in. prawdziwość następującego twierdzenia.

**Twierdzenie** *Załóżmy, że odwzorowanie ciągle  $f$  spełnia warunki stożka dla  $(Q_\alpha, m_\alpha)$  i  $(Q_1, m)$  z parametrami  $\alpha > 1$ ,  $m_\alpha > m > 0$ ,  $m_\alpha > 1$  w otoczeniu punktu stałego, będącym iloczynem kartezjańskim dwóch kul jednostkowych o wymiarach odpowiednio  $u$  i  $s$ . Wówczas istnieje funkcja, która w pasie  $\{\|x\| \leq \sqrt{1 - \alpha^{-2}}\}$  parametryzuje lokalny zbiór silnie niestabilny ze współczynnikiem kontrakcji  $\sqrt{m_\alpha}$ . Co więcej funkcja ta spełnia warunek Lipschitza ze stałą 1.*

Analogiczny rezultat udowodnimy również dla zbiorów silnie stabilnych. Pokażemy ponadto jak uogólnić powyższe wyniki na przypadek dowolnego punktu stałego i jego dowolnego otoczenia.

W dalszej kolejności zajmiemy się przypadkiem układów generowanych przez równania różniczkowe. Wykażemy, że w przypadku gdy potok równania spełnia odpowiednie warunki stożka, zbiór silnie niestabilny danego punktu równowagi może zostać sparametryzowany podobnie jak w powyższym Twierdzeniu.

Weryfikacja czy dana funkcja spełnia warunki stożka może zostać przeprowadzona na komputerze przy użyciu ścisłych obliczeń w arytmetyce interwałowej. Podobnie, wykorzystując metody komputerowe możemy sprawdzić czy warunki stożka są spełnione dla potoku danego równania różniczkowego. Zwracamy przy tym uwagę, że nie będzie to od nas wymagało całkowania równania. W naszej pracy prezentujemy przykładowe, opracowane przez nas techniki takiej weryfikacji warunków stożka.

Zastosowane przez nas do znalezienia rozmaitości stabilnych i niestabilnych podejście oparte o warunki stożka jest podobne duchem do wielu wcześniejszych rezultatów. Prace [19], [20] Gidei i Zgliczyńskiego wprowadzają pojęcie tzw. *relacji nakrywających*, stanowiących topologiczne narzędzie, które może zostać wykorzystane w komputerowo wspieranych dowodach dla dynamiki symbolicznej w układach dynamicznych. W [46] Zgliczyński rozszerza tę koncepcję poprzez dodatkowe założenie odpowiednich warunków stożka. Dołączenie takich założeń pozwala na wykazanie istnienia hiperbolicznych punktów stałych oraz ich rozmaitości stabilnych i niestabilnych. Zostało to wykorzystane przez Zgliczyńskiego, Simó i Capińskiego do dowodów normalnie hiperbolicznych rozmaitości niezmienniczych (zob. [11], [14], [16]). Powyższe metody zastosowano do wielu znanych problemów, m.in. do Ograniczonego Problemu Trzech Ciał (zob. [12], [13], [41], [42]), rotującego odwzorowania Hénona (zob. [11], [16]), wzbudzanego odwzorowania logistycznego (zob. [14]), wahadła tłumionego/wymuszonego (zob. [43]), oraz dowodów rozmaitości wolnych (zob. [21]). Wszystkie wymienione tutaj wyniki opierały się na odpowiednio sformułowanych definicjach relacji nakrywających i warunków stożka.

Wyniki zaprezentowane w naszej rozprawie dotyczą punktów stałych układów dynamicznych i są blisko związane z pracą [46]. Zasadniczą różnicę stanowi tutaj jednak fakt, że opracowana przez nas metoda może zostać wykorzystana w dowodach istnienia rozmaitości *silnie* stabilnych/ *silnie* niestabilnych, stanowiących często podrozmaitości rozmaitości stabilnych/niestabilnych. Ponadto istnieje możliwość zastosowania naszej metody do punktów stałych siodłowo-centralnych, co nie jest wykonalne korzystając z [46], gdyż techniki tam przedstawione zakładają hiperboliczność. Co więcej, nasze rezultaty nie bazują na relacjach nakrywających.

W literaturze możemy znaleźć wiele odmiennych podejść do komputerowo wspieranych dowodów dla rozmaitości niezmienniczych. Wystarczy tutaj wspomnieć np. o rozwiązywaniu odpowiedniego równania punktu stałego w ujęciu funkcjonalnym. Na szczególne podkreślenie zasługują tutaj prace [8], [9], [10] autorstwa Cabré, de la Llave i Fonticha. Nasze podejście jest zupełnie inne. Bazuje na rozważaniach natury topologicznej przeprowadzonych w przestrzeni stanów układu, w przeciwieństwie do analizowania problemu w ujęciu funkcjonalnym. Założenia naszych twierdzeń są prostsze w weryfikacji, jednak dzieje się to kosztem uzyskania nieco gorszych oszacowań na domnięcie wyznaczanej rozmaitości.

Jako przykład zastosowania naszej metody rozważymy Ograniczony Kołowy Problem Trzech Ciał. Wykorzystamy opracowaną przez nas metodę do znalezienia ścisłego oszacowania lokalnej rozmaitości niestabilnej jednego z punktów libracji. Opierając się na rozważaniach dotyczących ciągłości funkcji parametryzującej rozmaitość, wykażemy istnienie orbity homoklinicznej rozważanego punktu dla pewnej określonej wartości parametru masy. Rozpatrywany przez nas przykład pojawił się po raz pierwszy w pracy [27] autorstwa Llibre, Martinez i Simó, która zawiera wyniki numerycznych obliczeń wskazujących na istnienie takiej homokliniki. Weryfikujemy otrzymane tam wyniki przy użyciu ścisłych - opartych o arytmetykę interwałową - metod komputerowych.

Rozprawa ta zorganizowana jest w następujący sposób. Pierwszy rozdział poświęcony jest przedstawieniu pewnych podstawowych zagadnień z zakresu układów dynamicznych oraz arytmetyki interwałowej. Umieszczamy w nim również wybrane

własności z teorii równań różniczkowych oraz topologii, potrzebne w dalszej części pracy. W drugim rozdziale formułujemy pojęcia warunków stożka oraz dysków horyzontalnych - obiektów, które wykorzystamy w dowodach naszych głównych twierdzeń o istnieniu różnaitości silnie stabilnych i silnie niestabilnych punktów stałych. Koncentrujemy się przy tym na kwestii przekształcania dysków horyzontalnych przez odwzorowania spełniające warunki stożka wykazując, że obraz dysku przez takie odwzorowanie jest również dyskiem horyzontalnym. Rozdział trzeci prezentuje zagadnienia dotyczące zbiorów silnie niezmienniczych punktów stałych w układach dynamicznych generowanych przez odwzorowanie. Wprowadzamy w nim definicje takich zbiorów, a także formułujemy i dowodzimy jedne z głównych wyników naszej pracy - twierdzenia o istnieniu różnaitości silnie niestabilnej oraz silnie stabilnej, dla odwzorowań spełniających warunki stożka. Na końcu rozdziału poruszamy kwestię układów, w których występuje parametr i wykazujemy ciągłość znalezionej przez nas funkcji parametryzującej różnaitość względem tego parametru. Organizacja kolejnego (czwartego) rozdziału jest bardzo podobna do poprzedniego, natomiast zajmujemy się w nim układami ciągłymi. Prezentujemy w nim kolejny główny wynik naszej pracy - twierdzenie o istnieniu lokalnej różnaitości silnie niestabilnej punktu równowagi równania różniczkowego, którego potok spełnia odpowiednie warunki stożka. W rozdziale piątym przedstawiamy opracowane przez nas metody komputerowej weryfikacji warunków stożka dla odwzorowań oraz potoków równań różniczkowych. Ostatni rozdział zawiera przykład zastosowania naszych twierdzeń do dowodu istnienia orbity homoklinicznej w Ograniczonym Kołowym Problemie Trzech Ciał, wraz z wynikami uzyskanych przez nas obliczeń numerycznych. Opisany w nim komputerowo wspierany dowód istnienia tej orbity stanowi kolejny główny wynik naszej pracy. Na samym końcu, tj. w dodatku, umieszczamy natomiast dowody lematów pomocniczych.

## Preliminaria

Rozdział ten poświęcimy przede wszystkim wprowadzeniu pewnych podstawowych pojęć dotyczących m.in. zbiorów stabilnych i niestabilnych dla odwzorowań oraz równań różniczkowych. Przedstawimy także główne zagadnienia arytmetyki interwałowej, którą wykorzystywać będziemy w dalszej części pracy do dowodów wspomaganych komputerowo.

Wszystkie normy, które się tutaj pojawiają, są (o ile nie zostało zaznaczone inaczej) klasycznymi normami euklidesowymi.

### 1.1. Zbiory stabilne i niestabilne dla odwzorowań

W rozdziale tym rozważać będziemy odwzorowanie

$$f : D \rightarrow D,$$

zdefiniowane na pewnym podzbiore otwartym  $D$  przestrzeni  $\mathbb{R}^n$ . Dopóki nie zostanie zaznaczone inaczej, nie przyjmujemy żadnych dodatkowych założeń o odwzorowaniu  $f$  (dotyczących np. ciągłości).

Założmy, że  $f$  ma *punkt stały*  $p^* \in D$ , to znaczy spełniony jest warunek

$$f(p^*) = p^*. \tag{1.1}$$

**Definicja 1.1** Niech dany będzie punkt  $p \in D$  oraz niech zbiór  $U \subset D$  będzie pewnym jego otoczeniem. Powiemy, że ciąg  $(p_0, p_1, p_2, \dots)$  jest *trajektorią w przód punktu  $p$  w otoczeniu  $U$*  jeżeli spełnione są następujące warunki

1.  $p_0 = p$ ;
2.  $p_i \in U$  dla dowolnego  $i \in \mathbb{N}$ ;
3.  $p_{i+1} = f(p_i)$  dla dowolnego  $i \in \mathbb{N}$ .

Jeżeli  $U = D$  to ciąg  $(p_0, p_1, \dots)$  spełniający powyższe warunki będziemy nazywać po prostu *trajektorią w przód punktu  $p$* .

Dla dowolnego punktu  $p \in D$  i jego otoczenia  $U$  przez  $\Gamma_U^+(p)$  będziemy oznaczać zbiór zawierający wszystkie trajektorie w przód punktu  $p$  w  $U$ , tj.

$$\Gamma_U^+(p) = \left\{ (p_i)_{i=0}^{+\infty} : (p_0, p_1, \dots) \text{ jest trajektorią w przód punktu } p \text{ w } U \right\}.$$

Zauważmy, że z Definicji 1.1 wynika, że trajektoria w przód w otoczeniu  $U$  danego punktu (o ile istnieje) jest wyznaczona jednoznacznie. Tak więc zbiór  $\Gamma_U^+(p)$  jest co najwyżej jednoelementowy.

Podobnie zdefiniować możemy trajektorię w tył.

**Definicja 1.2** Niech dany będzie punkt  $p \in D$  oraz niech zbiór  $U \subset D$  będzie pewnym jego otoczeniem. Powiemy, że ciąg  $(\dots, p_{-2}, p_{-1}, p_0)$  jest *trajektorią w tył punktu  $p$  w otoczeniu  $U$*  jeżeli spełnione są następujące warunki

1.  $p_0 = p$ ;
2.  $p_{-i} \in U$  dla dowolnego  $i \in \mathbb{N}$ ;
3.  $p_{-i} = f(p_{-i-1})$  dla dowolnego  $i \in \mathbb{N}$ .

Jeżeli  $U = D$  to ciąg  $(\dots, p_{-1}, p_0)$  spełniający powyższe warunki będziemy nazywać po prostu *trajektorią w tył punktu  $p$* .

Dla dowolnego punktu  $p \in D$  i jego otoczenia  $U$  przez  $\Gamma_U^-(p)$  będziemy oznaczać zbiór zawierający wszystkie trajektorie w tył punktu  $p$  w  $U$ , tj.

$$\Gamma_U^-(p) = \left\{ (p_{-i})_{i=+\infty}^0 : (\dots, p_{-1}, p_0) \text{ jest trajektorią w tył punktu } p \text{ w } U \right\}.$$

Zauważmy, że w sytuacji gdy odwzorowanie  $f$  nie jest injekcją, dany punkt  $p$  może posiadać wiele trajektorii w tył. Tak więc zbiór  $\Gamma_U^+(p)$  może posiadać więcej niż jeden element.

Zbiory  $\Gamma_U^+(p)$  oraz  $\Gamma_U^-(p)$  zależą od rozważanego odwzorowania  $f$ . W przypadku, gdy będziemy chcieli podkreślić tę zależność użyjemy notacji  $\Gamma_U^+(p; f)$  oraz  $\Gamma_U^-(p; f)$ .

Przypuśćmy, że ciągi  $(\dots, p_{-2}, p_{-1}, p_0)$  i  $(p_0, p_1, p_2, \dots)$  są trajektoriami odpowiednio w tył i w przód punktu  $p$  w  $U$ . Wówczas ciąg  $(\dots, p_{-2}, p_{-1}, p_0, p_1, p_2, \dots)$  będziemy nazywać *trajektorią* (lub równoważnie *orbitą*) *punktu  $p$  w otoczeniu  $U$* . Gdy  $U = D$ , to będziemy mówić po prostu o *trajektorii punktu  $p$* . Zbiór wszystkich trajektorii punktu  $p$  w  $U$  będziemy oznaczać przez  $\Gamma_U(p)$ .

Definicje 1.1 i 1.2 wprowadzają pojęcia trajektorii *nieskończonych*. Można je jednak w naturalny sposób zmodyfikować, otrzymując definicje trajektorii o skończonej długości. Zbiór trajektorii w przód (odpowiednio w tył) długości  $k$  punktu  $p$  w  $U$  oznaczać będziemy przez  $\Gamma_U^{+,k}(p)$  (odpowiednio  $\Gamma_U^{-,k}(p)$ ). Zauważmy, że dla danego punktu  $p$  istnienie skończonych trajektorii w przód dowolnej długości w danym otoczeniu  $U$  implikuje istnienie trajektorii nieskończonej tego punktu w tym otoczeniu. W przypadku trajektorii w tył analogiczna zależność nie będzie jednak zawsze prawdziwa. W szczególności można podać przykłady funkcji nieciągłych dla których pomimo istnienia trajektorii w tył dowolnej skończonej długości, nie istnieje nieskończona trajektoria w tył.

**Lemat 1.3** *Niech  $f : D \rightarrow D$  będzie odwzorowaniem ciągłym. Niech dany będzie punkt  $p \in D$  oraz niech zbiór zwarty  $U \subset D$  będzie pewnym jego otoczeniem. Wówczas  $p$  posiada trajektorię w tył w otoczeniu  $U$ , wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego  $i \in \mathbb{N}$  istnieje trajektoria w tył długości  $i$  punktu  $p$  w  $U$ .*

*Dowód* Dowód znajduje się w Dodatku A. □

Przejdziemy teraz do wprowadzenia pojęć zbiorów stabilnych i niestabilnych punktu stałego.

**Definicja 1.4** Niech  $U \subset D$  będzie pewnym otoczeniem punktu stałego  $p^*$  odwzorowania  $f$ . *Zbiorem stabilnym punktu  $p^*$  w otoczeniu  $U$*  nazwiemy zbiór  $W_U^s(p^*)$  zawierający wszystkie punkty  $p \in U$  o następujących własnościach

1. istnieje trajektoria w przód  $(p_0, p_1, p_2, \dots)$  punktu  $p$  w otoczeniu  $U$ ;
2. dla trajektorii w przód  $(p_0, p_1, p_2, \dots)$  punktu  $p$  w otoczeniu  $U$ , zachodzi

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} p_i = p^*. \quad (1.2)$$

Zauważmy, że jeżeli  $p \in W_U^s(p^*)$  i  $(p_0, p_1, \dots)$  jest trajekcją w przód punktu  $p$ , to dla każdego  $i \in \mathbb{N}$  zachodzi  $p_i \in W_U^s(p^*)$ .

Podobnie definiujemy zbiór niestabilny punktu  $p^*$  w zadanym otoczeniu.

**Definicja 1.5** Niech  $U \subset D$  będzie pewnym otoczeniem punktu stałego  $p^*$  odwzorowania  $f$ . *Zbiorem niestabilnym punktu  $p^*$  w otoczeniu  $U$*  nazwiemy zbiór  $W_U^u(p^*)$  zawierający wszystkie punkty  $p \in U$  o następujących własnościach

1. istnieje trajektoria w tył  $(\dots, p_{-2}, p_{-1}, p_0)$  punktu  $p$  w otoczeniu  $U$ ;
2. dla dowolnej trajektorii w tył  $(\dots, p_{-2}, p_{-1}, p_0)$  punktu  $p$  w otoczeniu  $U$ , zachodzi

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} p_{-i} = p^*. \quad (1.3)$$

Zauważmy, że jeżeli  $p \in W_U^u(p^*)$  i  $(\dots, p_{-1}, p_0)$  jest trajekcją w tył punktu  $p$  w  $U$ , to dla każdego  $i \in \mathbb{N}$  zachodzi  $p_{-i} \in W_U^u(p^*)$ .

Konsekwencją Definicji 1.4 i 1.5 jest fakt, że do zbiorów stabilnego i niestabilnego należy punkt  $p^*$ . Stąd zbiory te są zawsze niepuste.

W przypadku, gdy otoczenie  $U$  punktu  $p^*$  będzie znane z kontekstu, zbiór  $W_U^s(p^*)$  (odpowiednio  $W_U^u(p^*)$ ) będziemy nazywać po prostu *lokalnym zbiorem stabilnym punktu  $p^*$*  (odpowiednio *lokalnym zbiorem niestabilnym punktu  $p^*$* ). Zbiory stabilne i niestabilne możemy jednak również definiować w ujęciu *globalnym*.

**Definicja 1.6** Niech  $p^*$  będzie punktem stałym odwzorowania  $f : D \rightarrow D$ . Zbiór  $W_D^s(p^*)$  nazwiemy *globalnym zbiorem stabilnym punktu  $p^*$*  i będziemy go oznaczać przez  $W^s(p^*)$ .

**Definicja 1.7** Niech  $p^*$  będzie punktem stałym odwzorowania  $f : D \rightarrow D$ . Zbiór  $W_D^u(p^*)$  nazwiemy *globalnym zbiorem niestabilnym punktu  $p^*$*  i będziemy go oznaczać przez  $W^u(p^*)$ .

Zbiór stabilny (odpowiednio niestabilny) - zarówno lokalny jak i globalny - zależą od zadanego odwzorowania  $f$ . W sytuacji, gdy będzie nam zależało na podkreśleniu tej zależności, będziemy stosować notację  $W_U^s(p^*; f)$ ,  $W^s(p^*; f)$  (odpowiednio  $W_U^u(p^*; f)$ ,  $W^u(p^*; f)$ ).

Jest możliwa sytuacja, w której zbiór stabilny jednego z punktów stałych przecina się ze zbiorem niestabilnym innego punktu stałego. Prowadzi to do powstania tzw. *orbity heteroklinicznej* tych dwóch punktów. Podobnie zdarza się, że część wspólna zbioru stabilnego i niestabilnego danego punktu stałego zawiera również inne punkty poza nim samym. Wówczas możemy zaobserwować istnienie tzw. *orbity homoklinicznej* tego punktu.

Poniżej wprowadzamy formalną definicję takiej orbity.

**Definicja 1.8** Niech  $p^*$  będzie punktem stałym odwzorowania  $f : D \rightarrow D$ . Wówczas dowolny punkt  $p \in (W^s(p^*) \cap W^u(p^*)) \setminus \{p^*\}$  nazwiemy *punktem homoklinicznym dla  $p^*$* .

**Definicja 1.9** Niech  $p$  będzie punktem homoklinicznym dla punktu stałego  $p^*$ . Dowolną trajektorię  $(\dots, p_{-2}, p_{-1}, p, p_1, p_2, \dots)$  punktu  $p$  będziemy nazywać *orbitą homokliniczną punktu  $p^*$* .

Rozważmy teraz przypadek, gdy  $f$  jest odwzorowaniem klasy  $C^1$  w  $D$ . Wówczas punkt stały  $p^*$  tego odwzorowania nazwiemy *hiperbolicznym*, gdy spełniony jest poniższy warunek

$$\text{Spect}(Df(p^*)) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\} = \emptyset.$$

Oznaczmy przez  $E^s(p^*)$  oraz  $E^u(p^*)$  podprzestrzenie uogólnionych wektorów własnych macierzy  $Df(p^*)$  odpowiadających tym wartościom własnym  $\lambda$ , dla których, odpowiednio,  $|\lambda| < 1$  oraz  $|\lambda| > 1$ .

Jedną z istotnych własności punktów hiperbolicznych jest fakt, że dostatecznie blisko takiego punktu lokalne zbiory stabilny i niestabilny tego punktu są rozmaitościami, a odpowiednie trajektorie punktów z tych zbiorów dążą do punktu stałego w tempie wykładniczym.

**Twierdzenie 1.10** [40] *Przypuśćmy, że  $p^*$  jest hiperbolicznym punktem stałym dyfeomorfizmu  $f : D \rightarrow D$  klasy  $C^r$ , gdzie  $D \subset \mathbb{R}^n$  oraz  $r \geq 1$ . Wówczas istnieje otoczenie  $U$  punktu  $p^*$ , dla którego spełnione są następujące warunki*

1.  $W_U^s(p^*)$  oraz  $W_U^u(p^*)$  są rozmaitościami klasy  $C^r$  stycznych w  $p^*$  do, odpowiednio,  $E^s(p^*)$  i  $E^u(p^*)$ , oraz mającymi ten sam wymiar co, odpowiednio,  $E^s(p^*)$  i  $E^u(p^*)$ ,
2. istnieją stałe  $C > 0, 0 < \mu < 1$  takie, że dla dowolnego  $p \in W_U^s(p^*)$  i ciągu  $(p_i)_{i=0}^{+\infty} \in \Gamma_U^+(p)$  zachodzi

$$\|p_i - p^*\| \leq C\mu^i \|p - p^*\|, \text{ dla każdego } i \geq 0, \quad (1.4)$$

oraz dla dowolnego  $p \in W_U^u(p^*)$  i ciągu  $(p_{-i})_{i=+\infty}^0 \in \Gamma_U^-(p)$  zachodzi

$$\|p_{-i} - p^*\| \leq C\mu^i \|p - p^*\|, \text{ dla każdego } i \geq 0. \quad (1.5)$$

## 1.2. Zbiory stabilne i niestabilne dla równań różniczkowych

Przedstawimy teraz wybrane zagadnienia dotyczące zbiorów stabilnych i niestabilnych dla równań różniczkowych. Skupimy się przy tym na autonomicznych równaniach różniczkowych.

Rozważmy więc równanie różniczkowe postaci

$$p' = F(p), \quad (1.6)$$

gdzie pole wektorowe

$$F : D \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

klasy  $C^1$  zdefiniowane jest na pewnym obszarze  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Dla dowolnego  $p_0 \in D$  przez  $I(p_0) = (I^-(p_0), I^+(p_0))$  oznaczmy dziedzinę rozwiązania maksymalnego równania



(1.6) spełniającego warunek początkowy  $p(0) = p_0$ . Przez  $\phi_t(p)$  oznaczmy potok indukowany przez równanie (1.6).

Załóżmy, że dla równania (1.6) istnieje *punkt równowagi*, to znaczy

$$\exists p^* \in D : F(p^*) = 0. \quad (1.7)$$

**Definicja 1.11** Niech  $U \subset D$  będzie pewnym otoczeniem punktu równowagi  $p^*$  równania (4.1). *Zbiorem stabilnym punktu  $p^*$  w otoczeniu  $U$*  nazwiemy zbiór  $W_U^s(p^*)$  zawierający wszystkie punkty  $p \in U$  o następujących własnościach

1.  $I^+(p) = +\infty$  oraz  $\phi_t(p) \in U$  dla dowolnego  $t \geq 0$
- 2.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(p) = p^*. \quad (1.8)$$

Podobnie definiujemy zbiór niestabilny punktu  $p^*$ .

**Definicja 1.12** Niech  $U \subset D$  będzie pewnym otoczeniem punktu równowagi  $p^*$  równania (4.1). *Zbiorem niestabilnym punktu  $p^*$  w otoczeniu  $U$*  nazwiemy zbiór  $W_U^u(p^*)$  zawierający wszystkie punkty  $p \in U$  o następujących własnościach

1.  $I^-(p) = -\infty$  oraz  $\phi_t(p) \in U$  dla dowolnego  $t \leq 0$
- 2.

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(p) = p^*. \quad (1.9)$$

Zauważmy, że z definicji do zbiorów stabilnego i niestabilnego należy punkt  $p^*$ . Stąd zbiory te są zawsze niepuste.

Definicje 1.4 i 1.5 wprowadzają pojęcia *lokalnych* zbiorów stabilnych i niestabilnych. Zbiory te możemy jednak również definiować w ujęciu globalnym.

**Definicja 1.13** Niech  $p^*$  będzie punktem równowagi równania (4.1). Zbiór  $W_D^s(p^*)$  nazwiemy *globalnym zbiorem stabilnym punktu  $p^*$*  i będziemy go oznaczać przez  $W^s(p^*)$ .

**Definicja 1.14** Niech  $p^*$  będzie punktem równowagi równania (4.1). Zbiór  $W_D^u(p^*)$  nazwiemy *globalnym zbiorem niestabilnym punktu  $p^*$*  i będziemy go oznaczać przez  $W^u(p^*)$ .

Wprowadzimy teraz definicję orbit homoklinicznych dla punktów równowagi równania różniczkowego.

**Definicja 1.15** Niech  $p^*$  będzie punktem równowagi równania (1.6). Wówczas dowolny punkt  $p \in (W^s(p^*) \cap W^u(p^*)) \setminus \{p^*\}$  nazwiemy *punktem homoklinicznym dla  $p^*$* .

**Definicja 1.16** Niech  $p$  będzie punktem homoklinicznym dla punktu równowagi  $p^*$ . Trajektorię  $(\phi_t(p))_{t \in \mathbb{R}}$  punktu  $p$  będziemy nazywać *orbitą homokliniczną punktu  $p^*$* .

Punkt równowagi  $p^*$  równania (4.1) nazwiemy *hiperbolicznym*, gdy spełniony jest poniższy warunek

$$\text{Spect}(DF(p^*)) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Re}\lambda = 0\} = \emptyset.$$

Oznaczmy przez  $E^s(p^*)$  oraz  $E^u(p^*)$  podprzestrzenie uogólnionych wektorów własnych macierzy  $DF(p^*)$  odpowiadających tym wartościom własnym  $\lambda$ , dla których, odpowiednio,  $\operatorname{Re}\lambda < 0$  oraz  $\operatorname{Re}\lambda > 0$ .

Podobnie jak w przypadku punktów hiperbolicznych dla odwzorowań, punkty hiperboliczne równań różniczkowych posiadają lokalne rozmaitości stabilne i niestabilne. Fakt ten przedstawiony jest w poniższym twierdzeniu.

**Twierdzenie 1.17** [40] *Przypuśćmy, że  $p^*$  jest hiperbolicznym punktem równowagi równania  $p' = F(p)$ , gdzie  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  jest dyfeomorfizmem klasy  $C^r$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  oraz  $r \geq 1$ . Wówczas istnieje otoczenie  $U$  punktu  $p^*$ , dla którego spełnione są następujące warunki*

1.  $W_U^s(p^*)$  oraz  $W_U^u(p^*)$  są rozmaitościami klasy  $C^r$  stycznymi w  $p^*$  do, odpowiednio,  $E^s(p^*)$  i  $E^u(p^*)$ , oraz mającymi ten sam wymiar co, odpowiednio,  $E^s(p^*)$  i  $E^u(p^*)$ ,
2. istnieją stałe  $C, \mu > 0$  takie, że dla dowolnego  $p \in W_U^s(p^*)$  zachodzi

$$\|\phi_t(p) - p^*\| \leq Ce^{-\mu t} \|p - p^*\|, \text{ dla każdego } t \geq 0, \quad (1.10)$$

oraz dla dowolnego  $p \in W_U^u(p^*)$  zachodzi

$$\|\phi_{-t}(p) - p^*\| \leq Ce^{-\mu t} \|p - p^*\|, \text{ dla każdego } t \geq 0. \quad (1.11)$$

### 1.3. Arytmetyka interwałowa

Wprowadzimy teraz podstawowe oznaczenia i zaprezentujemy kilka własności arytmetyki interwałowej, które wykorzystamy w dalszej części tej rozprawy. Będziemy się przy tym opierać na [3] oraz [28].

#### 1.3.1. Podstawowe pojęcia i definicje

Przyjmijmy konwencję, w której ograniczone przedziały domknięte liczb rzeczywistych (nazywane *interwałami*) będziemy oznaczać pogrubionymi literami, a zbiór wszystkich takich przedziałów oznaczymy  $I(\mathbb{R})$ . Niech więc  $\mathbf{a} \in I(\mathbb{R})$ . Wówczas jego lewy i prawy koniec będziemy oznaczać jako odpowiednio  $\underline{a}$  i  $\bar{a}$ , tj.

$$\mathbf{a} = [\underline{a}, \bar{a}].$$

Interwałem, który nie może być zapisany w powyższej reprezentacji, jest interwał pusty, jednak ze względów praktycznych dołączamy go do zbioru  $I(\mathbb{R})$ .

W przypadku, gdy  $\underline{a} = \bar{a} = a$ , to znaczy gdy  $\mathbf{a}$  zawiera tylko jeden element  $a$ , interwał taki nazwiemy *zdegenerowanym*. Przyjmijmy konwencję, która dopuszcza utożsamienie liczby rzeczywistej  $a$  z interwałem zdegenerowanym  $[a, a]$ . Stąd dopuszczalnym i czasami stosowanym przez nas zapisem będzie

$$a = [a, a].$$

Niech teraz  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  będą interwałami, natomiast  $\circ$  jednym z podstawowych działań arytmetycznych na liczbach rzeczywistych, tzn.  $\circ \in \{+, -, \cdot, :\}$ . Wówczas możemy zdefiniować analogiczne działanie na interwałach  $\mathbf{a}$  i  $\mathbf{b}$  jako

$$\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = \{a \circ b : a \in \mathbf{a}, b \in \mathbf{b}\},$$

przy czym w przypadku dzielenia zakładamy, że  $0 \notin \mathbf{b}$ . Można łatwo wykazać, że tak zdefiniowane działania na interwałach są wewnętrzne w zbiorze  $I(\mathbb{R})$ . Co więcej wynik działania  $\mathbf{a} \circ \mathbf{b}$  daje się przedstawić z wykorzystaniem tylko krańców interwałów  $\mathbf{a}$  i  $\mathbf{b}$ . Prawdziwe są bowiem następujące równości

$$\begin{aligned}\mathbf{a} + \mathbf{b} &= [\underline{a} + \underline{b}, \bar{a} + \bar{b}], \\ \mathbf{a} - \mathbf{b} &= [\underline{a} - \bar{b}, \bar{a} - \underline{b}], \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= [\min S, \max S], \text{ gdzie } S = \{\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\bar{b}, \bar{a}\underline{b}, \bar{a}\bar{b}\}, \\ \mathbf{a} : \mathbf{b} &= [\min S, \max S], \text{ gdzie } S = \left\{ \frac{\underline{a}}{\underline{b}}, \frac{\underline{a}}{\bar{b}}, \frac{\bar{a}}{\underline{b}}, \frac{\bar{a}}{\bar{b}} \right\}.\end{aligned}$$

Okazuje się, że elementarne operacje na przedziałach są *izotoniczne ze względu na zawieranie*, to znaczy dla dowolnych przedziałów  $\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}'$  oraz dowolnego działania  $\circ \in \{+, -, \cdot, : \}$  prawdziwa jest implikacja

$$\mathbf{a} \subset \mathbf{a}' \wedge \mathbf{b} \subset \mathbf{b}' \Rightarrow \mathbf{a} \circ \mathbf{b} \subset \mathbf{a}' \circ \mathbf{b}'.$$

Klasyczną operacją wykonywaną na interwałach jest również ich przecięcie, które zdefiniowane jest w standardowy sposób. Warto przy tym zwrócić uwagę, że w większości przypadków, suma dwóch interwałów (tj.  $\mathbf{a} \cup \mathbf{b}$ ) nie koniecznie musi być interwałem. Jednakże, tzw. powłoka interwałowa dwóch przedziałów (ang. *interval hull*), zdefiniowana jako

$$\mathbf{a} \cup \mathbf{b} = [\min\{\underline{a}, \underline{b}\}, \max\{\bar{a}, \bar{b}\}]$$

zawsze jest przedziałem i może być wykorzystywana w obliczeniach na interwałach.

W zbiorze interwałów  $I(\mathbb{R})$  można wprowadzić relację porządkującą, mianowicie będziemy pisać, że  $\mathbf{a} < \mathbf{b}$ , o ile  $\bar{a} < \underline{b}$ . Korzystając z powyższego zapisu, interwał  $\mathbf{a}$  nazwiemy *dodatnim*, gdy  $\mathbf{a} > 0$ , natomiast *ujemnym*, gdy  $\mathbf{a} < 0$ .

Warto podkreślić, że arytmetyka interwałowa nie musi się ograniczać wyłącznie do jednego wymiaru. W celu rozważenia problemów wielowymiarowych wprowadza się pojęcie wektorów i macierzy interwałowych. Macierzą interwałową  $\mathbf{A}$  wymiaru  $m \times n$  nazwiemy dowolną macierz  $m \times n$ , której elementami są interwały, tj.

$$\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})_{m \times n}.$$

Zbiór takich macierzy oznaczamy będziemy jako  $I(\mathbb{R}^{m \times n})$ . Operacje na wektorach i macierzach interwałowych definiujemy w standardowy sposób. W szczególności powiemy, że kwadratowa macierz interwałowa  $\mathbf{A}$  jest *odwracalna*, jeżeli odwracalna jest dowolna macierz  $A \in \mathbf{A}$ . Wówczas odwrotnością  $\mathbf{A}$  nazwiemy najmniejszą w sensie inkluzji macierz interwałową  $\mathbf{A}^{-1}$  spełniająca

$$\{A^{-1} : A \in \mathbf{A}\} \subset \mathbf{A}^{-1}.$$

Niech teraz  $X$  będzie pewnym podzbiorem  $\mathbb{R}$ . Wówczas przez  $[X]$  oznaczamy będziemy *domknięcie interwałowe* zbioru  $X$ , tzn. dowolny interwał zawierający  $X$ . W podobny sposób możemy zdefiniować domknięcie interwałowe zbioru  $X$ , gdy  $X \subset \mathbb{R}^{m \times n}$ . Zauważmy, że powyższa definicja implikuje brak jedności domknięcia interwałowego danego zbioru. W praktyce dążymy jednak do tego, żeby rozważane przez nas domknięcie interwałowe było jak najmniejsze w sensie inkluzji.

Istotną kwestią z punktu widzenia zastosowań jest sposób implementacji arytmetyki interwałowej na komputerach. Zauważmy, że ze względu na ograniczoną pamięć komputera, tylko część elementów zbioru  $I(\mathbb{R})$  będzie miała swoją reprezentację. Niech więc  $\mathbb{F} \subset \mathbb{R}$  będzie zbiorem wszystkich liczb zmiennoprzecinkowych, które mają reprezentację na danym komputerze i niech  $I(\mathbb{F})$  będzie zbiorem wszystkich domkniętych i ograniczonych przedziałów o końcach ze zbioru  $\mathbb{F}$ . Wówczas możliwe jest zaimplementowanie na komputerze arytmetyki na  $I(\mathbb{F})$ . Operacje arytmetyczne w  $I(\mathbb{F})$  są definiowane poprzez operacje w  $I(\mathbb{R})$ , jednak otrzymany wynik jest zaokrąglany w taki sposób, aby końce otrzymanego przedziału były reprezentowalne na komputerze, a sam przedział zawierał właściwy wynik zdefiniowany poprzez arytmetykę w  $I(\mathbb{R})$  i był najmniejszy w sensie inkluzji (zob. [26]).

Opisane powyżej metody arytmetyki interwałowej doprowadziły do rozwoju *analizy interwałowej*. Podejście interwałowe pozwoliło na rozważanie tzw. *rozszerzeń interwałowych funkcji*. Dla danej funkcji  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  jej rozszerzeniem interwałowym będziemy nazywać dowolną funkcję interwałową  $\mathbf{f} : I(\mathbb{R}^n) \rightarrow I(\mathbb{R}^m)$  spełniającą dla każdego  $x \in \mathbb{R}^n$  warunek

$$\mathbf{f}([x, x]) = f(x).$$

Dodatkowo od rozszerzenia interwałowego funkcji wymagamy spełnienia warunku *izotoniczności ze względu na zawieranie*, tj. dla dowolnych  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \subset I(\mathbb{R}^n)$  zachodzić musi następująca implikacja

$$\mathbf{x} \subset \mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}) \subset \mathbf{f}(\mathbf{y}).$$

Zauważmy, że rozszerzenie interwałowe funkcji nigdy nie jest wyznaczone jednoznacznie. Jednakże w praktyce dążymy do takiego doboru  $\mathbf{f}$ , aby wartości  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  były możliwie najmniejsze w sensie inkluzji.

Dzięki rozwojowi analizy interwałowej stało się możliwe zaimplementowanie algorytmów służących do obliczania domknięcia interwałowego obrazu zadanej funkcji  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , oraz jej pochodnych (również wyższych rzędów). Co więcej obliczenia interwałowe mogły zostać wykorzystane w całkowaniu równań różniczkowych zwyczajnych. W szczególności dostępne są algorytmy pozwalające wyznaczyć domknięcia interwałowe trajektorii potoku danego równania czy też pochodnych wyższych rzędów odwzorowania Poincarégo (zob. np. [45], [44]).

Istnieje wiele narzędzi programistycznych, które pozwalają wykorzystać opisane przez nas powyżej techniki analizy interwałowej w praktyce. Wymienimy tu chociażby działający w środowisku MATLAB pakiet IntLab, czy też pierwszy ogólnie dostępny pakiet napisany w języku C: BIAS (Basic Interval Arithmetic Subroutines). Szczegółowe porównanie większości dostępnych narzędzi znajdziemy np. w pracy [39]. Pakietem szczególnie wartym przez nas podkreślenia jest biblioteka języka C++ „Computer Assisted Proofs in Dynamics” (CAPD), w której została zawarta implementacja wielu algorytmów arytmetyki i analizy interwałowej. Pakiet dostępny jest w internecie na stronie <http://capd.ii.uj.edu.pl>. Wszystkie przeprowadzone przez nas na potrzeby tej pracy wspomagane komputerowo dowody, zostały wykonane z wykorzystaniem pakietu CAPD.

### 1.3.2. Interwałowa metoda Newtona

Pokażemy teraz w jaki sposób (wykorzystując arytmetykę interwałową) możemy wyznaczyć domknięcie interwałowe miejsca zerowego odwzorowania.

Rozważmy więc pewną funkcję  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  klasy  $C^1$  i niech  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Wówczas, zgodnie z notacją wprowadzoną w poprzednim rozdziale, przez  $[Df(U)]$  będziemy rozumieć domknięcie interwałowe macierzy Jacobiego funkcji  $f$  na zbiorze  $U$ . Stąd  $[Df(U)]$  jest macierzą interwałową daną jako

$$[Df(U)] = (\mathbf{a}_{ij})_{n \times n},$$

gdzie

$$\mathbf{a}_{ij} = \left[ \inf_{x \in U} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x), \sup_{x \in U} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right]$$

dla wszystkich  $i, j = 1, \dots, n$ .

Niech  $\mathbf{x} \subset I(\mathbb{R}^n)$  będzie wektorem interwałowym i założymy, że macierz interwałowa  $[Df(\mathbf{x})]$  jest odwracalna. Dla dowolnego  $x_0 \in \mathbf{x}$  zdefiniujemy

$$N(x_0, \mathbf{x}) = x_0 - [Df(\mathbf{x})]^{-1} f(x_0). \quad (1.12)$$

**Twierdzenie 1.18** [1] (*Interwałowa Metoda Newtona*) Niech  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  będzie funkcją klasy  $C^1$  i niech  $\mathbf{x} = \Pi_{i=1}^n [a_i, b_i]$ , gdzie  $a_i < b_i$ . Jeżeli  $[Df(\mathbf{x})]$  jest odwracalna i istnieje  $x_0 \in \mathbf{x}$  takie, że dla operatora  $N$  zdefiniowanego jako (1.12) zachodzi

$$N(x_0, \mathbf{x}) \subset \text{Int}(\mathbf{x}),$$

wówczas w zbiorze  $\mathbf{x}$  istnieje dokładnie jeden punkt  $x^*$  spełniający  $f(x^*) = 0$ .

W naszej pracy będziemy rozważać równania różniczkowe zależne od parametru. Przedstawimy więc teraz dobrze znaną modyfikację (zob. np. [32]) opisanej powyżej Interwałowej Metody Newtona, która pozwoli na znalezienie domknięcia interwałowego rodziny punktów równowagi indeksowanych parametrem.

Rozważmy więc  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \ni (x, \theta) \rightarrow f(x, \theta) \in \mathbb{R}^n$ . Dla dowolnego  $U \subset \mathbb{R}^n$  oraz  $I \subset \mathbb{R}$  przez  $[D_x f(U, I)]$  będziemy rozumieć (zgodnie z notacją wprowadzoną w poprzednim rozdziale) macierz interwałową wymiaru  $n \times n$  postaci

$$[D_x f(U, I)] = (\mathbf{a}_{ij})_{n \times n},$$

gdzie

$$\mathbf{a}_{ij} = \left[ \inf_{x \in U, \theta \in I} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x, \theta), \sup_{x \in U, \theta \in I} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x, \theta) \right]$$

dla wszystkich  $i, j = 1, \dots, n$ .

Niech  $\mathbf{x} \subset I(\mathbb{R}^n)$  oraz  $\boldsymbol{\theta} \subset I(\mathbb{R})$  będą odpowiednio wektorem interwałowym oraz interwałem, i założymy, że macierz interwałowa  $[D_x f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})]$  jest odwracalna. Dla dowolnego  $x_0 \in \mathbf{x}$  zdefiniujemy

$$N(x_0, \mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) = x_0 - [D_x f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})]^{-1} f(x_0, \boldsymbol{\theta}). \quad (1.13)$$

**Twierdzenie 1.19** [32] Niech  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  będzie funkcją klasy  $C^1$  i niech  $\mathbf{x} = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ , gdzie  $a_i < b_i$  oraz  $\boldsymbol{\theta} = [c, d]$ , gdzie  $c < d$ . Jeżeli  $[D_{\mathbf{x}}f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})]$  jest odwracalna i istnieje  $x_0 \in \mathbf{x}$  takie, że dla operatora  $N$  zdefiniowanego jako (1.13) zachodzi

$$N(x_0, \mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) \subset \text{Int}(\mathbf{x}),$$

wówczas istnieje jednoznacznie wyznaczona funkcja  $x^* : \boldsymbol{\theta} \rightarrow \mathbf{x}$  spełniająca dla dowolnego  $\theta \in \boldsymbol{\theta}$  równość  $f(x^*(\theta), \theta) = 0$ .

**Uwaga 1.20** Z twierdzenia o funkcji uwikłanej wynika, że  $x^*(\theta)$  jest tak gładka jak odwzorowanie  $f$ .

## 1.4. Wybrane własności z teorii równań różniczkowych

W rozdziale tym prezentujemy wybrane wyniki z teorii równań różniczkowych, na których będziemy się opierać w dalszej części naszej pracy.

**Lemat 1.21** [17] (Lemat Gronwalla) Niech  $0 < \alpha < \beta$  oraz niech dane będą funkcje  $u, v, c : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}_+$ , gdzie  $\alpha < \beta$ . Przypuśćmy, że  $c$  jest różniczkowalna oraz dla dowolnego  $t \in [\alpha, \beta]$  spełniony jest warunek

$$v(t) \leq c(t) + \int_0^t u(s)v(s)ds.$$

Wówczas dla dowolnego  $t \in [\alpha, \beta]$

$$v(t) \leq c(0) \exp\left(\int_0^t u(s)ds\right) + \int_0^t c'(s) \left[\exp\left(\int_s^t u(\tau) d\tau\right)\right] ds.$$

## 1.5. Pewne fakty z topologii

W rozdziale tym prezentujemy dwa techniczne lematy dotyczące własności topologicznych zbiorów, które wykorzystamy w dalszej części naszej pracy.

**Lemat 1.22** Niech zbiory  $A, B \subset \mathbb{R}^u$  będą homeomorficzne z kulą domkniętą  $\overline{B}_u$ . Załóżmy, że  $\partial A \cap \text{Int}(B) = \emptyset$  oraz  $A \cap \text{Int}(B) \neq \emptyset$ . Wówczas  $B \subset A$ .

*Dowód* Dowód znajduje się w Dodatku A. □

**Lemat 1.23** Niech zbiory  $A, B \subset \mathbb{R}^u$  będą homeomorficzne z kulą domkniętą  $\overline{B}_u$ . Załóżmy, że  $\partial A \subset \partial B$  oraz  $A \cap \text{Int}(B) \neq \emptyset$ . Wówczas  $A = B$ .

*Dowód* Dowód znajduje się w Dodatku A. □

# Warunki stożka i dyski horyzontalne

W Rozdziale 3 zaprezentujemy twierdzenia o istnieniu rozmaitości silnie stabilnych i silnie niestabilnych punktów stałych, które są jednymi z kluczowych wyników naszej pracy. Twierdzenia te będą opierać się o tzw. „warunki stożka” - czyli geometryczne własności (związane ze sposobem w jaki funkcja odwzorowuje stożki), których spełnienia będziemy żądać od zadanej funkcji.

W pierwszej części tego rozdziału przedstawimy formalną definicję warunków stożka i zaprezentujemy kilka przykładów funkcji spełniających te warunki. Następnie wprowadzimy pojęcie dysków horyzontalnych - obiektów, które będą wykorzystywane przez nas w dowodach twierdzeń z Rozdziału 3. Na samym końcu zajmiemy się kwestią przekształcenia dysków horyzontalnych przez odwzorowania spełniające warunki stożka - udowodnimy, że obraz dysku horyzontalnego otrzymany w wyniku takiego przekształcenia jest również dyskiem horyzontalnym

W rozdziale tym będziemy rozważać przestrzeń  $\mathbb{R}^n$  jako iloczyn kartezjański przestrzeni  $\mathbb{R}^u$  i  $\mathbb{R}^s$ , gdzie  $u + s = n$ . Przyjmiemy konwencję, w której punkt  $p \in \mathbb{R}^n$  będziemy zapisywać jako  $(x, y)$ , gdzie  $x \in \mathbb{R}^u$  oraz  $y \in \mathbb{R}^s$ . W dalszych rozważaniach dotyczących rozmaitości stabilnych i niestabilnych, parametry  $u$  i  $s$  będą utożsamiane z wymiarami odpowiednio rozmaitości stabilnej i niestabilnej.

## 2.1. Warunki stożka

W rozdziale tym zajmiemy się odwzorowaniami spełniającymi warunki stożka. Pojęcie to zostało wprowadzone w pracy [46]. Definicja warunków stożka, którą my przedstawimy jest pewną modyfikacją analogicznej definicji z [46].

Dla dowolnego  $\alpha > 0$  zdefiniujemy formę kwadratową  $Q_\alpha : \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$  jako

$$Q_\alpha(x, y) = \alpha^2 \|x\|^2 - \|y\|^2. \quad (2.1)$$

Gdy  $\alpha = 1$ , zamiast używać notacji  $Q_1$ , będziemy pisać po prostu  $Q$ .

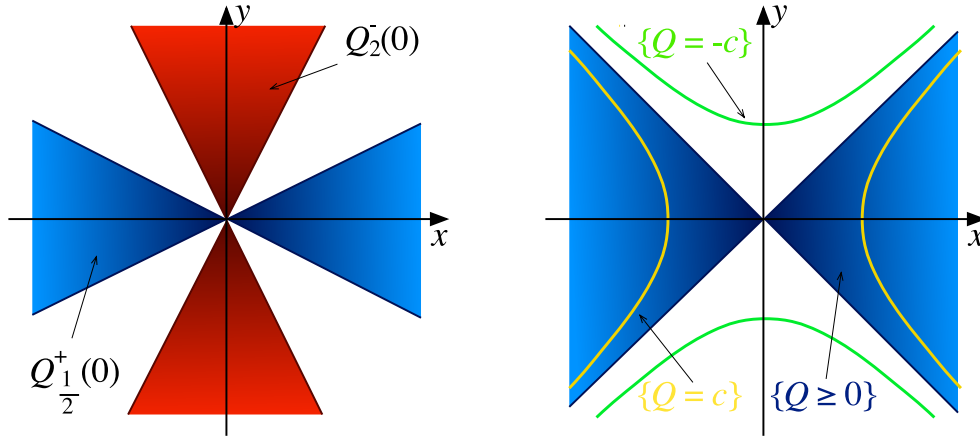
Ustalmy  $p_0 \in \mathbb{R}^n$  i zdefiniujemy zbiory

$$Q_\alpha^+(p_0) = \{p \in \mathbb{R}^n : Q_\alpha(p - p_0) \geq 0\}$$

oraz

$$Q_\alpha^-(p_0) = \{p \in \mathbb{R}^n : Q_\alpha(p - p_0) \leq 0\}.$$

Zauważmy, że zbiory te są stożkami zaczepionymi w punkcie  $p_0$  (zob. Rysunek 2.1).  $Q_\alpha^+(p_0)$  i  $Q_\alpha^-(p_0)$  będziemy nazywać odpowiednio *stożkiem dodatnim* i *stożkiem ujemnym o wierzchołku w  $p_0$ , indukowanym przez  $Q_\alpha$* . Przyjmujemy konwencję, w której stożek  $Q_1^+(p_0)$  (odpowiednio  $Q_1^-(p_0)$ ) będziemy oznaczać przez  $Q^+(p_0)$  (odpowiednio  $Q^-(p_0)$ ).



(a) Na niebiesko (odpowiednio na czerwono) został zaznaczony stożek dodatni (odpowiednio ujemny) zaczepiony w punkcie 0 indukowany przez  $Q_{\frac{1}{2}}$  (odpowiednio  $Q_2$ ).

(b) Na niebiesko został zaznaczony zbiór  $\{Q \geq 0\}$ , t.j. stożek dodatni zaczepiony w punkcie 0 indukowany przez  $Q$ . Zbiory żółty i zielony to wybrane poziomicie formy  $Q$  (dla  $c = 1$ ).

Rysunek 2.1. Pewne charakterystyczne zbiory związane z formą kwadratową  $Q_\alpha$ .

Wprowadzimy teraz definicję warunków stożka.

**Definicja 2.1** Niech dane będzie odwzorowanie  $f : \text{Dom}(f) \rightarrow \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^s$ , gdzie  $\text{Dom}(f) \subset \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^s$ , oraz niech  $m > 0$ . Powiemy, że  $f$  spełnia warunki stożka dla pary  $(Q_\alpha, m)$  w zbiorze  $U \subset \text{Dom}(f)$ , gdy dla dowolnych  $p_1, p_2 \in U$ , takich, że  $p_1 \neq p_2$ , zachodzi nierówność

$$Q_\alpha(f(p_1) - f(p_2)) > mQ_\alpha(p_1 - p_2).$$

Funkcje, które spełniają powyższy warunek muszą w odpowiedni sposób przekształcać stożki (zob. Rysunek 2.2). W szczególności dla dowolnego  $p_1 \in U$  musi zachodzić

$$f(Q_\alpha^+(p_1) \cap U) \subset Q_\alpha^+(f(p_1)),$$

oraz

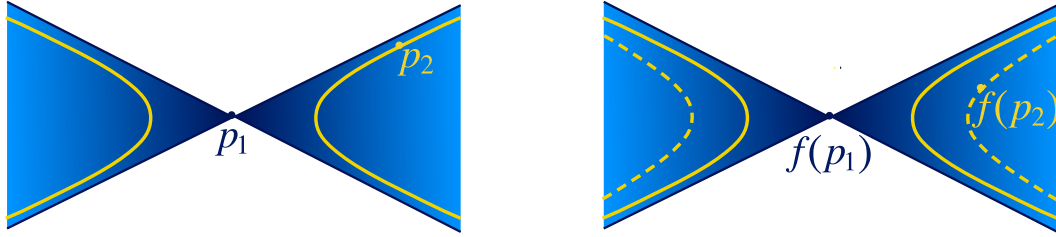
$$f^{-1}(Q_\alpha^-(f(p_1))) \cap U \subset Q_\alpha^-(p_1).$$

Przejdźmy teraz do pokazania kilku przykładów funkcji spełniających warunki stożka.

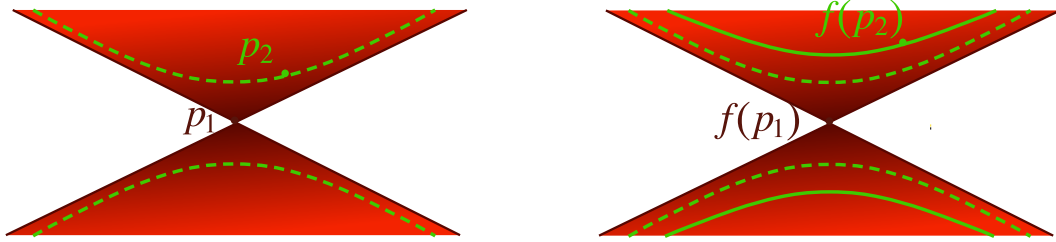
**Przykład 2.2** Niech  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a > b > 0$ , i niech  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  będzie odwzorowaniem liniowym danym jako

$$f(x, y) = (ax, by).$$





(a) Przypadek  $m > 1$ . Obraz dowolnego punktu  $p_2 \in U$  leżącego na poziomici stożka dodatniego indukowanego przez  $Q_\alpha$  o wierzchołku w  $p_1$ , leży na poziomici stożka dodatniego indukowanego przez  $Q_\alpha$  o wierzchołku w  $f(p_1)$ , która znajduje się w większej odległości od wierzchołka stożka niż wyjściowa poziomicca.



(b) Przypadek  $m < 1$ . Dowolny punkt  $p_2 \in U$ , o obrazie  $f(p_2)$  leżącym na poziomici stożka ujemnego indukowanego przez  $Q_\alpha$  o wierzchołku w  $f(p_1)$ , leży na poziomici stożka ujemnego indukowanego przez  $Q_\alpha$  o wierzchołku w  $p_1$ , która znajduje się w mniejszej odległości od wierzchołka stożka niż wyjściowa poziomicca dla  $f(p_2)$ .

Rysunek 2.2. Interpretacja geometryczna funkcji  $f$  spełniającej warunki stożka dla pary  $(Q_\alpha, m)$ .

Wówczas  $f$  spełnia warunki stożka dla  $(Q_\alpha, m)$  w  $U = \mathbb{R}^2$ , dla dowolnego  $m \in (b^2, a^2)$ . Zauważmy, że nie musimy przy tym zakładać, że  $a > 1$  lub  $b < 1$ . Co więcej,  $f_\varepsilon = f + \varepsilon g$  również spełnia warunki stożka w dowolnym zbiorze zwartym  $U \subset \mathbb{R}^2$ , zakładając, że  $g$  jest różniczkowalne, a  $\varepsilon$  jest dostatecznie małe.  $\square$

**Przykład 2.3** Niech  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a > 1 > b > 0$  oraz niech  $R : \mathbb{R}^2 \ni \theta \rightarrow R(\theta) \in \mathbb{R}^2$  będzie rotacją o pewien kąt  $\phi \in (0, 2\pi)$ , tj.

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \theta$$

Rozważmy odwzorowanie  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ , dane jako

$$f(v, \theta, z) = (av, R(\theta), bz).$$

Przyjmując

$$x = v, \quad y = (\theta, z),$$

funkcja  $f$  spełnia warunki stożka dla  $(Q_\alpha, m)$  w  $U = \mathbb{R}^4$  dla dowolnego  $m \in (1, a^2)$ .

Z drugiej strony dla współrzędnych  $(x, y)$  wybranych jako

$$x = (v, \theta), \quad y = z,$$

warunki stożka są spełnione dla dowolnego  $m \in (b^2, 1)$ .

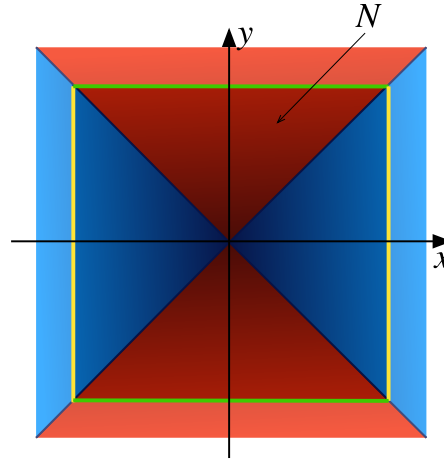
Zobaczmy później, że ta możliwość manipulowania możliwym zakresem parametru  $m$  poprzez odpowiednie grupowanie współrzędnych, okaże się bardzo przydatna, jak chodzi o kwestię zastosowań twierdzeń dotyczących istnienia rozmaitej stabilności i niestabilności.

Zauważmy również, że warunki stożka nadal są spełnione w dowolnym zbiorze zwartym  $U \subset \mathbb{R}^2$  dla  $f_\varepsilon = f + \varepsilon g$ , o ile tylko  $g$  jest różniczkowalne, a  $\varepsilon$  jest dostatecznie małe.  $\square$

Na potrzeby dalszych rozważań zdefiniujmy zbiór  $N \subset \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^s$  jako produkt dwóch kul domkniętych o promieniach 1, tj.

$$N = \overline{B}_u \times \overline{B}_s. \quad (2.2)$$

Zauważmy, że dla tak zdefiniowanego  $N$  zbiory  $\pi_x N \times \partial\pi_y N$  oraz  $\partial\pi_x N \times \pi_y N$  leżą w stożkach odpowiednio  $Q^+(0)$  oraz  $Q^-(0)$  (zob. Rysunek 2.3).



Rysunek 2.3. Zbiór  $N$  będący produktem dwóch kul domkniętych. Zbiory  $\pi_x N \times \partial\pi_y N$  i  $\partial\pi_x N \times \pi_y N$  zostały zaznaczone odpowiednio żółtym i zielonym kolorem. Zbiory te leżą w stożkach odpowiednio dodatnim i ujemnym indukowanych przez  $Q$  o wierzchołku w początku układu współrzędnych.

Podamy teraz dwie przydatne własności odwzorowania  $Q$  i zbioru  $N$ , które zostaną przez nas wykorzystane w dalszej części pracy. Własności te podajemy jako wniosek z poniższego lematu.

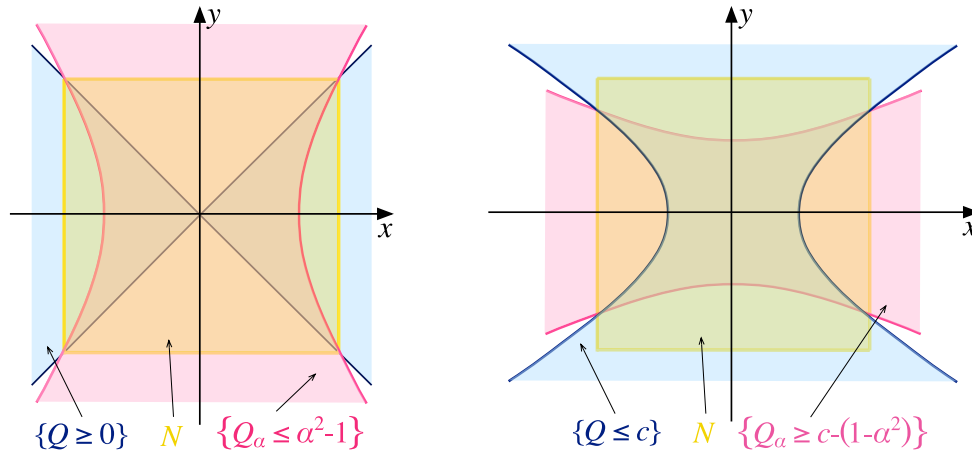
**Lemat 2.4** Niech  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$  będą takie, że  $\alpha_1 < \alpha_2$ . Niech  $N$  będzie dane jako (2.2). Niech  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ . Jeżeli spełnione są warunki

$$\{Q_{\alpha_1} = c_1\} \cap \{Q_{\alpha_2} = c_2\} \neq \emptyset, \quad (2.3)$$

$$\{Q_{\alpha_1} = c_1\} \cap \{Q_{\alpha_2} = c_2\} \subset N, \quad (2.4)$$

to

$$\{Q_{\alpha_1} \geq c_1\} \cap \{Q_{\alpha_2} \leq c_2\} \subset N. \quad (2.5)$$



(a) Przypadek  $\alpha > 1$  (zob. Wniosek 2.5). Dowolny punkt  $(x, y)$  leżący w przecięciu zbiorów  $\{Q \geq 0\}$  i  $\{Q_\alpha \leq \alpha^2 - 1\}$  musi leżeć w zbiorze  $N$ .

(b) Przypadek  $\alpha < 1$  (zob. Wniosek 2.6). Dowolny punkt  $(x, y)$  leżący w przecięciu zbiorów  $\{Q \leq c\}$  i  $\{Q_\alpha \geq c - (1 - \alpha^2)\}$  musi leżeć w zbiorze  $N$ .

Rysunek 2.4. Interpretacja geometryczna Wniosku 2.5 i Wniosku 2.6.

*Dowód* Dowód znajduje się w Dodatku A. □

**Wniosek 2.5** Niech  $N$  będzie dane jako (2.2) i niech  $\alpha > 1$ . Wówczas jeżeli  $Q(x, y) \geq 0$  oraz  $Q_\alpha(x, y) \leq \alpha^2 - 1$ , to  $(x, y) \in N$ .

*Dowód* Dowód znajduje się w Dodatku A. □

**Wniosek 2.6** Niech  $N$  będzie dane jako (2.2) i niech  $\alpha < 1$ ,  $c \in (0, 1 - \alpha^2]$ . Wówczas jeżeli  $Q(x, y) \leq c$  oraz  $Q_\alpha(x, y) \geq c - (1 - \alpha^2)$ , to  $(x, y) \in N$ .

*Dowód* Dowód znajduje się w Dodatku A. □

## 2.2. Dyski horyzontalne

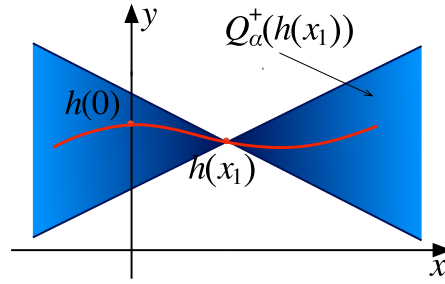
Wprowadzimy teraz definicję dysków horyzontalnych - obiektów, które będą przez nas wykorzystywane do dowodów istnienia różnorodności silnie stabilnych i silnie niestabilnych punktów stałych. Pojęcie dysku horyzontalnego zostało wprowadzone w pracy P. Zgliczyńskiego (zob. [46]), a wyniki zawarte w tym rozdziale są w znacznej mierze nią inspirowane.

Ustalmy  $\alpha > 0$ . Niech forma kwadratowa  $Q_\alpha$  będzie dana równością (2.1) oraz niech zbiór  $N$  będzie postaci (2.2).

**Definicja 2.7** Niech  $h : \bar{B}_u \rightarrow \mathbb{R}^{u+s}$  będzie odwzorowaniem ciągłym. Powiemy, że  $h$  jest dyskiem  $Q_\alpha$ -horyzontalnym jeżeli spełnione są warunki

$$Q_\alpha(h(x_1) - h(x_2)) > 0 \text{ dla dowolnych } x_1 \neq x_2, \quad (2.6)$$

$$\pi_x h(0) = 0. \quad (2.7)$$

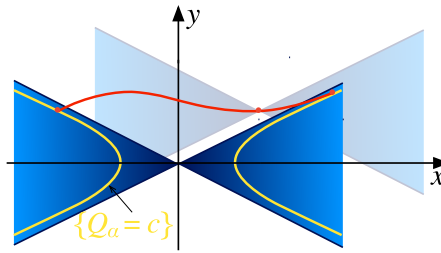


Rysunek 2.5. Na czerwono został zaznaczony dysk  $Q_\alpha$ -horyzontalny  $h$ . Dla dowolnego punktu  $x_1 \in \bar{B}_u$  dysk  $h$  leży wewnątrz stożka dodatniego indukowanego przez  $Q_\alpha$  i zaczepionego w  $h(x_1)$ .

**Definicja 2.8** Powiemy, że dysk  $Q_\alpha$ -horyzontalny  $h$  jest w  $N$  jeżeli  $h(\bar{B}_u) \subset N$ .

**Definicja 2.9** Niech  $c \geq 0$ . Powiemy, że dysk  $Q_\alpha$ -horyzontalny  $h$  ma promień  $c$  jeżeli

$$Q_\alpha(h(\partial B_u)) = c. \quad (2.8)$$



Rysunek 2.6. Na czerwono został zaznaczony dysk  $Q_\alpha$ -horyzontalny  $h$  o promieniu  $c$ . Obraz  $\partial B_u$  jest zawarty w zbiorze  $\{Q_\alpha = c\}$ .

Wykażemy teraz kilka przydatnych własności dysków horyzontalnych, które wynikają z definicji.

**Lemat 2.10** Jeżeli  $h$  jest dyskiem  $Q_\alpha$ -horyzontalnym, to odwzorowanie  $\pi_x \circ h$  jest bijekcją na swój obraz.

*Dowód* Weźmy dowolne  $x_1, x_2 \in \bar{B}_u$  i przypuśćmy, że  $x_1 \neq x_2$ . Wówczas na mocy (2.6) mamy

$$0 < Q_\alpha(h(x_1) - h(x_2)) \leq \alpha^2 \|\pi_x(h(x_1)) - \pi_x(h(x_2))\|^2,$$

skąd  $\pi_x(h(x_1)) \neq \pi_x(h(x_2))$ . Oznacza to, że  $\pi_x \circ h$  jest iniektywne, a więc w konsekwencji jest bijektywne na swój obraz.  $\square$

**Lemat 2.11** Jeżeli  $h$  jest dyskiem  $Q_\alpha$ -horyzontalnym o promieniu  $c$ , to dla dowolnego  $\tilde{x} \in \bar{B}_u \left(\frac{\sqrt{c}}{\alpha}\right)$ , istnieje dokładnie jedno  $x \in \bar{B}_u$ , dla którego  $\pi_x h(x) = \tilde{x}$ .

*Dowód* Z definicji  $h$  jest odwzorowaniem ciągłym. Na mocy Lematu 2.10 odwzorowanie  $\pi_x h : \overline{B}_u \rightarrow \pi_x h(\overline{B}_u)$  jest bijektywne. Zbiór  $\overline{B}_u$  jest zwarty, a więc  $(\pi_x h)^{-1}$  jest również odwzorowaniem ciągłym. W takim razie zbiór  $\pi_x h(\overline{B}_u)$  jest homeomorficzny z  $\overline{B}_u$ .

Oznaczmy

$$A = \pi_x h(\overline{B}_u), \quad B = \overline{B}_u\left(\frac{\sqrt{c}}{\alpha}\right).$$

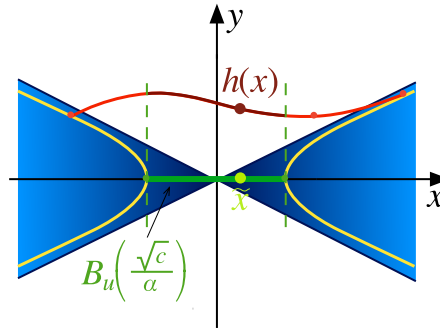
Dysk  $h$  ma promień  $c$ , a więc dla dowolnego  $x \in \partial B_u$

$$c = Q_\alpha(h(x)) = \alpha^2 \|\pi_x h(x)\|^2 - \|\pi_y h(x)\|^2 \leq \alpha^2 \|\pi_x h(x)\|^2,$$

skąd  $\|\pi_x h(x)\| \geq \frac{\sqrt{c}}{\alpha}$ . Oznacza to, że  $\partial A \cap \text{Int}(B) = \emptyset$ . Ponieważ  $\pi_x h(0) = 0 \in \text{Int}(B)$ , więc  $0 \in A \cap \text{Int}(B)$  i na mocy Lematu 1.22 mamy

$$B \subset A.$$

Pokazaliśmy więc, że dla dowolnego  $\tilde{x} \in \overline{B}_u\left(\frac{\sqrt{c}}{\alpha}\right)$ , istnieje  $x \in \overline{B}_u$ , dla którego  $\pi_x h(x) = \tilde{x}$ . Punkt taki jest wyznaczony jednoznacznie na mocy Lematu 2.10.  $\square$



Rysunek 2.7. Na czerwono został zaznaczony dysk  $Q_\alpha$ -horyzontalny  $h$  o promieniu  $c$ . Ciągła zielona linia to kula  $\overline{B}_u\left(\frac{\sqrt{c}}{\alpha}\right)$ . Dla dowolnego  $\tilde{x}$  z tej kuli, w obrazie dysku  $h$  istnieje jednoznacznie wyznaczony punkt, którego projekcja na współrzędną  $x$  pokrywa się z  $\tilde{x}$  (zob. Lemat 2.11).

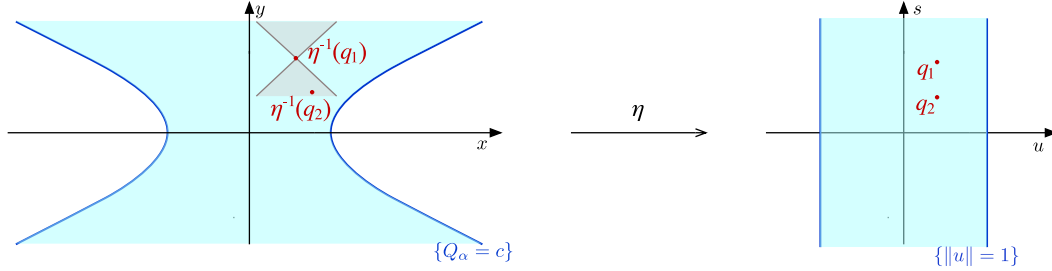
Zanim przejdziemy do podania kolejnych lematów poczynimy kilka technicznych przygotowań.

Na potrzeby dalszych rozważań będziemy chcieli wprowadzić zamianę współrzędnych na  $\mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^s$ , będącą przekształceniem identycznościowym na drugiej współrzędnej, która dla zadanych  $c$  i  $\alpha$ , „wyprostuje” poziomice  $\{Q_\alpha = c\}$  (zob. Rysunek 2.8). Tak więc dla ustalonego  $c > 0$  i  $\alpha > 0$ , zdefiniujemy funkcję  $\eta : \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^s \ni (x, y) \rightarrow (u, s) \in \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^s$  jako

$$\eta(x, y) = \begin{cases} \left( x \frac{\alpha}{\sqrt{c + \|y\|^2}}, y \right), & \text{gdy } Q_\alpha(x, y) \leq c, \\ \left( x \left[ \frac{1}{\|x\|} \left( 1 - \frac{1}{\alpha} \sqrt{c + \|y\|^2} \right) + 1 \right], y \right), & \text{gdy } Q_\alpha(x, y) > c, \end{cases} \quad (2.9)$$

Zauważmy, że w definicji  $\eta$  występuje wyrażenie  $\frac{1}{\|x\|}$ . Funkcja  $\eta$  jest jednak dobrze określona, gdyż dla dowolnego  $(x, y) \in \{0\} \times \mathbb{R}^s$  mamy  $Q_\alpha(x, y) \leq 0 < c$ , skąd  $\eta(x, y) = (0, y)$ .

Zwracamy uwagę, że funkcja  $\eta$  zależy od parametrów  $c$  i  $\alpha$  (które najczęściej będą znane z kontekstu). Jeżeli będziemy chcieli podkreślić tę zależność, stosować będziemy notację  $\eta_{\alpha, c}$ .



Rysunek 2.8. Interpretacja geometryczna funkcji  $\eta$ . Obrazem zbioru  $\{Q \leq c\}$  jest zbiór  $\bar{B}_u \times \mathbb{R}^s$ . Ponadto dla dowolnych punktów  $q_1, q_2$  spełniających  $\pi_u q_1 = \pi_u q_2$ , przeciwobraz  $q_2$  leży w stożku ujemnym indukowanym przez  $Q_\alpha$  o wierzchołku w  $\eta^{-1}(q_1)$  (zob. Lemat 2.12).

**Lemat 2.12** Funkcja  $\eta$  zadana przez (2.9) jest homeomorfizmem spełniającym

$$\{\eta(x, y) : Q_\alpha(x, y) \leq c\} = \{(u, s) : \|u\| \leq 1\}. \quad (2.10)$$

Ponadto dla dowolnych  $s_1, s_2 \in \mathbb{R}^s$  oraz  $u \in \mathbb{R}^u$  zachodzi nierówność

$$Q_\alpha(\eta^{-1}(u, s_1) - \eta^{-1}(u, s_2)) \leq 0. \quad (2.11)$$

*Dowód* Dowód znajduje się w Dodatku A. □

Wykorzystując funkcję  $\eta$  można wykazać, że obraz dysku  $Q_\alpha$ -horyzontalnego o promieniu  $c$  leży w zbiorze  $\{Q_\alpha \leq c\}$ . Własność tę formułujemy w poniższym Lemacie. Jego dowód jest techniczny - umieszczamy go więc w Dodatku A. Zwracamy jednak uwagę, że ideę lematu dobrze obrazuje Rysunek 2.6.

**Lemat 2.13** Jeżeli  $h$  jest dyskiem  $Q_\alpha$ -horyzontalnym o promieniu  $c$ , to

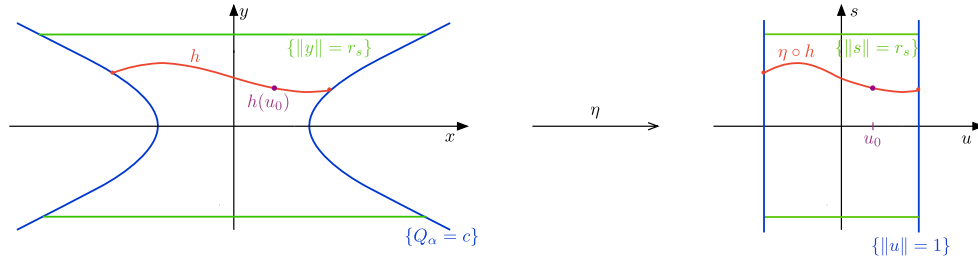
$$h(\bar{B}_u) \subset \{(x, y) : Q_\alpha(x, y) \leq c\}.$$

*Dowód* Dowód znajduje się w Dodatku A. □

Podamy teraz techniczny wynik, który zostanie przez nas wykorzystany w dowodach lematów występujących w dalszej części tego rozdziału.

**Lemat 2.14** Niech dla pewnego  $\alpha > 0$  odwzorowanie  $h : \bar{B}_u \rightarrow \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^s$  spełnia warunek (2.6). Załóżmy, że istnieją  $r_s, c > 0$  takie, że

$$\pi_y(h(\bar{B}_u)) \subset \bar{B}_s(r_s), \quad (2.12)$$



Rysunek 2.9. Interpretacja geometryczna Lematu 2.14. Dla dowolnego punktu  $u_0 \in \overline{B}_u$ , punkt  $h(u_0)$  w współrzędnych  $(u, s)$  (zadanych przez homeomorfizm  $\eta$ ) ma postać  $(u_0, s_0)$ . Odwzorowanie  $h$  w oryginalnych współrzędnych jest dyskiem  $Q_\alpha$ -horyzontalnym o promieniu  $c$ .

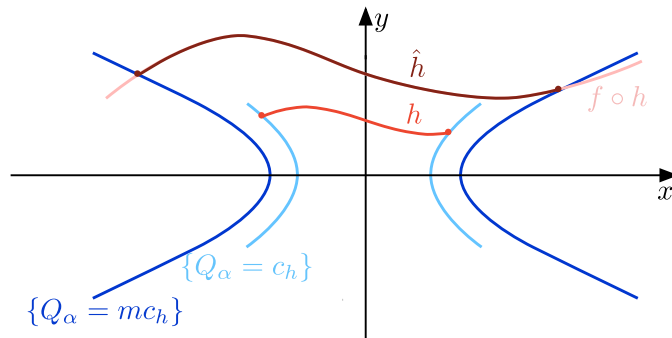
oraz, że dla dowolnego  $u \in \overline{B}_u$  spełniona jest równość

$$\pi_u \eta(h(u)) = u, \quad (2.13)$$

gdzie  $\eta = \eta_{\alpha, c}$  jest zdefiniowane przez (2.9). Wówczas  $h$  jest dyskiem  $Q_\alpha$ -horyzontalnym o promieniu  $c$  oraz spełnia warunek Lipschitza ze stałą  $L = \frac{(c+r_s^2)\sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha(\sqrt{c+r_s^2}-r_s)}$ .

*Dowód* Dowód znajduje się w Dodatku A. □

Przechodzimy teraz do omówienia własności składania odwzorowań będących dyskami horyzontalnymi z funkcjami spełniającymi warunki stożka. Okazuje się, że pod pewnymi warunkami obraz dysku horyzontalnego przez taką funkcję również jest dyskiem horyzontalnym. Obserwację tę wypowiemy w formie poniższego lematu. Lemat ten okaże się kluczowym rezultatem, pozwalającym dowieść twierdzenia o istnieniu rozmaitości silnie stabilnych i niestabilnych.



Rysunek 2.10. Dysk  $Q_\alpha$ -horyzontalny  $\hat{h}$  o promieniu  $c = mc_h$  otrzymany jako część wspólna obrazu przez odwzorowanie  $f$  dysku  $Q_\alpha$ -horyzontalnego  $h$  o promieniu  $c_h$ , oraz zbioru  $\{Q_\alpha \leq c\}$  (zob. Lemat 2.15).

**Lemat 2.15** Niech  $N = \overline{B}_u \times \overline{B}_s$  oraz niech  $\alpha > 0$ . Niech  $h : \overline{B}_u \rightarrow \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^s$  będzie dyskiem  $Q_\alpha$ -horyzontalnym w  $N$  o promieniu  $c_h > 0$ . Niech dane będzie ciągle

odwzorowanie  $f : \text{Dom}(f) \rightarrow \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^s$ , gdzie  $N \subset \text{Dom}(f) \subset \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^s$ . Niech  $m > 0$ . Jeżeli  $f$  spełnia warunki stożka dla  $(Q_\alpha, m)$  w  $N$  oraz  $f(0) = 0$ , to dla dowolnego  $c \in (0, mc_h]$  istnieje dysk  $Q_\alpha$ -horyzontalny  $\hat{h} : \overline{B}_u \rightarrow \mathbb{R}^{u+s}$  o promieniu  $c$ , spełniający

$$\hat{h}(\overline{B}_u) = f \circ h(\overline{B}_u) \cap \{Q_\alpha \leq c\}, \quad (2.14)$$

oraz

$$\pi_u \eta(\hat{h}(u)) = u, \quad (2.15)$$

gdzie  $\eta$  jest zdefiniowane przez (2.9).

*Dowód* Niech  $h_\lambda : \overline{B}_u \rightarrow \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^s$  będzie dane jako

$$h_\lambda(x) := (\pi_x h(x), \lambda \pi_y h(x)).$$

Zdefiniujmy odwzorowanie

$$H : [0, 1] \times \overline{B}_u \rightarrow [0, 1] \times \mathbb{R}^u,$$

$$H(\lambda, x) = (\lambda, \pi_u \eta(f(h_\lambda(x)))).$$

Lemat 2.12 implikuje, że  $H$  jest ciągle. Pokażemy, że  $H$  jest bijektywne na swój obraz. Zauważmy, że dla dowolnego  $\lambda \in [0, 1]$  odwzorowanie  $h_\lambda$  jest dyskiem  $Q_\alpha$ -horyzontalnym w  $N$ . Mamy bowiem dla dowolnych  $x_1 \neq x_2$ ,

$$\begin{aligned} Q_\alpha(h_\lambda(x_1) - h_\lambda(x_2)) &= Q_\alpha(\pi_x(h(x_1) - h(x_2)), \lambda \pi_y(h(x_1) - h(x_2))) \\ &\geq Q_\alpha(h(x_1) - h(x_2)) > 0, \end{aligned}$$

Ponadto

$$\begin{aligned} \pi_x h_\lambda(0) &= (\pi_x h(0), \lambda \pi_y h(0)) = 0, \\ h_\lambda(\overline{B}_u) &\subset \pi_x h(\overline{B}_u) \times \lambda \pi_y h(\overline{B}_u) \subset N. \end{aligned}$$

Odwzorowanie  $h_\lambda$  spełnia więc założenia Definicji 2.7 oraz 2.8.

Niech  $x_1, x_2 \in \overline{B}_u$  i  $x_1 \neq x_2$ . Z tego, że  $h_\lambda$  jest dyskiem horyzontalnym w  $N$  i  $f$  spełnia w  $N$  warunki stożka dostajemy

$$Q_\alpha(f(h_\lambda(x_1)) - f(h_\lambda(x_2))) > m Q_\alpha(h_\lambda(x_1) - h_\lambda(x_2)) > 0,$$

a więc na mocy własności (2.11) z Lematu 2.12 nie może zachodzić  $\pi_u \eta(f(h_\lambda(x_1))) = \pi_u \eta(f(h_\lambda(x_2)))$ . Stąd  $H$  jest injekcją, a więc jest bijekcją na swój obraz. Z definicji  $H$  jest odwzorowaniem ciągłym. Ponieważ zbiór  $[0, 1] \times \overline{B}_u$  jest zwarty, więc  $H^{-1}$  jest również ciągłe. Stąd  $H([0, 1] \times \overline{B}_u)$  jest homeomorficzne z  $[0, 1] \times \overline{B}_u$ , a więc jest homeomorficzne z  $\overline{B}_{u+1}$ .

Oznaczmy

$$A = H([0, 1] \times \overline{B}_u), \quad B = [0, 1] \times \overline{B}_u.$$

Naszym celem będzie wykazanie, przy użyciu Lematu 1.23, że  $B \subset A$ .

Ponieważ  $h_{\lambda=0}(0) = 0$ ,  $f(0) = 0$  i  $\eta(0) = 0$ ,

$$H(0, 0) = (0, \pi_u \eta(f(h_{\lambda=0}(0)))) = (0, 0).$$



W takim razie dla dostatecznie małego  $\lambda_0 \in (0, 1)$  musi zachodzić  $H(\lambda_0, 0) \in (0, 1) \times B_u$ . Wówczas  $H(\lambda_0, 0) \in A \cap \text{Int}(B)$ .

Pokażemy teraz, że  $\partial A \cap \text{Int}(B) = \emptyset$ . Zauważmy, że

$$\begin{aligned} \partial A &= H(\partial([0, 1] \times \overline{B}_u)) \\ &= H([0, 1] \times \partial B_u) \cup H(\{0\} \times B_u) \cup H(\{1\} \times B_u). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Ponieważ

$$\pi_\lambda (H(\{0\} \times B_u) \cup H(\{1\} \times B_u)) = \{0, 1\},$$

więc

$$H(\{0\} \times B_u) \cup H(\{1\} \times B_u) \cap \text{Int}(B) = \emptyset. \quad (2.17)$$

Weźmy teraz dowolne  $x \in \partial B_u$ . Wówczas

$$Q_\alpha(h_\lambda(x)) \geq Q_\alpha(h(x)) = c_h.$$

Z uwagi na to, że  $f$  spełnia warunki stożka dla  $(Q_\alpha, m)$  w  $N$  oraz  $f(0) = 0$ , mamy więc

$$Q_\alpha(f(h_\lambda(x))) = Q_\alpha(f(h_\lambda(x)) - f(0)) > mQ_\alpha(h_\lambda(x)) \geq mc_h \geq c.$$

Stąd, na mocy równości (2.10) z Lematu 2.12,  $\pi_u \eta (f(h_\lambda(\partial B_u))) \cap \overline{B}_u = \emptyset$ . Ponieważ równość ta zachodzi dla wszystkich  $\lambda \in [0, 1]$  implikuje to, że

$$H([0, 1] \times \partial B_u) \cap \text{Int}(B) = \emptyset. \quad (2.18)$$

Na mocy (2.16-2.18) dostajemy równość  $\partial A \cap \text{Int}(B) = \emptyset$ . Korzystając z Lematu 1.23 mamy więc  $B \subset A$ , skąd

$$[0, 1] \times \overline{B}_u \subset H([0, 1] \times \overline{B}_u).$$

W szczególności implikuje to, że  $\{1\} \times \overline{B}_u \subset H(\{1\} \times B_u)$ , skąd

$$\overline{B}_u \subset \pi_u \eta (f(h(\overline{B}_u))). \quad (2.19)$$

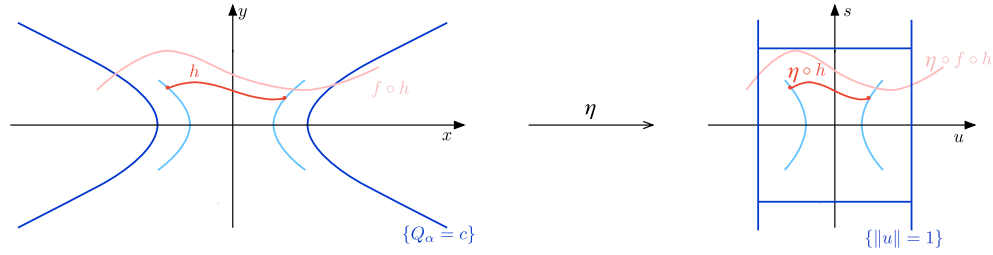
Z (2.19) dostajemy, że dla dowolnego  $u \in \overline{B}_u$  istnieje  $x = x(u) \in \overline{B}_u$  takie, że

$$u = \pi_u \eta (f(h(x(u)))). \quad (2.20)$$

Zauważmy przy tym, że takie  $x(u)$  jest jedyne, gdyż z naszych wcześniejszych rozważań dotyczących injektywności odwzorowania  $H$  wynika, że  $\pi_u \circ \eta \circ f \circ h_\lambda$  jest injekcją dla każdego ustalonego  $\lambda \in [0, 1]$ , a więc w szczególności dla  $\lambda = 1$ . Zdefiniujmy

$$\hat{h}(u) = f(h(x(u))). \quad (2.21)$$

Zauważmy, że konsekwencją (2.20) i (2.21) jest równość (2.15) z tezy dowodzonego lematu.



Rysunek 2.11. Zamiana współrzędnych  $\eta$  zastosowana do dysku  $Q_\alpha$ -horyzontalnego  $h$  oraz do  $f \circ h$ .

Pozostaje wykazać, że  $\hat{h}$  jest dyskiem  $Q_\alpha$ -horyzontalnym o promieniu  $c$ . Zaczniemy od pokazania (2.6). Zauważmy, że (2.20) implikuje, że  $x(u_1) \neq x(u_2)$  dla dowolnych  $u_1 \neq u_2$ . Z (2.21) i z faktu, że  $f$  spełnia warunki stożka dla  $(Q_\alpha, m)$  w  $N$  dostajemy

$$\begin{aligned} Q_\alpha(\hat{h}(x_1) - \hat{h}(x_2)) &= Q_\alpha(f(h(x(u_1))) - f(h(x(u_2)))) \\ &> mQ_\alpha(h(x(u_1)) - h(x(u_2))) \\ &> 0. \end{aligned}$$

Zbiór  $f(h(\overline{B}_u))$  jest zwarty. Implikuje to, że  $\hat{h}(\overline{B}_u)$  jest ograniczony, a więc dla pewnego  $r_s > 0$  odwzorowanie  $\hat{h}$  spełnia warunek (2.12) z Lematu 2.14. Co więcej na mocy (2.20) oraz (2.21) prawdziwa jest także równość (2.13). W takim razie  $\hat{h}$  spełnia założenia Lematu 2.14 i w konsekwencji jest dyskiem  $Q_\alpha$ -horyzontalnym o promieniu  $c$ .

Metoda konstrukcji dysku  $\hat{h}$  oraz Lemat 2.12 gwarantują, że spełniony jest warunek (2.14).  $\square$

### 2.3. Szczególne przypadki transformacji dysków horyzontalnych

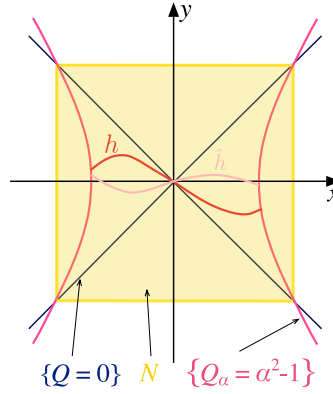
O ile są spełnione odpowiednie założenia (w szczególności jeżeli funkcja  $f$  spełnia warunki stożka dla  $Q_\alpha$  oraz  $Q$ , gdzie  $\alpha \neq 1$ ), dysk horyzontalny po transformacji może zachować również pewne dodatkowe własności. Przechodzimy teraz do wypowiedzenia i dowodu dwóch lematów dotyczących przekształceń dysków horyzontalnych przez odwzorowania spełniające pewne szczególne warunki stożka. Wyniki te zostaną przez nas wykorzystane w dowodach twierdzeń z Rozdziału 3.

**Lemat 2.16** Niech  $N = \overline{B}_u \times \overline{B}_s$  i niech  $\alpha > 1$ . Przypuśćmy, że  $h$  jest dyskiem  $Q$ -horyzontalnym w  $N$ . Załóżmy ponadto, że  $h$  jest dyskiem  $Q_\alpha$ -horyzontalnym o promieniu  $c_h = \alpha^2 - 1$  oraz, że  $h(0) = 0$ . Przypuśćmy, że odwzorowanie ciągłe  $f$  spełnia warunki stożka dla  $(Q_\alpha, m_\alpha)$  i  $(Q, m)$  w  $N$ , gdzie  $m_\alpha > 1$  i  $m > 0$  oraz, że  $f(0) = 0$ . Wówczas istnieje dysk  $Q_\alpha$ -horyzontalny  $\hat{h} : \overline{B}_u \rightarrow \mathbb{R}^{u+s}$  o promieniu  $c = c_h$ , spełniający

$$\hat{h}(\overline{B}_u) = f \circ h(\overline{B}_u) \cap \{Q_\alpha \leq c\}, \quad (2.22)$$

oraz

$$\pi_u \eta(\hat{h}(u)) = u, \quad (2.23)$$



Rysunek 2.12. Dysk  $Q$ -horyzontalny  $\hat{h}$  otrzymany z dysku  $h$  poprzez Lemat 2.16.

gdzie  $\eta$  jest zdefiniowane przez (2.9). Co więcej  $\hat{h}(0) = 0$ ,  $\hat{h}$  jest dyskiem  $Q$ -horyzontalnym w  $N$ , oraz odwzorowanie  $\hat{h}$  spełnia warunek Lipschitza ze stałą  $L = \frac{\alpha\sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha-1}$ .

*Dowód* Zauważmy, że dysk  $h$  i odwzorowanie  $f$  spełniają założenia Lematu 2.15 z  $c_h = \alpha^2 - 1$ . Niech więc  $\hat{h}$  będzie dyskiem  $Q_\alpha$ -horyzontalnym z tezy Lematu 2.15 o promieniu  $c = c_h$  (zauważmy, że nierówność  $m_\alpha > 1$  implikuje  $c_h < m_\alpha c_h$ ). Wówczas spełnione są warunki (2.22) oraz (2.23). Pozostaje wykazać, że  $\hat{h}(0) = 0$ ,  $\hat{h}$  jest dyskiem  $Q$ -horyzontalnym w  $N$  oraz, że odwzorowanie  $\hat{h}$  spełnia warunek Lipschitza ze stałą  $L$ .

Dla dowolnego  $x \in \bar{B}_u \setminus \{0\}$  mamy

$$\begin{aligned} \|\pi_x f \circ h(x)\|^2 &\geq Q(f \circ h(x)) \\ &= Q(f \circ h(x) - f \circ h(0)) \\ &\geq mQ(h(x) - h(0)) \\ &> 0. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Równość (2.22) implikuje istnienie  $x_0 \in \bar{B}_u$ , dla którego  $\hat{h}(0) = f \circ h(x_0)$ . Z drugiej strony  $\pi_x \hat{h}(0) = 0$ . Stąd  $\pi_x f \circ h(x_0) = 0$ . Na mocy (2.24) równość taka nie może być spełniona dla  $x_0 \neq 0$ , musi więc zachodzić  $x_0 = 0$ . Stąd

$$\hat{h}(0) = f \circ h(0) = f(0) = 0.$$

Ponieważ dla dowolnych  $x_1 \neq x_2$ ,  $x_1, x_2 \in \bar{B}_u$  mamy  $h(x_1), h(x_2) \in N$ , więc

$$Q(f(h(x_1)) - f(h(x_2))) > mQ(h(x_1) - h(x_2)) > 0,$$

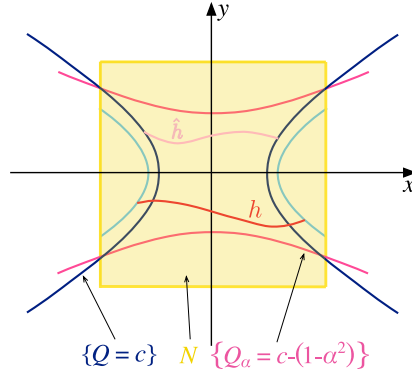
i w konsekwencji (2.22),  $\hat{h}$  jest dyskiem  $Q$ -horyzontalnym.

Pokażemy teraz, że  $\hat{h}$  jest dyskiem w  $N$ . Wiemy, że  $\hat{h}(0) = 0$  oraz  $\hat{h}$  jest dyskiem  $Q$ -horyzontalnym, skąd

$$Q(\hat{h}(x)) = Q(\hat{h}(x) - \hat{h}(0)) \geq 0, \tag{2.25}$$

dla dowolnego  $x \in \bar{B}_u$ . Z drugiej strony z tego, że  $\hat{h}$  jest dyskiem  $Q_\alpha$ -horyzontalnym o promieniu  $c = c_h = \alpha^2 - 1$  oraz na mocy Lematu 2.13, mamy

$$Q_\alpha(\hat{h}(x)) \leq \alpha^2 - 1. \tag{2.26}$$



Rysunek 2.13. Dysk  $Q$ -horyzontalny  $\hat{h}$  otrzymany z dysku  $h$  poprzez Lemat 2.17.

W takim razie w konsekwencji (2.25), (2.26) oraz Wniosku 2.5, dysk  $\hat{h}$  jest zawarty w  $N$ .

Pozostaje wykazać, że  $\hat{h}$  spełnia warunek Lipschitza ze stałą  $L$ . Zauważmy, że  $\hat{h}$  spełnia założenia Lematu 2.14 z  $r_s = 1$  oraz  $c = \alpha^2 - 1$ . Lemat ten pociąga za sobą, że  $\hat{h}$  spełnia warunek Lipschitza ze stałą

$$L = \frac{(c + r_s^2)\sqrt{1 + \alpha^2}}{\alpha(\sqrt{c + r_s^2} - r_s)} = \frac{\alpha^2\sqrt{1 + \alpha^2}}{\alpha(\alpha - 1)} = \frac{\alpha\sqrt{1 + \alpha^2}}{\alpha - 1},$$

co należało udowodnić.  $\square$

**Lemat 2.17** Niech  $N = \overline{B}_u \times \overline{B}_s$  oraz niech  $\alpha \in (0, 1)$ . Przypuśćmy, że  $h$  jest dyskiem  $Q$ -horyzontalnym w  $N$  o promieniu  $c_h \leq 1 - \alpha^2$ , spełniającym  $Q_\alpha(h(\overline{B}_u)) \geq c_h - (1 - \alpha^2)$ . Przypuśćmy, że odwzorowanie ciągłe  $f$  spełnia warunki stożka dla  $(Q_\alpha, m_\alpha)$  i  $(Q, m)$  w  $N$ , gdzie  $0 < m_\alpha, m$  oraz  $m_\alpha < 1$ , oraz że  $f(0) = 0$ . Wówczas istnieje dysk  $\hat{h} : \overline{B}_u \rightarrow \mathbb{R}^{u+s}$ ,  $Q$ -horyzontalny w  $N$  o promieniu  $c \leq 1 - \alpha^2$ , spełniający

$$\hat{h}(\overline{B}_u) = f \circ h(\overline{B}_u) \cap \{Q \leq c\}, \quad (2.27)$$

oraz

$$\pi_u \eta_{1,c}(\hat{h}(u)) = u, \quad (2.28)$$

gdzie  $\eta_{1,c}$  jest zdefiniowane przez (2.9). Co więcej  $Q_\alpha(\hat{h}(\overline{B}_u)) \geq c - (1 - \alpha^2)$ .

*Dowód* Zauważmy, że dysk  $h$  i odwzorowanie  $f$  spełniają założenia Lematu 2.15 z  $\alpha = 1$ . Niech więc  $\hat{h}$  będzie dyskiem  $Q$ -horyzontalnym z tezy Lematu 2.15 o promieniu  $c = \min\{c_h, mc_h\}$  (zauważmy, że  $\min\{c_h, mc_h\} \leq mc_h$ ). Wówczas spełnione są warunki (2.27) oraz (2.28). Ponadto

$$c = \min\{c_h, mc_h\} \leq 1 - \alpha^2.$$

Pozostaje więc wykazać, że  $Q_\alpha(\hat{h}(\overline{B}_u)) \geq c - (1 - \alpha^2)$  oraz, że  $\hat{h}$  jest dyskiem w  $N$ .

Ponieważ  $m_\alpha \in (0, 1)$ ,  $c_h < 1 - \alpha^2$ ,  $Q_\alpha(h(\overline{B}_u)) \geq c_h - (1 - \alpha^2)$ , oraz  $f$  spełnia warunki stożka dla  $(Q_\alpha, m_\alpha)$  w  $N$ , dla dowolnego  $x \in \overline{B}_u$

$$Q_\alpha(f \circ h(x)) \geq m_\alpha Q_\alpha(h(x)) \geq m_\alpha (c_h - (1 - \alpha^2)) \geq c_h - (1 - \alpha^2) \geq c - (1 - \alpha^2),$$

co na mocy (2.27) dowodzi, że  $Q_\alpha(\widehat{h}(\overline{B}_u)) \geq c - (1 - \alpha^2)$ . Z drugiej strony z tego, że  $\widehat{h}$  jest dyskiem  $Q$ -horyzontalnym o promieniu  $c$  oraz na mocy Lematu 2.13, mamy

$$Q(\widehat{h}(x)) \leq c.$$

Fakt, że  $\widehat{h}$  jest dyskiem w  $N$  jest konsekwencją nierówności  $Q_\alpha(\widehat{h}(\overline{B}_u)) \geq c - (1 - \alpha^2)$  i  $Q(\widehat{h}(\overline{B}_u)) \leq c$ , oraz Wniosku 2.6.  $\square$

## Rozmaitości silnie stabilne i silnie niestabilne dla odwzorowań

Przechodzimy teraz do zaprezentowania głównych wyników teoretycznych naszej pracy. W rozdziale tym przedstawimy twierdzenia dotyczące istnienia rozmaitości silnie stabilnych i silnie niestabilnych dla odwzorowań.

### 3.1. Podstawowe definicje

W naszej pracy zajmiemy się znajdowaniem tzw. zbiorów silnie niezmienniczych (stabilnych i niestabilnych) punktu stałego. Zbiory te są pewnymi podzbiórami zbiorów zadanych przez Definicje 1.4 i 1.5. Wprowadzenie pojęcie „silnego” zbioru ma na celu wyodrębnienie ze zbiorów stabilnych/niestabilnych tych punktów, dla których tempo zbieżności ich trajektorii do punktu stałego jest odpowiednio duże (tj. wykładnicze z dostatecznie dużym współczynnikiem zbieżności).

W rozdziale tym rozważać będziemy odwzorowanie

$$f : D \rightarrow D,$$

klasy  $C^1$ , zdefiniowane na pewnym podzbiórze otwartym  $D$  przestrzeni  $\mathbb{R}^n$ . Załóżmy, że  $f$  ma punkt stały  $p^* \in D$ .

Wprowadzimy teraz definicje zbiorów silnie niezmienniczych (stabilnych i niestabilnych) związanych z punktem stałym  $p^*$ .

**Definicja 3.1** Niech  $U \subset D$  będzie pewnym otoczeniem punktu stałego  $p^*$  odwzorowania  $f$  i niech  $0 < \mu < 1$ . *Zbiorem silnie stabilnym punktu  $p^*$  ze współczynnikiem kontrakcji  $\mu$  w otoczeniu  $U$*  nazwiemy zbiór  $W_{\mu,U}^s(p^*)$  zawierający wszystkie punkty  $p \in U$  spełniające warunki:

1. istnieje trajektoria w przód  $(p_0, p_1, p_2, \dots)$  punktu  $p$  w otoczeniu  $U$ ;
2. dla trajektorii w przód  $(p_0, p_1, p_2, \dots)$  punktu  $p$  w otoczeniu  $U$ , istnieje stała  $C > 0$ , taka że dla wszystkich  $i \in \mathbb{N}$  zachodzi nierówność

$$\|p_i - p^*\| \leq C\mu^i. \tag{3.1}$$

**Definicja 3.2** Niech  $U \subset D$  będzie pewnym otoczeniem punktu stałego  $p^*$  odwzorowania  $f$  i niech  $\mu > 1$ . *Zbiorem silnie niestabilnym punktu  $p^*$  ze współczynnikiem*

ekspansji  $\mu$  w otoczeniu  $U$  nazwiemy zbiór  $W_{\mu,U}^u(p^*)$  zawierający wszystkie punkty  $p \in U$  spełniające warunki:

1. istnieje trajektoria w tył  $(\dots, p_{-2}, p_{-1}, p_0)$  punktu  $p$  w otoczeniu  $U$ ;
2. dla dowolnej trajektorii w tył  $(\dots, p_{-2}, p_{-1}, p_0)$  punktu  $p$  w otoczeniu  $U$ , istnieje stała  $C > 0$ , taka że dla wszystkich  $i \in \mathbb{N}$  zachodzi nierówność

$$\|p_{-i} - p^*\| \leq C\mu^{-i}. \quad (3.2)$$

Zauważmy, że z Definicji 3.1 oraz 3.2 wynika, że zbiory silnie stabilne (silnie niestabilne) są podzbiorem zbiorów stabilnych (niestabilnych). Co więcej, do zbioru silnie stabilnego i zbioru silnie niestabilnego należy punkt  $p^*$ . Stąd zbiory te są zawsze niepuste.

Poniżej prezentujemy kilka przykładów zbiorów silnie stabilnych i silnie niestabilnych dla pewnych odwzorowań.

**Przykład 3.3** Niech  $f_1(x, y) = (\frac{1}{2}x, \frac{1}{3}y)$ , gdzie  $f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Zbiorem silnie stabilnym punktu  $p^* = (0, 0)$  ze współczynnikiem kontrakcji  $\frac{1}{2}$  w  $U = \mathbb{R}^2$  jest zbiór  $\mathbb{R}^2$  (zauważmy przy tym, że jest on równy zbiorowi stabilnemu), natomiast zbiorem silnie stabilnym punktu  $p^*$  ze współczynnikiem kontrakcji  $\frac{1}{3}$  w  $U$  jest zbiór  $\{0\} \times \mathbb{R}$ .

Podobnie dla  $f_2(x, y) = (2x, 3y)$ , gdzie  $f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , zbiorem silnie niestabilnym punktu  $p^* = (0, 0)$  ze współczynnikiem ekspansji 2 w  $U = \mathbb{R}^2$  jest zbiór  $\mathbb{R}^2$  (który jest równy zbiorowi niestabilnemu), natomiast zbiorem silnie niestabilnym punktu  $p^*$  ze współczynnikiem ekspansji 3 w  $U$  jest zbiór  $\{0\} \times \mathbb{R}$ .  $\square$

**Przykład 3.4** Rozważmy odwzorowanie  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  z Przykładu 2.3. Odwzorowanie to ma jeden punkt stały  $p^* = (0, 0, 0, 0)$ . Dla dowolnego otoczenia  $U$  punktu  $p^*$  zbiorem stabilnym tego punktu w  $U$  jest zbiór  $W_U^s(p^*) = U \cap (\{0\}^3 \times \mathbb{R})$ , natomiast zbiorem niestabilnym jest zbiór  $W_U^u(p^*) = U \cap (\mathbb{R} \times \{0\}^3)$ .

Zbiór  $W_U^s(p^*)$  jest również zbiorem silnie stabilnym punktu  $p^*$  ze współczynnikiem kontrakcji  $\mu$  w  $U$ , dla dowolnego  $\mu \in [b, 1)$ . Ponadto dla dowolnego  $\mu \in (0, b)$  zbiór  $W_{\mu,U}^s(p^*) = \{p^*\}$ .

Podobnie zbiór  $W_U^u(p^*)$  jest również zbiorem silnie niestabilnym punktu  $p^*$  ze współczynnikiem kontrakcji  $\mu$  w  $U$ , dla dowolnego  $\mu \in (1, a]$ . Ponadto dla dowolnego  $\mu > a$  zbiór  $W_{\mu,U}^u(p^*) = \{p^*\}$ .  $\square$

## 3.2. Twierdzenia o istnieniu rozmaitości silnie stabilnej i niestabilnej

W przypadku gdy zbiór  $W_U^s(p^*)$  (lub odpowiednio  $W_U^u(p^*)$ ) jest rozmaitością, będziemy go nazywać *rozmaitością stabilną* (odpowiednio *niestabilną*) punktu  $p^*$  w  $U$ . Podobnie wprowadzamy pojęcie *rozmaitości silnie stabilnych/silnie niestabilnych*.

W rozdziale tym zaprezentujemy twierdzenie oparte o warunki stożka, które pozwala stwierdzić, że zbiór silnie stabilny/niestabilny danego odwzorowania jest wykresem pewnej funkcji ciągłej (a więc rozmaitością) w pewnym (określonym) otoczeniu punktu stałego.

### 3.2.1. Rozmaitość silnie niestabilna

Niech dana będzie ciągła funkcja

$$f : D \rightarrow D,$$

gdzie  $D \subset \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^s = \mathbb{R}^n$  jest zbiorem otwartym. Niech  $N \subset D$  będzie dane równością (2.2). Załóżmy, że  $f$  ma punkt stały należący do wnętrza zbioru  $N$ , to znaczy

$$\exists p^* \in \text{Int}(N) : f(p^*) = p^*.$$

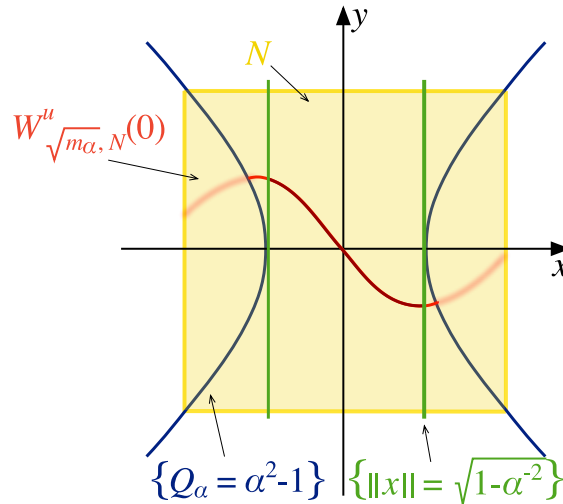
Dla uproszczenia przyjmujemy, że

$$p^* = 0,$$

jednak w Rozdziale 3.4 pokażemy w jaki sposób otrzymane przez nas wyniki można uogólnić na przypadek dowolnego  $p^*$  (zob. Twierdzenie 3.19).

Ponadto ustalmy  $\alpha > 1$ .

Przechodzimy teraz do wypowiedzenia najważniejszego wyniku tego rozdziału, tj. twierdzenia o istnieniu rozmaitości silnie niestabilnej w otoczeniu punktu stałego odwzorowania spełniającego warunki stożka.



Rysunek 3.1. Interpretacja geometryczna Twierdzenia 3.5. Część zbioru silnie niestabilnego  $W^u_{\sqrt{m_\alpha}, N}(0)$  znajdująca się w pasie  $\bar{B}_u(\sqrt{1-\alpha^{-2}}) \times \mathbb{R}^s$  jest wykresem pewnej funkcji  $y^u(x)$ .

**Twierdzenie 3.5** Niech  $N = \bar{B}_u \times \bar{B}_s$ . Niech dane będzie ciągle odwzorowanie  $f : D \rightarrow D$ , gdzie  $N \subset D \subset \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^s$ , dla którego  $f(0) = 0$ . Załóżmy, że  $\alpha > 1$ ,  $m_\alpha > m > 0$ ,  $m_\alpha > 1$  oraz przypuśćmy, że  $f$  spełnia warunki stożka dla  $(Q_\alpha, m_\alpha)$  i  $(Q, m)$  w  $N$ . Oznaczmy  $\tilde{r}_u = \sqrt{1-\alpha^{-2}}$ . Wówczas istnieje funkcja  $y^u : \bar{B}_u(\tilde{r}_u) \rightarrow \bar{B}_s$ , dla której

$$W^u_{\sqrt{m_\alpha}, N}(0) \cap (\bar{B}_u(\tilde{r}_u) \times \mathbb{R}^s) = \{(x, y^u(x)) : x \in \bar{B}_u(\tilde{r}_u)\}.$$

Co więcej,  $y^u$  spełnia warunek Lipschitza ze stałą  $L_u = 1$ .



*Dowód* Dowód twierdzenia znajduje się w dalszej części tego rozdziału, po dowodzie Twierdzenia 3.10.  $\square$

Zanim przejdziemy do dowodu Twierdzenia 3.5, przedstawimy kilka technicznych lematów, związanych z pewnymi własnościami funkcji spełniających warunki stożka. W szczególności istotne dla nas będą własności, jakie posiadają trajektorie w tył takich funkcji.

Zacznijmy od pokazania, że trajektoria w tył dowolnego punktu leżącego w przecięciu zbioru  $N$  z odpowiednim stożkiem dodatnim zbiega do punktu stałego funkcji (tj. w naszym przypadku do  $p^* = 0$ ) w tempie wykładniczym. Wskażemy również współczynnik tej zbieżności.

**Lemat 3.6** *Niech  $U = \{Q \geq 0\} \cap N$  i niech  $p \in U$ . Przypuśćmy, że  $(\dots, p_{-2}, p_{-1}, p_0)$  jest trajektorią w tył punktu  $p$  w  $U$ . Jeżeli  $f(0) = 0$  i odwzorowanie  $f$  spełnia warunki stożka dla  $(Q_\alpha, m_\alpha)$  w  $N$  z pewnym  $\alpha > 1$ , to dla  $C(p) = \sqrt{2|(\alpha^2 - 1)^{-1}Q_\alpha(p)|}$  i dowolnego  $i \in \mathbb{N}$ , zachodzi nierówność*

$$\|p_{-i}\| \leq C(p) (\sqrt{m_\alpha})^{-i}.$$

*Dowód* Niech  $p_{-i} = (x_{-i}, y_{-i})$ . Ponieważ  $\alpha > 1$  oraz  $p_{-i} \in U = \{Q \geq 0\} \cap N$ , więc

$$\alpha^2 \|x_{-i}\|^2 \geq \|x_{-i}\|^2 \geq \|y_{-i}\|^2. \quad (3.3)$$

W takim razie

$$Q_\alpha(x_{-i}, y_{-i}) = \alpha^2 \|x_{-i}\|^2 - \|y_{-i}\|^2 \geq 0,$$

co implikuje, że  $p_{-i} \in \{Q_\alpha \geq 0\}$ . Z warunków stożka dla  $(Q_\alpha, m_\alpha)$  dostajemy, że dla dowolnego  $i \in \mathbb{N}$ ,

$$Q_\alpha(p_{-i}) = Q_\alpha(f(p_{-i-1}) - f(0)) \geq m_\alpha Q_\alpha(p_{-i-1} - 0) = m_\alpha Q_\alpha(p_{-i-1}) \geq 0.$$

W konsekwencji dla dowolnego  $i \in \mathbb{N}$ ,

$$Q_\alpha(p_0) \geq m_\alpha^i Q_\alpha(p_{-i}). \quad (3.4)$$

Ponieważ  $\alpha > 1$ , więc z (3.3),

$$Q_\alpha(p_{-i}) = \alpha^2 \|x_{-i}\|^2 - \|y_{-i}\|^2 \geq (\alpha^2 - 1) \|x_{-i}\|^2 \geq (\alpha^2 - 1) \|y_{-i}\|^2,$$

skąd na mocy (3.4), nierówności  $\alpha > 1$  oraz tego, że  $Q_\alpha(p) = Q_\alpha(p_0) \geq 0$ , dla dowolnego  $i \in \mathbb{N}$  mamy

$$\begin{aligned} \|x_{-i}\|^2 + \|y_{-i}\|^2 &\leq 2(\alpha^2 - 1)^{-1} Q_\alpha(p_{-i}) \\ &\leq 2(\alpha^2 - 1)^{-1} m_\alpha^{-i} Q_\alpha(p_0) \\ &= 2|(\alpha^2 - 1)^{-1} Q_\alpha(p)| m_\alpha^{-i} \end{aligned}$$

co należało wykazać.  $\square$

Zauważmy, że w przypadku, gdy parametr  $m_\alpha$  z założenia Lematu 3.6 spełnia nierówność  $m_\alpha > 1$ , to trajektoria punktu  $p \in U$  zbiega do punktu 0 w tempie wykładniczym ze współczynnikiem zbieżności  $(\sqrt{m_\alpha})^{-1}$ . Na mocy definicji silnego zbioru niestabilnego (zob. Definicja 3.2) pociąga to więc za sobą następujący wniosek.

**Wniosek 3.7** *Niech  $U = \{Q \geq 0\} \cap N$  i niech  $p \in U$ . Przypuśćmy, że istnieje trajektoria w tył punktu  $p$  w  $U$ . Jeżeli  $f(0) = 0$  i odwzorowanie  $f$  spełnia warunki stożka dla  $(Q_\alpha, m_\alpha)$  w  $N$  z pewnymi  $\alpha > 1$  oraz  $m_\alpha > 1$ , to*

$$p \in W_{\sqrt{m_\alpha}, N}^u(0).$$

Okazuje się, że jeżeli funkcja  $f$  spełnia odpowiednie warunki stożka, to punkty z lokalnego zbioru silnie niestabilnego muszą leżeć w odpowiednich stożkach dodatnich. W konsekwencji zbiór silnie niestabilny jest wykresem pewnej funkcji. Obserwację tę formułujemy jako wniosek z kolejnego lematu.

**Lemat 3.8** *Załóżmy, że  $m_\alpha > m > 0$  oraz  $m_\alpha > 1$ . Jeżeli  $f$  spełnia warunki stożka dla  $(Q, m)$  w  $N$  i  $f(0) = 0$ , to dla dowolnych  $q, \tilde{q} \in W_{\sqrt{m_\alpha}, N}^u(0)$  takich, że  $q \neq \tilde{q}$  zachodzi nierówność*

$$Q(q - \tilde{q}) > 0. \quad (3.5)$$

*Dowód* Niech  $q, \tilde{q} \in W_{\sqrt{m_\alpha}, N}^u(0)$  będą takie, że  $q \neq \tilde{q}$ . Rozumując nie wprost załóżmy, że nierówność (3.5) nie jest spełniona. Zachodzi więc nierówność

$$Q(q - \tilde{q}) \leq 0. \quad (3.6)$$

Niech  $(\dots, q_{-1}, q_0)$  i  $(\dots, \tilde{q}_{-1}, \tilde{q}_0)$  będą trajektoriami w tył w  $N$  odpowiednio punktów  $q$  i  $\tilde{q}$ . Ponieważ  $q, \tilde{q} \in W_{\sqrt{m_\alpha}, N}^u(0)$ , więc dla dowolnego  $i \in \mathbb{N}$  spełnione są nierówności

$$\|q_{-i}\| \leq C(\sqrt{m_\alpha})^{-i}, \quad \|\tilde{q}_{-i}\| \leq C(\sqrt{m_\alpha})^{-i}, \quad (3.7)$$

gdzie  $C$  jest pewną dodatnią stałą.

Z uwagi na to, że  $q \neq \tilde{q}$ , dla dowolnego  $i \in \mathbb{N}$  mamy  $q_{-i} \neq \tilde{q}_{-i}$ . W takim razie z  $(Q, m)$ -warunków stożka oraz na mocy (3.6) dla dowolnego  $i \in \mathbb{N}$  zachodzi

$$\begin{aligned} 0 &\geq Q(q - \tilde{q}) \\ &= Q(q_0 - \tilde{q}_0) \\ &= Q(f(q_{-1}) - f(\tilde{q}_{-1})) \\ &> mQ(q_{-1} - \tilde{q}_{-1}) \\ &> \dots \\ &> m^i Q(q_{-i} - \tilde{q}_{-i}). \end{aligned}$$

Implikuje to, że dla każdego  $i \in \mathbb{N}$

$$\|q_{-i} - \tilde{q}_{-i}\|^2 \geq |Q(q_{-i} - \tilde{q}_{-i})| > m^{-i+1} |Q(q_{-1} - \tilde{q}_{-1})| > 0. \quad (3.8)$$

Ponieważ  $m_\alpha > m$ , więc (3.7) i (3.8) dają sprzeczność, co dowodzi (3.5).  $\square$

**Wniosek 3.9** *Załóżmy, że  $\alpha > 1$ ,  $m_\alpha > m > 0$  oraz  $m_\alpha > 1$ . Jeżeli  $f$  spełnia warunki stożka dla  $(Q, m)$  w  $N$  i  $f(0) = 0$ , to dla dowolnych  $q, \tilde{q} \in W_{\sqrt{m_\alpha}, N}^u(0)$  zachodzi implikacja*

$$Q_\alpha(q - \tilde{q}) \leq 0 \implies q = \tilde{q}. \quad (3.9)$$

*Dowód* Przypuśćmy, że  $q, \tilde{q} \in W_{\sqrt{m_\alpha}, N}^u(0)$  takie, że

$$Q_\alpha(q - \tilde{q}) \leq 0.$$

Zauważmy, że konsekwencją nierówności  $\alpha > 1$  jest inkluzja  $\{Q_\alpha \leq 0\} \subset \{Q \leq 0\}$ , skąd musi zachodzić

$$Q(q - \tilde{q}) \leq 0.$$

Na mocy Lematu 3.8 dostajemy więc równość  $q = \tilde{q}$ .  $\square$

Przechodzimy teraz do wypowiedzenia twierdzenia mówiącego o tym, że w przypadku odwzorowania spełniającego warunki stożka lokalny zbiór silnie niestabilny punktu stałego jest dyskiem horyzontalnym w pewnym otoczeniu tego punktu. Na bazie poniższego Twierdzenia udowodnimy przedstawiony przez nas wcześniej główny wynik tego rozdziału, tj. Twierdzenie 3.5.

**Twierdzenie 3.10** *Niech  $N = \overline{B}_u \times \overline{B}_s$ . Niech dane będzie ciągle odwzorowanie  $f : D \rightarrow D$ , gdzie  $N \subset D \subset \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^s$ , dla którego  $f(0) = 0$ . Załóżmy, że  $\alpha > 1$ ,  $m_\alpha > m > 0$ ,  $m_\alpha > 1$  oraz przypuśćmy, że  $f$  spełnia warunki stożka dla  $(Q_\alpha, m_\alpha)$  i  $(Q, m)$  w  $N$ . Wówczas istnieje dysk  $Q_\alpha$ -horyzontalny  $h^u : \overline{B}_u \rightarrow N$  o promieniu  $c = \alpha^2 - 1$ , spełniający*

$$W_{\sqrt{m_\alpha}, N}^u(0) \cap \{Q_\alpha \leq c\} = h^u(\overline{B}_u).$$

Co więcej  $h^u$  jest również dyskiem  $Q$ -horyzontalnym oraz dla dowolnego  $u \in \overline{B}_u$  spełniony jest warunek

$$\pi_u \eta(h^u(u)) = u, \quad (3.10)$$

gdzie  $\eta$  jest zdefiniowane przez (2.9).

*Dowód* Niech

$$\tilde{r}_u = \sqrt{1 - \alpha^{-2}}.$$

Pokażemy w jaki sposób skonstruować dysk  $h^u$  z tezy twierdzenia. Dysk ten będziemy chcieli otrzymać jako granicę pewnego ciągu funkcyjnego odwzorowań będących dyskami horyzontalnymi.

Zdefiniujmy odwzorowanie  $h_0 : \overline{B}_u \rightarrow N^u$ , jako  $h_0(u) = (\tilde{r}_u u, 0)$ . Wówczas  $h_0$  jest dyskiem  $Q$ -horyzontalnym w  $N$  oraz dyskiem  $Q_\alpha$ -horyzontalnym o promieniu

$$c = \alpha^2 \tilde{r}_u^2 = \alpha^2 - 1.$$

Ponadto  $h_0(0) = 0$ , co oznacza, że spełnione są założenia Lematu 2.16. Stosując Lemat 2.16 indukcyjnie, otrzymujemy ciąg dysków  $Q$ -horyzontalnych w  $N$ , będących również dyskami  $Q_\alpha$ -horyzontalnymi o promieniu  $c$ , które oznaczymy jako  $h_i$ , dla

$i \in \mathbb{N}$ . Dyski te, w świetle Lematu 2.15, dane są jako  $h_{i+1} = \widehat{h}_i$ . Ponadto dla dowolnego  $i \in \mathbb{N}$  odwzorowanie  $h_i$  spełnia warunek Lipschitza ze stałą

$$L_h = \frac{\alpha\sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha-1}.$$

Pokażemy najpierw, że ciąg funkcyjny  $\{h_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  jest zbieżny punktowo. Ustalmy  $u \in \overline{B}_u$ . Oznaczmy

$$p_i = h_i(u). \quad (3.11)$$

Z tego, że  $h_i$  jest dyskiem w  $N$  dostajemy, że  $\{p_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset N$ . Ponieważ  $N$  jest zwarty, więc aby wykazać zbieżność ciągu  $\{p_i\}$  wystarczy pokazać, że wszystkie jego podciągi zbieżne postaci  $\{p_{i_l}\}$  są zbieżne do tej samej granicy. Oznaczmy więc

$$A(u) = \left\{ q \in N : \lim_{l \rightarrow \infty} p_{i_l} = q, \text{ dla pewnego } i_l \rightarrow +\infty \right\}. \quad (3.12)$$

Obierzmy dowolne  $q \in A(u)$  i niech

$$\lim_{l \rightarrow \infty} p_{i_l} = q. \quad (3.13)$$

Pokażemy najpierw, że punkt  $q$  znajduje się w  $W_{\sqrt{m_\alpha}, N}^u(0)$ .

Zacniemy od pokazania, że istnieje trajektoria w tył  $(\dots, q_{-1}, q_0)$  punktu  $q$  w  $\{Q \geq 0\} \cap N$ . Na mocy Lematu 1.3 wystarczy pokazać, że dla dowolnego  $i \in \mathbb{N}$  istnieje  $q_{-i}$  takie, że  $f^k(q_{-i}) \in \{Q \geq 0\} \cap N$  dla  $k = 0, \dots, i$  oraz  $f^i(q_{-i}) = q$ . Ustalmy  $i \in \mathbb{N}$ . Pierwszym krokiem będzie wykazanie, że istnieje skończona trajektoria w tył  $(p_{i,-i}, \dots, p_{i,-1}, p_{i,0})$  punktu  $p_i$  (zdefiniowanego przez nas wcześniej równością (3.11)) w zbiorze  $\{Q \geq 0\} \cap N$ . Połóżmy  $p_{i,0} = p_i$ . Ponieważ

$$p_i \in h_i(\overline{B}_u) = f(h_{i-1}(\overline{B}_u)) \cap \{Q_\alpha \leq c\},$$

widzimy, że  $p_i = f(p_{i,-1})$ , dla pewnego  $p_{i,-1} \in h_{i-1}(\overline{B}_u)$ . Z tego, że  $h_{i-1}$  jest dyskiem  $Q$ -horyzontalnym w  $N$  oraz z tego, że  $h_{i-1}(0) = 0$ , dostajemy  $p_{i,-1} \in h_{i-1}(\overline{B}_u) \subset \{Q \geq 0\} \cap N$ . Podobnie, z uwagi na to, że

$$p_{i,-1} \in h_{i-1}(\overline{B}_u) = f(h_{i-2}(\overline{B}_u)) \cap \{Q_\alpha \leq c\},$$

otrzymujemy punkt  $p_{i,-2} \in h_{i-2}(\overline{B}_u) \subset \{Q \geq 0\} \cap N$ , dla którego  $f(p_{i,-2}) = p_{i,-1}$ . Postępując indukcyjnie otrzymamy szukaną trajektorię  $(p_{i,-i}, \dots, p_{i,-1}, p_{i,0})$  punktu  $p_i$  w zbiorze  $\{Q \geq 0\} \cap N$ . Rozważmy teraz podciąg  $p_{i_l, -i}$  ze względu na  $l$ , gdzie  $i_l \rightarrow +\infty$  jest podciągami wybranym przez (3.13). Ponieważ  $\{Q \geq 0\} \cap N$  jest zwarty, istnieje podciąg  $p_{i_{l_m}, -i}$  zbieżny do pewnego punktu. Oznaczmy jego granicę przez  $q_{-i}$ , tj.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} p_{i_{l_m}, -i} = q_{-i}.$$

Z ciągłości  $f$  dostajemy, że dla  $k = 0, 1, \dots, i$

$$f^k(q_{-i}) = \lim_{m \rightarrow \infty} f^k(p_{i_{l_m}, -i}) \in \{Q \geq 0\} \cap N,$$

oraz

$$f^i(q_{-i}) = \lim_{m \rightarrow \infty} f^i(p_{i_m, -i}) = \lim_{m \rightarrow \infty} p_{i_m} = q,$$

co kończy nasze starania związane z udowodnieniem istnienia  $q_{-i}$ . Pokazaliśmy więc, że istnieje trajektoria w tył punktu  $q$  w  $\{Q \geq 0\} \cap N$ .

Ponieważ  $q$  posiada trajektorię w tył do 0 w  $\{Q \geq 0\} \cap N$ , więc na mocy Wniosku 3.7 dostajemy, że  $q \in W_{\sqrt{m_\alpha}, N}^u(0)$ .

Pokażemy teraz, że zbiór  $A(u)$  jest jednoelementowy. Niech  $\eta$  będzie zadane przez (2.9). Zauważmy, że wówczas dla dowolnego  $i \in \mathbb{N}$  prawdziwa jest równość

$$\pi_u \eta(h_i(u)) = (u, \pi_y h_i(u)).$$

Istotnie, dla  $i = 0$  równość ta jest konsekwencją definicji dysku  $h_0$  oraz postaci (2.9) funkcji  $\eta$ , natomiast dla  $i > 0$  jest ona prawdziwa na mocy (2.23). W takim razie

$$h_i(u) = \eta^{-1}(u, \pi_y h_i(u)). \quad (3.14)$$

Niech teraz  $q, \tilde{q} \in A(u)$ . Pokazaliśmy, że wówczas  $q, \tilde{q}$  leżą w  $W_{\sqrt{m_\alpha}, N}^u(0)$ . Z drugiej strony z definicji  $p_i$  (zob. (3.11)) oraz na mocy (3.14) mamy

$$q = \eta^{-1}(u, \pi_y q), \quad \tilde{q} = \eta^{-1}(u, \pi_y \tilde{q}) \quad (3.15)$$

Z własności (2.11) z Lematu 2.12 dostajemy więc

$$Q_\alpha(q - \tilde{q}) \leq 0.$$

W takim razie na mocy Wniosku 3.9 zachodzi równość  $q = \tilde{q}$ . Tak więc zbiór  $A(u)$  jest jednoelementowy, a ciąg  $\{h_i\}$  jest zbieżny punktowo. Możemy więc zdefiniować odwzorowanie  $h^u : \bar{B}_u \rightarrow N$  jako

$$h^u(u) = \lim_{i \rightarrow +\infty} h_i(u).$$

Zauważmy przy tym, że wykazaliśmy inkluzję

$$h^u(\bar{B}_u) \subset W_{\sqrt{m_\alpha}, N}^u(0) \cap \{Q_\alpha \leq c\}. \quad (3.16)$$

Ponadto, na mocy (3.14), dla dowolnego  $u$  odwzorowanie  $h^u$  spełnia warunek (3.10). Pokażemy teraz, że  $h^u$  jest dyskiem  $Q_\alpha$ -horyzontalnym o promieniu  $c$  oraz dyskiem  $Q$ -horyzontalnym.

Zauważmy, że z uwagi na to, że odwzorowania  $h_i$  są równociągłe (jako odwzorowania spełniające warunek Lipschitza z tą samą stałą  $L_h$ ), na mocy Twierdzenia Arzeli-Ascolego ciąg  $\{h_i\}$  jest zbieżny jednostajnie do  $h^u$ . W szczególności implikuje to, że  $h^u$  jest ciągłe.

Niech teraz  $u_1, u_2 \in \bar{B}_u$  będą takie, że  $u_1 \neq u_2$ . Zauważmy, że równość (3.14) implikuje, że  $h^u(u_1) \neq h^u(u_2)$ . Ponadto z faktu, że  $\alpha > 1$  mamy

$$Q_\alpha(h^u(u_1) - h^u(u_2)) \geq Q(h^u(u_1) - h^u(u_2)).$$

Ponieważ  $h^u(u_1), h^u(u_2) \in W_{\sqrt{m_\alpha}, N}^u(0)$  oraz  $h^u(u_1) \neq h^u(u_2)$ , więc na mocy Lematu 3.8 mamy

$$Q(h^u(u_1) - h^u(u_2)) > 0.$$

W takim razie  $h^u$  jest dyskiem  $Q$ -horyzontalnym i  $Q_\alpha$ -horyzontalnym. Fakt, że  $h^u$  jest dyskiem  $Q_\alpha$ -horyzontalnym o promieniu  $c$  wynika z tego, że  $h_i$  jest takim dyskiem dla dowolnego  $i \in \mathbb{N}$ .

Pozostało wykazać, że

$$W_{\sqrt{m_\alpha}, N}^u(0) \cap \{Q \leq c\} \subset h^u(\overline{B}_u). \quad (3.17)$$

Weźmy dowolne  $p \in W_{\sqrt{m_\alpha}, N}^u(0) \cap \{Q \leq c\}$ . Wówczas, na mocy równości (2.10) z Lematu 2.12, dla pewnego  $u \in \overline{B}_u$  mamy

$$p = \eta^{-1}(u, \pi_y p).$$

Oznaczając

$$q = h^u(u),$$

w konsekwencji (3.14) dostajemy

$$q = \eta^{-1}(u, \pi_y q).$$

W takim razie korzystając z własności (2.11) z Lematu 2.12

$$Q_\alpha(p - q) \leq 0.$$

Z drugiej strony  $p, q \in W_{\sqrt{m_\alpha}, N}^u(0)$ , tak więc Wniosek 3.9 pociąga za sobą równość  $p = q$ . Pokazaliśmy więc, że  $p \in h^u(\overline{B}_u)$ , co implikuje inkluzję (3.17).  $\square$

*Dowód (Twierdzenia 3.5)* Pokażemy w jaki sposób skonstruować funkcję  $y^u$  z tezy Twierdzenia 3.5. Niech  $h^u$  będzie dyskiem horyzontalnym z tezy Twierdzenia 3.10. Wówczas  $h^u$  jest dyskiem  $Q$ -horyzontalnym w  $N$  oraz dyskiem  $Q_\alpha$ -horyzontalnym o promieniu  $c = \alpha^2 - 1 = \alpha^2 \tilde{r}_u^2$ , gdzie

$$\tilde{r}_u = \sqrt{1 - \alpha^{-2}}.$$

Ustalmy  $x \in \overline{B}_u(\tilde{r}_u)$ . Zauważmy, że z tego, że  $\sqrt{c} = \alpha \tilde{r}_u$  oraz na mocy Lematu 2.11, istnieje jednoznacznie wyznaczone  $u(x) \in \overline{B}_u$ , dla którego

$$\pi_x h^u(u(x)) = x.$$

Ponieważ  $\{Q_\alpha \leq \alpha^2 \tilde{r}_u^2\} \supset (\overline{B}_u(\tilde{r}_u) \times \mathbb{R}^s)$ , więc na mocy Twierdzenia 3.10

$$\begin{aligned} W_{\sqrt{m_\alpha}, N}^u(0) \cap (\overline{B}_u(\tilde{r}_u) \times \mathbb{R}^s) &= h^u(\overline{B}_u) \cap (\overline{B}_u(\tilde{r}_u) \times \mathbb{R}^s) \\ &= \{(x, \pi_y h^u(u(x))) : x \in \overline{B}_u(\tilde{r}_u)\} \end{aligned}$$

W takim razie możemy zdefiniować funkcję  $y^u$  jako

$$y^u(x) = \pi_y h^u(u(x)).$$

Pozostało wykazać, że  $y^u$  spełnia warunek Lipschitza. Obierzmy dowolne  $x_1, x_2 \in \overline{B}_u(\tilde{r}_u)$ . Ponieważ  $h^u$  jest dyskiem  $Q$ -horyzontalnym, więc

$$Q(h^u(u(x_1)) - h^u(u(x_2))) \geq 0.$$

W konsekwencji powyższego

$$\|x_1 - x_2\|^2 - \|y^u(x_1) - y^u(x_2)\|^2 \geq 0,$$

co dowodzi, że  $y^u$  spełnia warunek Lipschitza ze stałą  $L_u = 1$ .  $\square$

Poniżej prezentujemy jeszcze jeden wniosek z Twierdzenia 3.5. Wniosek ten będzie miał kluczowe znaczenie w późniejszym dowodzie analogicznego twierdzenia dla układów generowanych przez równania różniczkowe.

**Wniosek 3.11** *Niech funkcja  $f$  spełnia założenia Twierdzenia 3.5. Wówczas dla dowolnego punktu  $p \in W_{\sqrt{m_\alpha}, N}^u(0) \cap (\overline{B}_u(\tilde{r}_u) \times \mathbb{R}^s)$  i dowolnej trajektorii w tył  $(\dots, p_{-1}, p_0)$  tego punktu w  $N$  zachodzi*

$$\|p_{-i}\| \leq \sqrt{2}(\sqrt{m_\alpha})^{-i} \quad (3.18)$$

dla każdego  $i \in \mathbb{N}$ .

*Dowód* Niech  $p \in W_{\sqrt{m_\alpha}, N}^u(0) \cap (\overline{B}_u(\tilde{r}_u) \times \mathbb{R}^s)$  i niech  $(\dots, p_{-1}, p_0)$  będzie trajekcją w tył punktu  $p$  w  $N$ . Ustalmy  $i \in \mathbb{N}$ . Z definicji zbioru silnie niestabilnego dostajemy  $p_{-i} \in W_{\sqrt{m_\alpha}, N}^u(0)$ . Pokażemy teraz, że

$$p_{-i} \in \{Q \geq 0\}. \quad (3.19)$$

Zauważmy, że z definicji zbioru silnie niestabilnego, dla dostatecznie dużego  $i_0 \in \mathbb{N}$  mamy

$$p_{-i-i_0} \in (\overline{B}_u(\tilde{r}_u) \times \mathbb{R}^s).$$

Korzystając z Twierdzenia 3.5 istnieje  $x_0 \in \overline{B}_u(\tilde{r}_u)$ , dla którego

$$p_{-i-i_0} = (x_0, y^u(x_0)).$$

Ponieważ  $y^u$  spełnia warunek Lipschitza ze stałą 1 oraz  $y^u(0) = 0$ , więc

$$Q(p_{-i-i_0}) = Q(p_{-i-i_0} - 0) = \|x_0 - 0\|^2 - \|y^u(x_0) - y^u(0)\|^2 \geq 0.$$

Korzystając z faktu, że 0 jest punktem stałym odwzorowania  $f$ ,  $(Q, m)$  warunków stożka, oraz tego, że  $(p_{-i})_{i=+\infty}^0 \subset N$  mamy więc

$$0 \leq Q(p_{-i-i_0}) \leq m^{-1}Q(f(p_{-i-i_0})) = m^{-1}Q(p_{-i-i_0+1}) \leq \dots \leq m^{-i_0}Q(p_{-i}).$$

Pokazuje to (3.19). W takim razie punkt  $p$  oraz jego trajektorie w tył  $(\dots, p_{-2}, p_{-1}, p_0)$  spełniają założenia Lematu 3.6. W konsekwencji

$$\|p_{-i}\| \leq \sqrt{2|(\alpha^2 - 1)^{-1}Q_\alpha(p)|} (\sqrt{m_\alpha})^{-i}. \quad (3.20)$$

Inkluzja (3.19) jest spełniona dla dowolnego  $i \in \mathbb{N}$ , w szczególności  $0 \leq Q_\alpha(p_0) = Q_\alpha(p)$ . Korzystając z tego, nierówności  $\alpha > 1$  oraz z faktu, że  $\pi_x(p) \in \overline{B}_u(\tilde{r}_u)$  mamy

$$0 \leq Q(p) \leq Q_\alpha(p) \leq \alpha^2 \|\pi_x(p)\|^2 \leq \alpha^2 \tilde{r}_u^2 = \alpha^2(1 - \alpha^{-2}) = \alpha^2 - 1.$$

Z powyższego, na mocy (3.20) dostajemy (3.18).  $\square$

### 3.2.2. Rozmaitość silnie stabilna

Niech dana będzie ciągła funkcja

$$f : D \rightarrow D,$$

gdzie  $D \subset \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^s = \mathbb{R}^n$  jest zbiorem otwartym. Niech  $N \subset D$  będzie dane równością (2.2). Załóżmy, że  $f$  ma punkt stały należący do wnętrza zbioru  $N$ , to znaczy

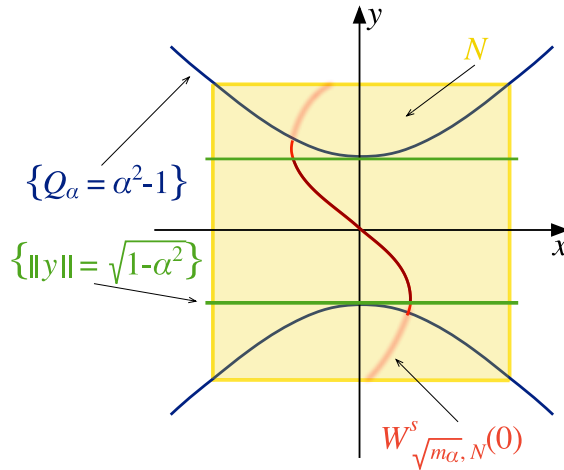
$$\exists p^* \in \text{Int}(N) : f(p^*) = p^*.$$

Podobnie jak w poprzednim rozdziale, dla uproszczenia przyjmijmy, że

$$p^* = 0.$$

Ponadto ustalmy  $\alpha \in (0, 1)$ .

Przejdźmy teraz do wypowiedzenia twierdzenia dotyczącego istnienia rozmaitości silnie stabilnej dla odwzorowania spełniającego warunki stożka.



Rysunek 3.2. Interpretacja geometryczna Twierdzenia 3.12. Część zbioru silnie stabilnego  $W^s_{\sqrt{m_\alpha}, N}(0)$  znajdująca się w pasie  $\mathbb{R}^u \times \overline{B}_s(\sqrt{1 - \alpha^2})$  jest wykresem pewnej funkcji  $x^s(y)$ .

**Twierdzenie 3.12** Niech  $N = \overline{B}_u \times \overline{B}_s$  oraz niech  $\alpha \in (0, 1)$ . Niech dane będzie ciągle odwzorowanie  $f : D \rightarrow D$ , gdzie  $N \subset D \subset \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^s$ , dla którego  $f(0) = 0$ . Załóżmy, że  $m > m_\alpha > 0$ ,  $m_\alpha < 1$ . Oznaczmy  $\tilde{r}_s = \sqrt{1 - \alpha^2}$ . Jeżeli  $f$  spełnia warunki stożka dla  $(Q_\alpha, m_\alpha)$  i  $(Q, m)$  w  $N$ , to istnieje funkcja  $x^s : \overline{B}_s(\tilde{r}_s) \rightarrow \overline{B}_u$ , dla której

$$W^s_{\sqrt{m_\alpha}, N}(0) \cap (\mathbb{R}^u \times \overline{B}_s(\tilde{r}_s)) = \{(x^s(y), y) : y \in \overline{B}_s(\tilde{r}_s)\}.$$

Co więcej,  $x^s$  spełnia warunek Lipschitza ze stałą  $L_s = 1$ .

*Dowód* Dowód twierdzenia znajduje się na końcu tego rozdziału, po dowodzie Wniosku 3.16. □



Zanim przejdziemy do dowodu Twierdzenia 3.12, przedstawimy wyniki analogiczne do wyników z poprzedniego rozdziału, dotyczące tym razem zachowania trajektorii w przód funkcji spełniającej warunki stożka.

Zacznijemy od pokazania, że trajektoria w przód dowolnego punktu leżącego w przecięciu zbioru  $N$  z odpowiednim stożkiem ujemnym zbiega do punktu stałego funkcji (tj. w naszym przypadku do  $p^* = 0$ ) w tempie wykładniczym. Wskażemy również współczynnik tej zbieżności.

**Lemat 3.13** *Niech  $U = \{Q \leq 0\} \cap N$  i niech  $p \in U$ . Przypuśćmy, że  $(p_0, p_1, p_2, \dots)$  jest trajektorią w przód punktu  $p$  w  $U$ . Jeżeli  $f(0) = 0$  i odwzorowanie  $f$  spełnia warunki stożka dla  $(Q_\alpha, m_\alpha)$  w  $N$  z pewnym  $\alpha \in (0, 1)$ , to dla  $C(p) = \sqrt{2 |(\alpha^2 - 1)^{-1} Q_\alpha(p)|}$  i dowolnego  $i \in \mathbb{N}$ , zachodzi nierówność*

$$\|p_i\| \leq C(p) (\sqrt{m_\alpha})^i.$$

*Dowód* Dowód przebiega analogicznie do dowodu Lematu 3.6.

Niech  $p_i = (x_i, y_i)$ . Ponieważ  $\alpha \in (0, 1)$  oraz  $p_i \in U = \{Q \leq 0\} \cap N$ , więc

$$\alpha^2 \|x_i\|^2 \leq \|x_i\|^2 \leq \|y_i\|^2. \quad (3.21)$$

W takim razie

$$Q_\alpha(x_i, y_i) = \alpha^2 \|x_i\|^2 - \|y_i\|^2 \leq 0,$$

co implikuje, że  $p_i \in \{Q_\alpha \leq 0\}$ . Z warunków stożka dla  $(Q_\alpha, m_\alpha)$  dostajemy, że dla dowolnego  $i \in \mathbb{N}$ ,

$$0 \geq Q_\alpha(p_i) = Q_\alpha(f(p_{i-1}) - f(0)) \geq m_\alpha Q_\alpha(p_{i-1} - 0) = m_\alpha Q_\alpha(p_{i-1}).$$

W konsekwencji dla dowolnego  $i \in \mathbb{N}$ ,

$$m_\alpha^i Q_\alpha(p_0) \leq Q_\alpha(p_i). \quad (3.22)$$

Ponieważ  $\alpha \in (0, 1)$ , więc z (3.21),

$$Q_\alpha(p_i) = \alpha^2 \|x_i\|^2 - \|y_i\|^2 \leq (\alpha^2 - 1) \|y_i\|^2 \leq (\alpha^2 - 1) \|x_i\|^2,$$

skąd na mocy (3.22), nierówności  $\alpha < 1$  oraz tego, że  $Q_\alpha(p) = Q_\alpha(p_0) \leq 0$ , dla dowolnego  $i \in \mathbb{N}$  mamy

$$\begin{aligned} \|x_i\|^2 + \|y_i\|^2 &\leq 2(\alpha^2 - 1)^{-1} Q_\alpha(p_i) \\ &\leq 2(\alpha^2 - 1)^{-1} m_\alpha^i Q_\alpha(p_0) \\ &= 2 |(\alpha^2 - 1)^{-1} Q_\alpha(p)| m_\alpha^i, \end{aligned} \quad (3.23)$$

□

co należało wykazać.

Zauważmy, że w przypadku, gdy parametr  $m_\alpha$  z założenia Lematu 3.13 spełnia nierówność  $m_\alpha < 1$ , to trajektoria punktu  $p \in U$  zbiega do punktu 0 w tempie wykładniczym ze współczynnikami zbieżności  $(\sqrt{m_\alpha})$ . Lemat 3.13 oraz definicja silnego zbioru stabilnego (zob. Definicja 3.1) pociągają więc za sobą następujący wniosek.

**Wniosek 3.14** Niech  $U = \{Q \leq 0\} \cap N$  i niech  $p \in U$ . Przypuśćmy, że istnieje trajektoria w przód punktu  $p$  w  $U$ . Jeżeli  $f(0) = 0$  i odwzorowanie  $f$  spełnia warunki stożka dla  $(Q_\alpha, m_\alpha)$  w  $N$  z pewnymi  $\alpha \in (0, 1)$  oraz  $m_\alpha < 1$ , to

$$p \in W_{\sqrt{m_\alpha}, N}^s(0).$$

Okazuje się, że jeżeli funkcja  $f$  spełnia odpowiednie warunki stożka, to punkty z lokalnego zbioru silnie stabilnego muszą leżeć w odpowiednich stożkach ujemnych. W konsekwencji zbiór silnie stabilny jest wykresem pewnej funkcji. Obserwację tę formułujemy jako wniosek z kolejnego lematu.

**Lemat 3.15** Załóżmy, że  $m > m_\alpha > 0$  oraz  $m_\alpha < 1$ . Jeżeli  $f$  spełnia warunki stożka dla  $(Q, m)$  w  $N$  i  $f(0) = 0$ , to dla dowolnych  $q, \tilde{q} \in W_{\sqrt{m_\alpha}, N}^s(0)$  takich, że  $q \neq \tilde{q}$  zachodzi nierówność

$$Q(q - \tilde{q}) < 0 \quad (3.24)$$

*Dowód* Dowód przebiega analogicznie do dowodu Lematu 3.8.

Niech  $q, \tilde{q} \in W_{\sqrt{m_\alpha}, N}^s(0)$  będą takie, że  $q \neq \tilde{q}$ . Rozumując nie wprost załóżmy, że nierówność (3.24) nie jest spełniona. Zachodzi więc nierówność

$$Q(q - \tilde{q}) \geq 0. \quad (3.25)$$

Niech  $(q_0, q_1, \dots)$  i  $(\tilde{q}_0, \tilde{q}_1, \dots)$  będą trajektoriami w przód w  $N$  odpowiednio punktów  $q$  i  $\tilde{q}$ . Ponieważ  $q, \tilde{q} \in W_{\sqrt{m_\alpha}, N}^s$ , więc dla dowolnego  $i \in \mathbb{N}$  spełnione są nierówności

$$\|q_i\| \leq C(\sqrt{m_\alpha})^i, \quad \|\tilde{q}_i\| \leq C(\sqrt{m_\alpha})^i, \quad (3.26)$$

gdzie  $C$  jest pewną dodatnią stałą.

Z uwagi na to, że  $q \neq \tilde{q}$ , dla dowolnego  $i \in \mathbb{N}$  mamy  $q_i \neq \tilde{q}_i$ . W takim razie z  $(Q, m)$ -warunków stożka oraz na mocy (3.25) dla dowolnego  $i \in \mathbb{N}$  zachodzi

$$\begin{aligned} 0 &\leq Q(q - \tilde{q}) \\ &= Q(q_0 - \tilde{q}_0) \\ &< m^{-1}Q(f(q_0) - f(\tilde{q}_0)) \\ &= m^{-1}Q(q_1 - \tilde{q}_1) \\ &< \dots \\ &< m^{-i}Q(q_i - \tilde{q}_i). \end{aligned}$$

Z powyższego dostajemy, że dla każdego  $i \in \mathbb{N}$

$$\|q_i - \tilde{q}_i\|^2 \geq |Q(q_i - \tilde{q}_i)| > m^{i-1} |Q(q_1 - \tilde{q}_1)| > 0. \quad (3.27)$$

Ponieważ  $m > m_\alpha$ , więc (3.26) i (3.27) dają sprzeczność, co dowodzi (3.24).  $\square$

**Wniosek 3.16** Załóżmy, że  $m > m_\alpha > 0$  oraz  $m_\alpha < 1$ . Jeżeli  $f$  spełnia warunki stożka dla  $(Q, m)$  w  $N$  i  $f(0) = 0$ , to dla dowolnych  $q, \tilde{q} \in W_{\sqrt{m_\alpha}, N}^s(0)$  zachodzi implikacja

$$\pi_y q = \pi_y \tilde{q} \implies q = \tilde{q}. \quad (3.28)$$

*Dowód* Niech  $\pi_y q = \pi_y \tilde{q}$  dla  $q, \tilde{q} \in W_{\sqrt{m_\alpha}, N}^s(0)$ . Na mocy Lematu 3.15

$$0 \geq Q(q - \tilde{q}) = \|\pi_x(q - \tilde{q})\|^2 - \|\pi_y(q - \tilde{q})\|^2 = \|\pi_x(q - \tilde{q})\|^2$$

Stąd musi zachodzić  $\pi_x q = \pi_x \tilde{q}$ , co prowadzi do tezy.  $\square$

Przechodzimy teraz do dowodu Twierdzenia 3.12.

*Dowód (Twierdzenia 3.12)* Pokażemy w jaki sposób skonstruować funkcję  $x^s$  z Twierdzenia 3.12. Niech

$$\tilde{r}_s = \sqrt{1 - \alpha^2}.$$

Ustalmy  $y_0$  takie, że  $\|y_0\| < \tilde{r}_s$ . Zdefiniujmy odwzorowanie  $h_0 : \overline{B_u} \rightarrow N$ , jako

$$h_0(x) = (\tilde{r}_s x, y_0). \quad (3.29)$$

Wówczas  $h_0$  jest dyskiem  $Q$ -horyzontalnym w  $N$  o promieniu

$$c = \tilde{r}_s^2 - \|y_0\|^2 \leq \tilde{r}_s^2 = 1 - \alpha^2.$$

Ponadto, dla dowolnego  $x \in \overline{B_u}$

$$Q_\alpha(h_0(x)) \geq -\|y_0\|^2 = (\tilde{r}_s^2 - \|y_0\|^2) - \tilde{r}_s^2 = c - (1 - \alpha^2),$$

co oznacza, że spełnione są założenia Lematu 2.17. Stosując Lemat 2.17 indukcyjnie, otrzymujemy ciąg dysków  $Q$ -horyzontalnych w  $N$ , które oznaczmy przez  $h_i$ , dla  $i = 0, 1, \dots$ . Dyski te dane są równością  $h_{i+1} = \widehat{h}_i$  w konwencji Lematu 2.15.

Korzystając z powyższej konstrukcji pokażemy, że dla dowolnego punktu  $y_0 \in B_s(\tilde{r}_s)$  istnieje jednoznacznie wyznaczony punkt  $q \in W_{\sqrt{m_\alpha}, N}^s(0)$  spełniający  $\pi_y q = y_0$ . Poszukiwany punkt  $q$  będzie przy tym postaci  $h_0(x)$  dla pewnego  $x \in \overline{B_u}$ .

Dla dowolnego  $i \in \mathbb{N}$  oznaczmy

$$p_{i,i} = h_i(0).$$

Zauważmy, że wprost z definicji dysku horyzontalnego dostajemy warunek

$$\pi_x p_{i,i} = 0. \quad (3.30)$$

Nasza konstrukcja implikuje, że istnieje  $p_{i,i-1} \in h_{i-1}(\overline{B_u}) \subset N$ , dla którego

$$p_{i,i} = f(p_{i,i-1}).$$

W takim razie na mocy (3.30) oraz z tego, że  $f$  spełnia warunki stożka dla  $(Q, m)$  i  $f(0) = 0$ , mamy

$$0 \geq Q(p_{i,i}) = Q(f(p_{i,i-1})) \geq mQ(p_{i,i-1}).$$

W konsekwencji  $p_{i,i-1} \in \{Q \leq 0\}$ . Rozumując indukcyjnie dostajemy, że istnieje trajektoria w tył  $(p_{i,i}, p_{i,i-1}, p_{i,i-2}, \dots, p_{i,0})$  punktu  $p_{i,i}$ , taka, że dla dowolnego  $k = 0, 1, \dots, i$

$$p_{i,i-k} \in h_{i-k}(\overline{B_u}) \cap \{Q \leq 0\} \subset N \cap \{Q \leq 0\}, \quad (3.31)$$

Ciąg  $(p_{i,0}, p_{i,1}, \dots, p_{i,i})$  jest więc trajektorią w przód punktu  $p_i = p_{i,0}$  w  $N \cap \{Q \leq 0\}$ . Zauważmy przy tym, że  $p_i \in h_0(\overline{B}_u)$ .

Z tego, że  $h_0(\overline{B}_u)$  jest zwarty, dostajemy, że zbiór

$$A(y_0) = \left\{ q \in h_0(\overline{B}_u) : \lim_{l \rightarrow \infty} p_{i_l} = q, \text{ dla pewnego } i_l \rightarrow +\infty \right\}. \quad (3.32)$$

jest niepusty. Weźmy więc  $q \in A(y_0)$  i niech

$$\lim_{l \rightarrow \infty} p_{i_l} = q. \quad (3.33)$$

Pokażemy, że punkt  $q$  znajduje się w  $W_{\sqrt{m_\alpha}, N}^s(0)$ . Dla dowolnego  $i \in \mathbb{N}$  niech  $q_i = f^i(q)$ . Wówczas na mocy (3.33), ciągłości  $f$ , inkluzji (3.31) oraz zwartości zbioru  $N \cap \{Q \leq 0\}$ ,

$$q_i = f^i(\lim_{l \rightarrow +\infty} p_{i_l}) = \lim_{l \rightarrow +\infty} f^i(p_{i_l}) = \lim_{l \rightarrow +\infty} p_{i_l, i} \in N \cap \{Q \leq 0\}.$$

Widzimy więc, że  $(q_0, q_1, \dots)$  jest trajektorią w przód punktu  $q$  w  $N \cap \{Q \leq 0\}$ . Na mocy Wniosku 3.14 punkt  $q$  leży więc w  $W_{\sqrt{m_\alpha}, N}^s(0)$ .

Pokażemy teraz, że zbiór  $A(y_0)$  jest jednoelementowy. Niech  $q, \tilde{q} \in A(y_0)$ . Pokażaliśmy, że wówczas  $q, \tilde{q}$  leżą w  $W_{\sqrt{m_\alpha}, N}^s(0)$ . Z drugiej strony ponieważ  $A(y_0) \subset h_0(\overline{B}_u)$ , więc na mocy (3.29),

$$\pi_y q = \pi_y \tilde{q} = y_0. \quad (3.34)$$

W takim razie z uwagi na to, że  $f$  spełnia warunki stożka dla  $(Q, m)$ , gdzie  $m > m_\alpha$ , na mocy Wniosku 3.16 zachodzi równość  $q = \tilde{q}$ . Możemy więc zdefiniować funkcję  $x^s$  jako

$$x^s(y_0) = \pi_x q(y_0),$$

gdzie  $\{q(y_0)\} = A(y_0)$ . Zauważmy, że wówczas  $(x^s(y_0), y_0) \in \overline{B}_u \times B_s(\tilde{r}_s)$ .

Pokażemy teraz, że  $x^s$  spełnia warunek Lipschitza. Obierzmy dowolne  $y_1, y_2 \in \overline{B}_s(\tilde{r}_s)$ . Korzystając z tego, że  $f$  spełnia warunki stożka dla  $(Q, m)$ , gdzie  $m > m_\alpha$ , z Lematu 3.15 dostajemy

$$Q(q(y_1) - q(y_2)) \leq 0.$$

W konsekwencji powyższego

$$\|x^s(y_1) - x^s(y_2)\|^2 - \|y_1 - y_2\|^2 \leq 0,$$

co dowodzi, że  $x^s$  spełnia warunek Lipschitza ze stałą  $L_s = 1$ .

Funkcja  $x^s$  została przez nas zdefiniowana na kuli otwartej  $B_s(\tilde{r}_s)$ . Rozważmy jej przedłużenie ciągłe na kulę domkniętą  $\overline{B}_s(\tilde{r}_s)$  (przedłużenie takie istnieje z uwagi na jednostajną ciągłość  $x^s$ ).

Niech więc teraz  $y_0 \in \partial B_s(\tilde{r}_s)$  i niech  $p = (x^s(y_0), y_0)$ . Pozostało wykazać, że  $p \in W_{\sqrt{m_\alpha}, N}^s(0)$ , oraz dla dowolnego  $\tilde{p} \in W_{\sqrt{m_\alpha}, N}^s(0)$  równość  $\pi_y \tilde{p} = \pi_y p$  pociąga za sobą  $\tilde{p} = p$ . Zauważmy, że ciąg  $(p_i)_{i=0}^{+\infty}$  dany jako

$$p_i = f^i(p) = f^i \left( \lim_{\substack{y \rightarrow y_0 \\ y \in B_s(\tilde{r}_s)}} (x^s(y), y) \right),$$

jest trajektorią w przód punktu  $p$ . Co więcej z uwagi na ciągłość  $f$  mamy

$$p_i = \lim_{\substack{y \rightarrow y_0 \\ y \in B_s(\tilde{r}_s)}} f^i(x^s(y), y).$$

Ponieważ dla dowolnego  $y \in B_s(\tilde{r}_s)$  punkt  $(x^s(y), y)$  leży w  $W_{\sqrt{m_\alpha}, N}^s(0)$ , więc również jego trajektoria w przód leży w  $W_{\sqrt{m_\alpha}, N}^s(0)$ . W takim razie na mocy Lematu 3.15 mamy

$$Q(f^i(x^s(y), y)) = Q(f^i(x^s(y), y) - 0) \leq 0.$$

Stąd

$$f^i(x^s(y), y) \in N \cap \{Q \leq 0\}.$$

Zwartość zbioru  $N \cap \{Q \leq 0\}$  pociąga więc za sobą inkluzję  $p_i \in N \cap \{Q \leq 0\}$ . W takim razie z Wniosku 3.14 dostajemy, że  $p \in W_{\sqrt{m_\alpha}, N}^s(0)$ . Zauważmy ponadto, że zdefiniowany przez nas punkt  $p$  jest jedynym punktem z  $W_{\sqrt{m_\alpha}, N}^s(0)$  spełniającym  $\pi_y p = y_0$ , co jest natychmiastową konsekwencją Wniosku 3.16.

Wykazaliśmy więc, że zbiór  $W_{\sqrt{m_\alpha}, N}^s(0)$  jest na zbiorze  $\mathbb{R}^u \times \overline{B}_s(\tilde{r}_s)$  wykresem funkcji  $x^s$ .  $\square$

### 3.3. Zależność rozmaitości od parametru odwzorowania

Rozważmy teraz sytuację, w której dysponujemy przedziałem parametrów  $\theta = [\underline{\theta}, \overline{\theta}] \subset \mathbb{R}$ , przy czym  $-\infty < \underline{\theta} < \overline{\theta} < +\infty$ , oraz rodziną funkcji  $\{f_\theta\}_{\theta \in \theta}$  indeksowaną parametrem  $\theta$  spełniająca dla dowolnego  $\theta$

$$f_\theta : D \rightarrow D,$$

gdzie  $D \subset \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^s = \mathbb{R}^n$  jest zbiorem otwartym. Będziemy przy tym zakładać, że odwzorowanie  $(\theta, p) \rightarrow f_\theta(p)$  jest ciągle zarówno ze względu na parametr  $\theta$  jak i zmienną  $p$ .

Niech  $N \subset D$  będzie dane równością (2.2). Załóżmy, że dla dowolnego  $\theta$  punkt 0 jest punktem stałym odwzorowania  $f_\theta$ . Dla  $\mu > 1$  przez

$$W_{\mu, N}^u(0; f_\theta),$$

oznaczymy zbiór silnie niestabilny punktu stałego 0 odwzorowania  $f_\theta$  ze współczynnikiem ekspansji  $\mu$  w otoczeniu  $N$ .

Przypuśćmy, że istnieją parametry  $\alpha, m_\alpha, m$  takie, że dla dowolnego  $\theta \in \theta$  odwzorowanie  $f_\theta$  spełnia założenia Twierdzenia 3.5. Oznaczymy

$$\tilde{r}_u = \sqrt{1 - \alpha^{-2}}.$$

Wówczas na mocy Twierdzenia 3.5 istnieje rodzina funkcji  $\{y_\theta^u\}_{\theta \in \theta}$ , takich że  $y_\theta^u : \overline{B}_u(\tilde{r}_u) \rightarrow \overline{B}_s$ , dla których zachodzą równości

$$W_{\sqrt{m_\alpha}, N}^u(0; f_\theta) \cap (\overline{B}_u(\tilde{r}_u) \times \mathbb{R}^s) = \{(x, y_\theta^u(x)) : x \in \overline{B}_u(\tilde{r}_u)\}. \quad (3.35)$$

**Lemat 3.17** *Dla dowolnego ustalonego  $x \in \overline{B}_u(\tilde{r}_u)$  odwzorowanie  $\theta \rightarrow y_\theta^u(x)$  jest ciągle w przedziale  $\theta$ .*

*Dowód* Ustalmy  $x \in \overline{B}_u(\tilde{r}_u)$ . Niech  $\theta \in \boldsymbol{\theta}$  i dobierzmy ciąg  $\{\theta_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \boldsymbol{\theta}$  spełniający  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \theta_k = \theta$ . Będziemy chcieli dowieść, że

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} y_{\theta_k}^u(x) = y_\theta^u(x). \quad (3.36)$$

Oznaczmy

$$p_\theta^u = (x, y_\theta^u(x)) \text{ oraz } p_k^u = (x, y_k^u(x)) \text{ dla dowolnego } k \in \mathbb{N}.$$

Zauważmy, że zbieżność (3.36) jest równoważna zbieżności

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} p_k^u = p_\theta^u. \quad (3.37)$$

Ponieważ  $p_k^u \in N$  oraz  $N$  jest zbiorem zwartym, więc powyższy warunek jest natomiast równoważny temu, że dowolny podciąg zbieżny  $\{p_{k_l}^u\}_{l \in \mathbb{N}}$  ma granicę równą  $p_\theta^u$ . Niech więc  $\{k_l\}_{l \in \mathbb{N}}$  będzie taki, że  $\lim_{l \rightarrow +\infty} k_l = +\infty$  oraz dla pewnego  $q \in N$  zachodzi

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} p_{k_l}^u = q. \quad (3.38)$$

Dla dowolnego  $k \in \mathbb{N}$  mamy

$$p_k^u \in W_{\sqrt{m_\alpha}, N}^u(0; f_{\theta_k}) \cap (\overline{B}_u(\tilde{r}_u) \times \mathbb{R}^s).$$

Przez  $(p_{k_l, -i}^u)_{i=+\infty}^0$  oznaczmy trajektorię w tył punktu  $p_k^u$  w  $N$  względem odwzorowania  $f_{\theta_k}$ .

Z ciągu  $\{p_{k_l, -1}^u\}_{l \in \mathbb{N}} \subset N$  wybierzmy podciąg zbieżny  $\{p_{k_{l_m}, -1}^u\}_{l \in \mathbb{N}}$  i oznaczmy jego granicę przez  $q_{-1}$ . Zauważmy, że wówczas na mocy (3.38) mamy

$$q = \lim_{m \rightarrow +\infty} p_{k_{l_m}}^u = \lim_{m \rightarrow +\infty} f_{\theta_{k_{l_m}}}(p_{k_{l_m}, -1}^u) = f_\theta(q_{-1}),$$

przy czym w ostatniej równości skorzystaliśmy z tego, że odwzorowanie  $(\theta, x) \rightarrow f_\theta(x)$  jest ciągle zarówno względem  $\theta$  jak i względem  $x$ . Postępując indukcyjnie konstruujemy ciąg  $\{q_{-i}\}_{i \in \mathbb{N}} \subset N$ , którego elementy spełniają

$$f_\theta(q_{-i-1}) = q_{-i}.$$

Przyjmujemy przy tym  $q_0 = q$ . Widzimy więc, że wówczas  $(q_{-i})_{i=-\infty}^0$  jest trajektorią wstecz punktu  $q$  w  $N$  względem odwzorowania  $f_\theta$ .

Z drugiej strony korzystając z Wniosku 3.11 dostajemy, że dla dowolnego  $i \in \mathbb{N}$  i  $l \in \mathbb{N}$  zachodzi nierówność

$$\|p_{k_l, -i}^u\| \leq \sqrt{2}(\sqrt{m_\alpha})^{-i}.$$

Implikuje to, na mocy konstrukcji ciągu  $q_{-i}$ , że

$$\|q_{-i}\| \leq \sqrt{2}(\sqrt{m_\alpha})^{-i}.$$

Stąd na mocy Definicji 3.2

$$q \in W_{\sqrt{m_\alpha}, N}^u(0; f_{\theta_k}) \cap (\overline{B}_u(\tilde{r}_u) \times \mathbb{R}^s).$$

W takim razie na mocy (3.35) musi zachodzić

$$q = p_\theta^u,$$

co kończy dowód. □

W podobny sposób możemy potraktować kwestię zależności silnej rozmaitości stabilnej od parametru  $\theta$ . Dla  $0 < \mu < 1$  przez

$$W_{\mu, N}^s(0; f_\theta),$$

oznaczymy więc zbiór silnie stabilny punktu stałego 0 odwzorowania  $f_\theta$  ze współczynnikiem kontrakcji  $\mu$  w otoczeniu  $N$ .

Przypuśćmy, że istnieją parametry  $\alpha, m_\alpha, m$  takie, że dla dowolnego  $\theta \in \boldsymbol{\theta}$  odwzorowanie  $f_\theta$  spełnia założenia Twierdzenia 3.12. Oznaczmy

$$\tilde{r}_s = \sqrt{1 - \alpha^2}.$$

Wówczas na mocy Twierdzenia 3.12 istnieje rodzina funkcji  $\{x_\theta^s\}_{\theta \in \boldsymbol{\theta}}$ , takich że  $x_\theta^s : \overline{B}_s(\tilde{r}_s) \rightarrow \overline{B}_u$ , dla których zachodzą równości

$$W_{\sqrt{m_\alpha}, N}^s(0; f_\theta) \cap (\mathbb{R}^u \times \overline{B}_s(\tilde{r}_s)) = \{(x_\theta^s(y), y) : y \in \overline{B}_s(\tilde{r}_s)\}.$$

**Lemat 3.18** Dla dowolnego ustalonego  $y \in \overline{B}_s(\tilde{r}_s)$  odwzorowanie  $\theta \rightarrow x_\theta^s(y)$  jest ciągle w przedziale  $\boldsymbol{\theta}$ .

*Dowód* Dowód przebiega analogicznie do dowodu Lematu 3.17. □

### 3.4. Weryfikacja istnienia rozmaitości silnie stabilnych i niestabilnych w praktyce

Rozważmy teraz sytuację, gdy naszym celem jest weryfikacja istnienia rozmaitości silnie niestabilnej lub silnie stabilnej dowolnego punktu stałego  $p^* = (x^*, y^*)$  w otoczeniu będącym iloczynem kartezjańskim kul o zadanych promieniach  $r_u, r_s > 0$ . Zdefiniujmy więc zbiór  $N(p^*, r_u, r_s)$  jako

$$N(p^*, r_u, r_s) = \overline{B}_u(x^*, r_u) \times \overline{B}_s(y^*, r_s). \quad (3.39)$$

Przedstawimy teraz dwa twierdzenia, analogiczne do Twierdzeń 3.5 oraz 3.12, pozwalające wykazać, że zbiór silnie niestabilny (odpowiednio silnie stabilny) dowolnego punktu stałego  $p^*$  w jego otoczeniu  $N(p^*, r_u, r_s)$  jest wykresem pewnej funkcji ciągłej.

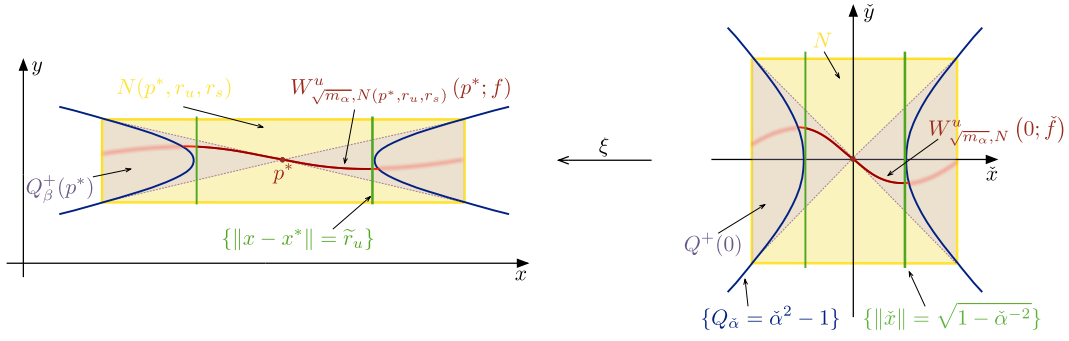
**Twierdzenie 3.19** Niech  $p^* = (x^*, y^*) \in \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^s$  oraz  $r_u, r_s > 0$ . Niech dane będzie ciągle odwzorowanie  $f : D \rightarrow D$ , gdzie  $N(p^*, r_u, r_s) \subset D \subset \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^s$ , dla którego  $f(p^*) = p^*$ . Załóżmy, że dla  $\beta = \frac{r_s}{r_u}$  oraz pewnych  $\alpha > \beta$ ,  $m_\alpha > m_\beta > 0$ ,  $m_\alpha > 1$ ,  $f$  spełnia warunki stożka dla  $(Q_\alpha, m_\alpha)$  i  $(Q_\beta, m_\beta)$  w  $N(p^*, r_u, r_s)$ . Oznaczmy  $\tilde{r}_u = r_u \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-2}}$ . Wówczas istnieje funkcja  $y^u : \overline{B}_u(x^*, \tilde{r}_u) \rightarrow \overline{B}_s(y^*, r_s)$ , dla której

$$W_{\sqrt{m_\alpha}, N(p^*, r_u, r_s)}^u(p^*) \cap (\overline{B}_u(x^*, \tilde{r}_u) \times \mathbb{R}^s) = \{(x, y^u(x)) : x \in \overline{B}_u(x^*, \tilde{r}_u)\}. \quad (3.40)$$

Co więcej,  $y^u$  spełnia warunek Lipschitza ze stałą  $L_u = \beta$ .

*Dowód* Zdefiniujmy odwzorowanie afiniczne  $\xi : \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^s \ni (\check{x}, \check{y}) \rightarrow (x, y) \in \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^s$  równością

$$\xi(\check{x}, \check{y}) = p^* + (r_u \check{x}, r_s \check{y}).$$



Rysunek 3.3. Interpretacja geometryczna Twierdzenia 3.19. Liniowa zamiana współrzędnych  $\xi$  jest tak dobrana, żeby  $\xi(N) = N(p^*, r_u, r_s)$ . W nowych współrzędnych spełnione są założenia Twierdzenia 3.5. Zbiór silnie niestabilny w nowych współrzędnych na przecięciu ze zbiorem  $\overline{B}_u(\sqrt{1 - \check{\alpha}^{-2}}) \times \mathbb{R}^s$  (dla  $\check{\alpha} = \frac{\alpha}{\beta}$ ), jest wykresem pewnej funkcji  $\check{y}^u$  spełniającej warunek Lipschitza ze stałą 1.

Wybór odwzorowania  $\xi$  jest motywowany faktem, że

$$\xi(N) = N(p^*, r_u, r_s).$$

Rozważmy odwzorowanie  $\check{f} : \xi^{-1}(D) \rightarrow \xi^{-1}(D)$  dane jako

$$\check{f} = \xi^{-1} \circ f \circ \xi. \quad (3.41)$$

Pokażemy, że  $\check{f}$  spełnia założenia Twierdzenia 3.5. Zauważmy, że

$$\check{f}(0) = \xi^{-1} \circ f \circ \xi(0) = \xi^{-1} \circ f(p^*) = \xi^{-1}(p^*) = 0.$$

Ponadto, dla ustalonych  $\gamma, m_\gamma > 0$  oraz dowolnych  $p_1, p_2 \in N$ , oznaczając  $q_1 = \xi(p_1), q_2 = \xi(p_2)$ , mamy

$$\begin{aligned} Q_\gamma(p_1 - p_2) &= \gamma^2 r_u^{-2} \|\pi_x(q_1 - q_2)\|^2 - r_s^{-2} \|\pi_y(q_1 - q_2)\|^2 \\ &= r_s^{-2} \left( \gamma^2 \beta^2 \|\pi_x(q_1 - q_2)\|^2 - \|\pi_y(q_1 - q_2)\|^2 \right) \\ &= r_s^{-2} Q_{\gamma\beta}(q_1 - q_2). \end{aligned}$$

Korzystając z powyższego oraz równości (3.41), na mocy której  $f(q_i) = \xi(\check{f}(p_i))$  dla  $i \in \{1, 2\}$ , dostajemy równość

$$Q_\gamma(\check{f}(p_1) - \check{f}(p_2)) - m_\gamma Q_\gamma(p_1 - p_2) = r_s^{-2} (Q_{\gamma\beta}(f(q_1) - f(q_2)) - m_\gamma Q_{\gamma\beta}(q_1 - q_2)).$$

Widzimy więc, że  $\check{f}$  spełnia warunki stożka dla pary  $(Q_\gamma, m_\gamma)$  w zbiorze  $N$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $f$  spełnia warunki stożka dla pary  $(Q_{\gamma\beta}, m_\gamma)$  w zbiorze  $N(p^*, r_u, r_s)$ .

W takim razie na mocy założeń twierdzenia dostajemy, że  $\check{f}$  spełnia warunki stożka dla par  $(Q, m_\beta)$  oraz  $(Q_{\frac{\alpha}{\beta}}, m_\alpha)$  w zbiorze  $N$ . Mamy przy tym

$$\frac{\alpha}{\beta} > 1, \quad m_\alpha > m_\beta > 0, \quad m_\alpha > 1.$$



Pokazuje to, że  $\check{f}$  spełnia założenia Twierdzenia 3.5. Na jego mocy dostajemy istnienie funkcji  $\check{y}^u : \overline{B}_u(\check{r}_u) \rightarrow \overline{B}_s$ , dla której

$$W_{\sqrt{m_\alpha}, N}^u(0; \check{f}) \cap (\overline{B}_u(\check{r}_u) \times \mathbb{R}^s) = \{(\check{x}, \check{y}^u(\check{x})) : \check{x} \in \overline{B}_u(\check{r}_u)\}, \quad (3.42)$$

gdzie

$$\check{r}_u = \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-2}}. \quad (3.43)$$

Co więcej,  $\check{y}^u$  spełnia warunek Lipschitza ze stałą  $\check{L}_u = 1$ .

Przekształcając obie strony równości z (3.42) przez odwzorowanie  $\xi$  dostajemy równość (3.40) z tezy dowodzonego twierdzenia, przy czym funkcja  $y^u$  dana jest jako

$$y^u(x) = y^* + r_s \check{y}^u(r_u^{-1}(x - x^*)),$$

dla dowolnego  $x \in \overline{B}_u(x^*, r_u \check{r}_u) = \overline{B}_u(x^*, \tilde{r}_u)$ . Z tego, że  $\check{y}^u$  spełnia warunek Lipschitza ze stałą 1 dostajemy, że tak zdefiniowane  $y^u$  spełnia warunek Lipschitza ze stałą  $L_u = \frac{r_s}{r_u} = \beta$ , co kończy dowód.  $\square$

Podobnie jak w przypadku rozmaitości silnie niestabilnej, gdy naszym celem jest weryfikacja istnienia rozmaitości silnie stabilnej dowolnego punktu stałego  $p^*$  w otoczeniu  $N(p^*, r_u, r_s)$  danym równością (3.39), możemy posłużyć się następującym twierdzeniem.

**Twierdzenie 3.20** *Niech  $p^* = (x^*, y^*) \in \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^s$  oraz  $r_u, r_s > 0$ . Niech dane będzie ciągle odwzorowanie  $f : D \rightarrow D$ , gdzie  $N(p^*, r_u, r_s) \subset D \subset \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^s$ , dla którego  $f(p^*) = p^*$ . Załóżmy, że dla  $\beta = \frac{r_s}{r_u}$  oraz pewnych  $\alpha < \beta$ ,  $m_\beta > m_\alpha > 0$ ,  $m_\alpha < 1$ ,  $f$  spełnia warunki stożka dla  $(Q_\alpha, m_\alpha)$  i  $(Q_\beta, m_\beta)$  w  $N(p^*, r_u, r_s)$ . Oznaczmy  $\tilde{r}_s = r_s \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2}$ . Wówczas istnieje funkcja  $x^s : \overline{B}_s(y^*, \tilde{r}_s) \rightarrow \overline{B}_u(x^*, r_u)$ , dla której*

$$W_{\sqrt{m_\alpha}, N(p^*, r_u, r_s)}^s(p^*) \cap (\mathbb{R}^u \times \overline{B}_s(y^*, \tilde{r}_s)) = \{(x^s(y), y) : y \in \overline{B}_s(y^*, \tilde{r}_s)\}.$$

Co więcej,  $x^s$  spełnia warunek Lipschitza ze stałą  $L_s = \beta^{-1}$ .

*Dowód* Dowód twierdzenia przebiega analogicznie do dowodu Twierdzenia 3.19.  $\square$

Zauważmy, że dzięki odpowiedniemu grupowaniu współrzędnych i dobraniu w każdym przypadku innych długości promieni  $r_u, r_s$  do zbioru  $N(p^*, r_u, r_s)$  możemy mieć możliwość zastosowania obu Twierdzeń 3.19 i 3.20 do tego samego odwzorowania w celu znalezienia rozmaitości (odpowiednio) silnie niestabilnej i silnie stabilnej.

Opiszemy teraz jak w praktyce wygląda mechanizm postępowania w takim przypadku. Rozważmy odwzorowanie  $f = f(v, \theta, z) : D \rightarrow D$ , gdzie  $D \subset \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \times \mathbb{R}^{n_3}$ , dla  $n_1 + n_2 + n_3 = n$ . Niech  $p^* = (v^*, \theta^*, z^*)$  będzie punktem stałym odwzorowania  $f$ . Przypuśćmy, że dynamika odwzorowania  $f$  na poszczególnych współrzędnych  $(v, \theta, z)$  jest odpowiednio silnie niestabilna, słaba i silnie stabilna.

Twierdzenia 3.19 oraz 3.20 zastosujemy do odwzorowań odpowiednio  $f^u, f^s$  otrzymanych z odwzorowania  $f$  poprzez odpowiednią zamianę (a dokładniej grupowanie)

współrzędnych. Ustalmy  $R > r > 0$ . W celu weryfikacji istnienia rozmaitości silnie niestabilnej punktu  $p^*$  w pewnym jego otoczeniu  $N^u$  postaci

$$N^u = \overline{B}_{n_1}(v^*, R) \times \overline{B}_{n_2+n_3}((\theta^*, z^*), r),$$

rozważmy zamianę współrzędnych  $\xi^u : \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^s \ni (x, y) \rightarrow (v, \theta, z) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \times \mathbb{R}^{n_3}$ , gdzie  $u = n_1$ ,  $s = n_2 + n_3$ , spełniającą

$$(\xi^u)^{-1}(v, \theta, z) = (v, (\theta, z))$$

Odwzorowanie  $f$  w nowych współrzędnych ma postać

$$f^u(x, y) = (\xi^u)^{-1} \circ f \circ \xi^u(x, y)$$

Przypuśćmy, że dla tak zdefiniowanego odwzorowania  $f^u$  istnieją stałe  $\alpha_u, \beta_u, m_u, m$  spełniające  $\alpha_u > \frac{r}{R}$ ,  $\beta_u = \frac{r}{R}$ ,  $m_u > 1$  oraz  $0 < m < m_u$  takie, że  $f^u$  spełnia warunki stożka dla par  $(Q_\alpha, m_\alpha)$ ,  $(Q_\beta, m_\beta)$  w zbiorze  $N((x^*, y^*), R, r)$ , gdzie  $\alpha = \alpha_u$ ,  $\beta = \beta_u$ ,  $m_\alpha = m_u$ ,  $m_\beta = m$ . Wówczas  $f^u$  spełnia założenia Twierdzenia 3.19, na mocy którego spełniona jest równość

$$W_{\sqrt{m_u}, N((x^*, y^*), r_u, r_s)}^u((x^*, y^*); f^u) \cap (\overline{B}_u(x^*, \tilde{r}_u) \times \mathbb{R}^s) = \{(x, y^u(x)) : x \in \overline{B}_u(x^*, \tilde{r}_u)\}.$$

Przechodząc w powyższym do oryginalnych współrzędnych dostajemy

$$W_{\sqrt{m_u}, N^u(p^*; f)}^u \cap (\overline{B}_{n_1}(v^*, \tilde{r}_u) \times \mathbb{R}^{n_2} \times \mathbb{R}^{n_3}) = \{(v, (\theta^u, z^u)(v)) : v \in \overline{B}_{n_1}(v^*, \tilde{r}_u)\},$$

przy czym  $\tilde{r}_u = R\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha_u}{\beta_u}\right)^{-2}}$ . Ponadto funkcja  $w^u : v \rightarrow (\theta^u(v), z^u(v))$  spełnia warunek Lipschitza ze stałą  $\frac{r}{R}$ .

Podobnie postępujemy w celu weryfikacji istnienia rozmaitości silnie stabilnej punktu  $p^*$  w pewnym jego otoczeniu  $N^s$  postaci

$$N^s = \overline{B}_{n_1+n_2}((v^*, \theta^*), r) \times \overline{B}_{n_3}(z^*, R).$$

Rozważmy więc zamianę współrzędnych  $\xi^s : \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^s \ni (x, y) \rightarrow (v, \theta, z) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \times \mathbb{R}^{n_3}$ , gdzie  $u = n_1 + n_2$ ,  $s = n_3$ , spełniającą

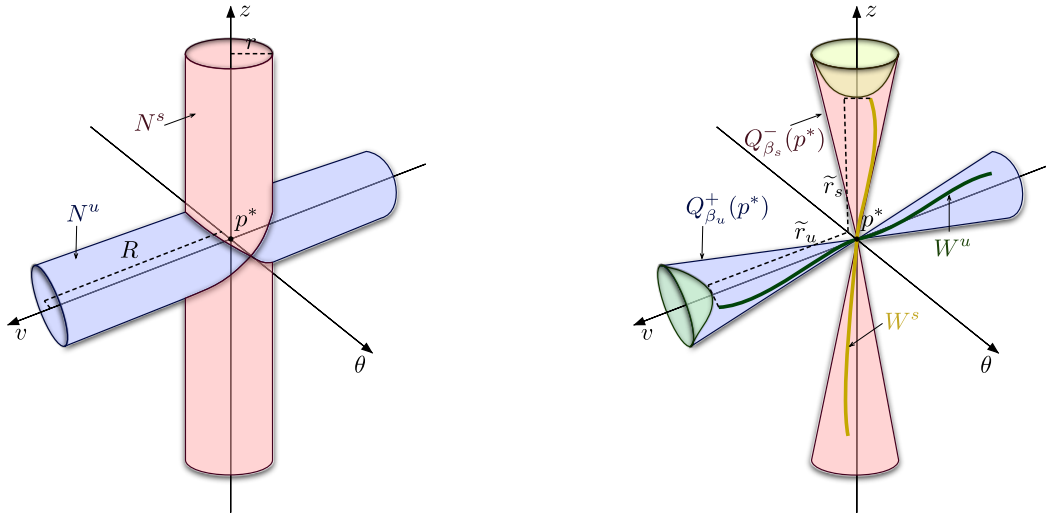
$$(\xi^s)^{-1}(v, \theta, z) = ((v, \theta), z)$$

Odwzorowanie  $f$  w nowych współrzędnych ma postać

$$f^s(x, y) = (\xi^s)^{-1} \circ f \circ \xi^s(x, y)$$

Przypuśćmy, że dla tak zdefiniowanego odwzorowania  $f^s$  istnieją stałe  $\alpha_s, \beta_s, m_s, m$  spełniające  $\alpha_s < \frac{R}{r}$ ,  $\beta_s = \frac{R}{r}$ ,  $m_s < 1$  oraz  $0 < m_s < m$  takie, że  $f^s$  spełnia warunki stożka dla par  $(Q_\alpha, m_\alpha)$ ,  $(Q_\beta, m_\beta)$  w zbiorze  $N((x^*, y^*), r, R)$ , gdzie  $\alpha = \alpha_s$ ,  $\beta = \beta_s$ ,  $m_\alpha = m_s$ ,  $m_\beta = m$ . Wówczas  $f^s$  spełnia założenia Twierdzenia 3.20, na mocy którego spełniona jest równość

$$W_{\sqrt{m_s}, N((x^*, y^*), r_u, r_s)}^s((x^*, y^*); f^s) \cap (\mathbb{R}^u \times \overline{B}_s(y^*, \tilde{r}_s)) = \{(x^s(y), y) : y \in \overline{B}_s(y^*, \tilde{r}_s)\}.$$



Rysunek 3.4. Rozmaitości punktu stałego odwzorowania  $f$ : silnie niestabilna i silnie stabilna w otoczeniach odpowiednio  $N^u$  i  $N^s$  zamknięte w stożkach odpowiednio dodatnim indukowanym przez  $Q_{\beta_u}$  oraz ujemnym indukowanym przez  $Q_{\beta_s}$ .

Przechodząc w powyższym do oryginalnych współrzędnych dostajemy

$$W_{\sqrt{m_s}, N^s}^s(p^*; f) \cap (\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \times \bar{B}_{n_3}(z^*, \tilde{r}_s)) = \{((v^s, \theta^s)(z), z) : z \in \bar{B}_{n_3}(z^*, \tilde{r}_s)\},$$

przy czym  $\tilde{r}_s = R\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha_s}{\beta_s}\right)^2}$ . Ponadto funkcja  $w^s : z \rightarrow (v^s(z), \theta^s(z))$  spełnia warunek Lipschitza ze stałą  $\frac{r}{R}$ .

**Uwaga 3.21** W praktyce dążymy do tego, żeby wybrane przez nas promienie  $r$  i  $R$  spełniały  $R \gg r$ , natomiast parametry  $\alpha_u, \alpha_s$  był tak dobrane, żeby  $\tilde{r}_u \approx R$  oraz  $\tilde{r}_s \approx R$  tj, żeby  $\alpha_u \gg \frac{r}{R}$  oraz  $\alpha_s \ll \frac{R}{r}$ .

## Rozmaitości silnie stabilne i silnie niestabilne dla równań różniczkowych

Pojęcia i twierdzenia przedstawione w Rozdziale 3 dotyczyły dyskretnych układów dynamicznych. Podobne wyniki można uzyskać w przypadku ciągłych układów dynamicznych zadanych przez równania różniczkowe. Wyniki te przedstawiamy w tym rozdziale.

### 4.1. Podstawowe definicje

W rozdziale tym zajmiemy się autonomicznym równaniem różniczkowym

$$p' = F(p), \tag{4.1}$$

gdzie odwzorowanie

$$F : D \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

klasy  $C^1$  zdefiniowane jest na pewnym obszarze  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Przypomnijmy, że dla dowolnego  $p_0 \in D$  przez  $I(p_0) = (I^-(p_0), I^+(p_0))$  oznaczamy dziedzinę rozwiązania maksymalnego równania (1.6) spełniającego warunek początkowy  $p(0) = p_0$ . Przez  $\phi_t(p)$  oznaczmy potok indukowany przez równanie (4.1).

Założmy, że dla równania (4.1) istnieje punkt równowagi  $p^* \in D$ .

Wprowadzimy teraz definicje zbiorów silnie niezmienniczych (stabilnych i niestabilnych) związanych z punktem równowagi  $p^*$ .

**Definicja 4.1** Niech  $U \subset D$  będzie pewnym otoczeniem punktu równowagi  $p^*$  równania  $p' = F(p)$  i niech  $\mu < 0$ . *Zbiorem silnie stabilnym punktu  $p^*$  ze współczynnikiem kontrakcji  $\mu$  w otoczeniu  $U$*  nazwiemy zbiór  $W_{\mu,U}^s(p^*)$  zawierający wszystkie punkty  $p \in U$  spełniające warunki:

1.  $I^+(p) = +\infty$  oraz  $\phi_t(p) \in U$  dla dowolnego  $t \geq 0$ ;
2. istnieje stała  $C > 0$ , taka że dla wszystkich  $t \geq 0$  zachodzi nierówność

$$\|\phi_t(p) - p^*\| \leq Ce^{\mu t}. \tag{4.2}$$

**Definicja 4.2** Niech  $U \subset D$  będzie pewnym otoczeniem punktu równowagi  $p^*$  równania  $p' = F(p)$  i niech  $\mu > 0$ . *Zbiorem silnie niestabilnym punktu  $p^*$  ze współczynnikiem ekspansji  $\mu$  w otoczeniu  $U$*  nazwiemy zbiór  $W_{\mu,U}^u(p^*)$  zawierający wszystkie punkty  $p \in U$  spełniające warunki:

1.  $I^-(p) = -\infty$  oraz  $\phi_{-t}(p) \in U$  dla dowolnego  $t \geq 0$ ;
2. istnieje stała  $C > 0$ , taka że dla wszystkich  $t \geq 0$  zachodzi nierówność

$$\|\phi_{-t}(p) - p^*\| \leq Ce^{-\mu t}. \quad (4.3)$$

Zauważmy, że z Definicji 4.1 oraz 4.2 wynika, że zbiory silnie stabilne (niestabilne) są podzbiorem zbiorów stabilnych (niestabilnych). Co więcej do zbioru silnie stabilnego i zbioru silnie niestabilnego należy punkt  $p^*$ . Stąd zbiory te są zawsze niepuste.

Poniżej prezentujemy kilka przykładów silnych zbiorów stabilnych i niestabilnych dla pewnych równań różniczkowych.

**Przykład 4.3** Rozważmy równanie różniczkowe

$$(x', y') = \left(x, \frac{1}{2}y\right).$$

Zbiorem silnie niestabilnym punktu  $p^* = (0, 0)$  ze współczynnikiem ekspansji  $\frac{1}{2}$  w  $U = \mathbb{R}^2$  jest zbiór  $\mathbb{R}^2$  (który jest równy zbiorowi niestabilnemu), natomiast zbiorem silnie niestabilnym punktu  $p^*$  ze współczynnikiem ekspansji 1 w  $U$  jest zbiór  $\mathbb{R} \times \{0\}$ .

Podobnie dla równania

$$(x', y') = \left(-\frac{1}{2}x, -y\right).$$

zbiorem silnie stabilnym punktu  $p^* = (0, 0)$  ze współczynnikiem kontrakcji  $-\frac{1}{2}$  w  $U = \mathbb{R}^2$  jest zbiór  $\mathbb{R}^2$  (który jest równy zbiorowi stabilnemu), natomiast zbiorem silnie stabilnym punktu  $p^*$  ze współczynnikiem kontrakcji  $-1$  w  $U$  jest zbiór  $\{0\} \times \mathbb{R}$ .  $\square$

## 4.2. Twierdzenia o istnieniu rozmaitości silnie niestabilnej

W przypadku gdy zbiór  $W_U^s(p^*)$  (lub odpowiednio  $W_U^u(p^*)$ ) jest rozmaitością, będziemy go nazywać *rozmaitością stabilną* (odpowiednio *niestabilną*) punktu  $p^*$  w  $U$ . Podobnie wprowadzamy pojęcie *rozmaitości silnie stabilnych/niestabilnych*.

Zaprezentujemy teraz twierdzenie oparte o warunki stożka, które pozwala stwierdzić, że zbiór silnie stabilny/niestabilny danego równania różniczkowego jest wykresem pewnej funkcji ciągłej (a więc rozmaitością) w pewnym (określonym) otoczeniu punktu równowagi.

Niech dane będzie pole wektorowe

$$F : D \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

klasy  $C^1$ , określona na pewnym obszarze  $D \subset \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^s = \mathbb{R}^n$ .

Niech  $N \subset D$  będzie dane jako (2.2).

Rozważmy autonomiczne równanie różniczkowe

$$p' = F(p).$$

Załóżmy, że równanie to ma punkt równowagi należący do wnętrza zbioru  $N$ , to znaczy

$$\exists p^* \in \text{Int}(N) : F(p^*) = 0.$$

Dla uproszczenia przyjmujemy, że

$$p^* = 0.$$

jednak jak wykażemy później otrzymane w tym rozdziale wyniki można łatwo uogólnić na przypadek dowolnego  $p^*$  (zob. Uwaga 4.6).

Ponadto ustalmy  $\alpha > 1$  i niech  $Q_\alpha$  będzie zdefiniowane równością (2.1), przy czym przyjmując konwencję z poprzednich rozdziałów, zamiast pisać  $Q_1$ , będziemy pisać po prostu  $Q$ .

Przechodzimy teraz do wypowiedzenia najważniejszego wyniku tego rozdziału, tj. twierdzenia o istnieniu rozmaitości silnie niestabilnej w otoczeniu punktu równowagi dla potoku spełniającego warunki stożka.

**Twierdzenie 4.4** *Niech  $N = \overline{B}_u \times \overline{B}_s$  oraz niech  $\alpha > 1$ . Oznaczmy  $\tilde{r}_u = \sqrt{1 - \alpha^{-2}}$ . Niech  $\phi_t$  będzie potokiem indukowanym przez równanie  $p' = F(p)$ , przy czym  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ , gdzie  $N \subset D \subset \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^s$ , jest funkcją klasy  $C^1$  oraz  $F(0) = 0$ . Przypuśćmy, że istnieją  $\nu_\alpha > \nu$ ,  $\nu_\alpha > 0$  takie, że dla dostatecznie małego  $t > 0$ , odwzorowanie  $\phi_t$  spełnia warunki stożka dla  $(Q, m(t))$  i  $(Q_\alpha, m_\alpha(t))$  w  $N$ , gdzie  $m_\alpha(t) = 1 + 2t\nu_\alpha$ ,  $m(t) = 1 + 2t\nu$ . Wówczas istnieje funkcja  $y^u : \overline{B}_u(\tilde{r}_u) \rightarrow \overline{B}_s$ , dla której*

$$W_{\nu_\alpha, N}^u(0) \cap (\overline{B}_u(\tilde{r}_u) \times \mathbb{R}^s) = \{(x, y^u(x)) : x \in \overline{B}_u(\tilde{r}_u)\}. \quad (4.4)$$

Co więcej,  $y^u$  spełnia warunek Lipschitza ze stałą  $L_u = 1$ .

*Dowód* Niech  $t_0 > 0$  będzie tak dobrane, że spełnione są poniższe warunki:

1. dla dowolnego  $t \in (0, t_0]$  zachodzi

$$m(t) > 0;$$

2. dla dowolnego  $t \in (0, t_0]$  odwzorowanie  $\phi_t$  spełnia warunki stożka dla  $(Q, m(t))$  i  $(Q_\alpha, m_\alpha(t))$  w  $N$ ;

Istnienie takiego  $t_0$  wynika z założeń twierdzenia.

Ustalmy  $t \in (0, t_0]$ . Niech  $f : D \rightarrow D$  będzie dane jako  $f(p) = \phi_t(p)$ . Z założenia o  $F$  mamy  $f(0) = \phi_t(0) = 0$ . Co więcej z uwagi na warunki nałożone na  $t_0$ , mamy  $m(t) > 0$  oraz  $m_\alpha(t) > 1$  (gdyż  $\nu_\alpha > 0$ ). Stąd na mocy Twierdzenia 3.5, zastosowanego dla odwzorowania  $f$  zachodzi więc równość

$$W_{\sqrt{m_\alpha(t)}, N}^u(0; \phi_t) \cap (\overline{B}_u(\tilde{r}_u) \times \mathbb{R}^s) = \{(x, y_t^u(x)) : x \in \overline{B}_u(\tilde{r}_u)\} \quad (4.5)$$

gdzie przez  $W_{\sqrt{m_\alpha(t)}, N}^u(0; \phi_t)$  oznaczmy zbiór niestabilny punktu stałego 0 dla odwzorowania  $\phi_t$  ze współczynnikiem ekspansji  $\sqrt{m_\alpha(t)}$  w  $N$ . Występująca w (4.5) funkcja  $y_t^u$  spełnia przy tym warunek Lipschitza ze stałą  $L_u = 1$ .

Zdefiniujmy  $y^u : \overline{B}_u(\tilde{r}_u) \rightarrow \overline{B}_s$  jako

$$y^u = y_{t_0}^u.$$

Naszym celem będzie pokazanie, że dla tak zdefiniowanego  $y^u$  zachodzi równość (4.4).

Zacniemy od pokazania inkluzji

$$W_{\nu_\alpha, N}^u(0) \cap (\overline{B}_u(\tilde{r}_u) \times \mathbb{R}^s) \subset \{(x, y^u(x)) : x \in \overline{B}_u(\tilde{r}_u)\}. \quad (4.6)$$

Weźmy dowolne  $p \in W_{\nu_\alpha, N}^u(0) \cap (\overline{B}_u(\tilde{r}_u) \times \mathbb{R}^s)$ . Na mocy równości (4.5) wystarczy pokazać, że

$$p \in W_{\sqrt{m_\alpha(t_0)}, N}^u(0; \phi_{t_0}). \quad (4.7)$$

Z definicji  $W_{\nu_\alpha, N}^u(0)$  wiemy, że  $\phi_{-t}(p)$  jest dobrze określone i leży w  $N$  dla dowolnego  $t \geq 0$ . W takim razie trajektoria w tył punktu  $p$  względem odwzorowania  $\phi_{t_0}$ , tj, trajektoria dana jako  $(\phi_{-it_0}(p))_{i=+\infty}^0$  jest dobrze określona i zawarta w  $N$ . Co więcej dla pewnej stałej  $C > 0$ , dla dowolnego  $i \in \mathbb{N}$

$$\|\phi_{-it_0}(p)\| \leq C e^{-it_0\nu_\alpha} = C(e^{2t_0\nu_\alpha})^{-\frac{i}{2}} \leq C(1 + 2t_0\nu_\alpha)^{-\frac{i}{2}} = C\left(\sqrt{m_\alpha(t_0)}\right)^{-i},$$

przy czym w drugiej nierówności skorzystaliśmy z faktu, że dla  $a \geq 0$  mamy  $1 + a \leq e^a$ . W takim razie pokazaliśmy (4.7), a co za tym idzie inkluzję (4.6).

Pokażemy teraz inkluzję

$$W_{\nu_\alpha, N}^u(0) \cap (\overline{B}_u(\tilde{r}_u) \times \mathbb{R}^s) \supset \{(x, y^u(x)) : x \in \overline{B}_u(\tilde{r}_u)\}. \quad (4.8)$$

Pierwszym krokiem będzie wykazanie, że dla dowolnego  $k \in \mathbb{N}$  zachodzi równość

$$y_{t_0}^u = y_{\frac{t_0}{k}}^u. \quad (4.9)$$

Ustalmy więc  $k \in \mathbb{N}$  i oznaczmy  $f = \phi_{t_0}$  oraz  $g = \phi_{\frac{t_0}{k}}$ . Na mocy (4.5), aby wykazać (4.9) wystarczy pokazać, że spełniona jest inkluzja

$$W_{\sqrt{m_\alpha(t_0)}, N}^u(0; f) \supset W_{\sqrt{m_\alpha(\frac{t_0}{k})}, N}^u(0; g). \quad (4.10)$$

Obierzmy dowolne  $p \in W_{\sqrt{m_\alpha(\frac{t_0}{k})}, N}^u(0; g)$ . Zauważmy, że spełniona jest równość

$$(f^{-i}(p))_{i=+\infty}^0 = (g^{-ik}(p))_{i=+\infty}^0.$$

Ponieważ punkty  $(g^{-ik}(p))_{i=+\infty}^0$  leżą na trajektorii wstecz punktu  $p$  względem odwzorowania  $g$ , więc fakt, że  $p \in W_{\sqrt{m_\alpha(\frac{t_0}{k})}, N}^u(0; g)$ , Definicja 3.2 oraz powyższa równość

implikują, że trajektoria  $(f^{-i}(p))_{i=+\infty}^0$  jest dobrze określona i zawarta w  $N$ . Co więcej istnieje stała  $C > 0$ , taka, że dla dowolnego  $i \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \|f^{-i}(p)\| &= \|g^{-ik}(p)\| \leq C \left( \sqrt{m_\alpha\left(\frac{t_0}{k}\right)} \right)^{-ik} \\ &= C \left( \left(1 + \frac{2\nu_\alpha t_0}{k}\right)^k \right)^{-\frac{i}{2}} \leq C(1 + 2\nu_\alpha t_0)^{-\frac{i}{2}} = C \left( \sqrt{m_\alpha(t_0)} \right)^{-i}, \end{aligned}$$

przy czym w ostatniej nierówności skorzystaliśmy z faktu, że ciąg  $\left\{ \left(1 + \frac{a}{k}\right)^k \right\}_{k=1}^{+\infty}$  jest niemalejący, o ile  $a \geq 0$ . W takim razie pokazaliśmy, że  $p \in W_{\sqrt{m_\alpha(t_0)}, N}^u(0; f)$ . W konsekwencji zachodzi inkluzja (4.10), a stąd równość (4.9).

Przechodzimy teraz do pokazania inkluzji (4.8). Ustalmy więc  $x \in \overline{B}_u(\tilde{r}_u)$  i oznaczmy  $p = (x, y_{t_0}^u(x))$ . Niech  $t > 0$ . Niech ciągi  $(i_j)_{j=0}^{+\infty}, (k_j)_{j=0}^{+\infty} \subset \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , będą tak dobrane, żeby

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} k_j = +\infty, \quad (4.11)$$

oraz

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{i_j}{k_j} t_0 = t. \quad (4.12)$$

Równość (4.12), z uwagi na ciągłość potoku względem  $t$ , daje

$$\phi_{-t}(p) = \lim_{j \rightarrow +\infty} \phi_{-\frac{i_j}{k_j} t_0}(p) = \lim_{j \rightarrow +\infty} \left( \phi_{\frac{t_0}{k_j}} \right)^{-i_j}(p)$$

Na mocy (4.9) oraz (4.5) dla dowolnego  $j \in \mathbb{N}$  mamy

$$p = (x, y_{\frac{t_0}{k_j}}^u(x)) \in W_{\sqrt{m_\alpha(\frac{t_0}{k_j})}, N}^u(0; \phi_{\frac{t_0}{k_j}}) \cap \left( \overline{B}_u(\tilde{r}_u) \times \mathbb{R}^s \right). \quad (4.13)$$

Punkty postaci  $\left( \phi_{\frac{t_0}{k_j}} \right)^{-i_j}(p)$  leżą na (wyznaczonej jednoznacznie) trajektorii wstecz punktu  $p$  względem odwzorowania  $\phi_{\frac{t_0}{k_j}}$ . Stąd inkluzja (4.13) oraz definicja zbioru silnie niestabilnego w otoczeniu  $N$  pociągają za sobą

$$\left( \phi_{\frac{t_0}{k_j}} \right)^{-i_j}(p) \in N.$$

Po przejściu do granicy, na mocy zwartości zbioru  $N$ , mamy

$$\phi_{-t}(p) \in N \quad (4.14)$$

Ponadto korzystając z (4.13) oraz Wniosku 3.11 dostajemy, że spełniona jest nierówność

$$\begin{aligned} \left\| \left( \phi_{\frac{t_0}{k_j}} \right)^{-i_j}(p) \right\| &\leq \sqrt{2} \left( m_\alpha \left( \frac{t_0}{k_j} \right) \right)^{-\frac{i_j}{2}} = \sqrt{2} \left( 1 + 2 \frac{t_0}{k_j} \nu_\alpha \right)^{-\frac{i_j}{2}} \\ &= \sqrt{2} \left( \left( 1 + \frac{2t_0 \nu_\alpha}{k_j} \right)^{-\frac{k_j}{2t_0 \nu_\alpha}} \right)^{-\nu_\alpha \frac{i_j}{k_j} t_0}. \end{aligned}$$

Na mocy (4.11) i (4.12), po przejściu w powyższej nierówności do granicy, dostajemy

$$\|\phi_{-t}(p)\| \leq \sqrt{2} e^{-\nu_\alpha t}. \quad (4.15)$$

Konsekwencją powyższego oraz (4.14) jest inkluzja  $p \in W_{\nu_\alpha, N}^u(0)$ . Wykazaliśmy więc (4.8), co kończy dowód.  $\square$



**Wniosek 4.5** Niech będą spełnione założenia Twierdzenia 4.4. Wówczas dla dowolnego  $p \in W_{\nu_\alpha, N}^u(0) \cap (\overline{B}_u(\tilde{r}_u) \times \mathbb{R}^s)$  i dowolnego  $t \geq 0$  zachodzi

$$\|\phi_{-t}(p)\| \leq \sqrt{2}e^{-\nu_\alpha t}.$$

*Dowód* Nierówność z tezy jest konsekwencją (4.4) oraz nierówności (4.15) z dowodu Twierdzenia 4.4.  $\square$

Przypuśćmy teraz, że naszym celem jest weryfikacja istnienia rozmaitości silnie niestabilnej dowolnego punktu równowagi  $p^* = (x^*, y^*)$  w otoczeniu będącym iloczynem kartezjańskim kul o zadanych promieniach  $r_u, r_s > 0$ . Niech więc zbiór  $N(p^*, r_u, r_s)$  dany będzie jako (3.39). Aby wykazać, że zbiór silnie niestabilny punktu  $p^*$  w otoczeniu  $N(p^*, r_u, r_s)$  jest wykresem pewnej funkcji ciągłej możemy posłużyć się następującym twierdzeniem, analogicznym do Twierdzenia 4.4.

**Twierdzenie 4.6** Niech  $p^* = (x^*, y^*) \in \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^s$  oraz  $r_u, r_s > 0$ . Niech dane będzie pole wektorowe  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ , klasy  $C^1$ , gdzie  $N(p^*, r_u, r_s) \subset D \subset \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^s$ , dla którego  $F(p^*) = 0$  i niech  $\phi_t$  będzie potokiem indukowanym przez równanie  $p' = F(p)$ . Załóżmy, że dla  $\beta = \frac{r_s}{r_u}$  oraz pewnych  $\alpha > \beta$ ,  $\nu_\alpha > \nu_\beta$ ,  $\nu_\alpha > 0$ , dla dostatecznie małego  $t > 0$ , odwzorowanie  $\phi_t$  spełnia warunki stożka dla  $(Q_\alpha, m_\alpha(t))$  i  $(Q_\beta, m_\beta(t))$  w  $N(p^*, r_u, r_s)$ , gdzie  $m_\alpha(t) = 1 + 2t\nu_\alpha$ ,  $m_\beta(t) = 1 + 2t\nu_\beta$ . Oznaczmy  $\tilde{r}_u = r_u \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-2}}$ . Wówczas istnieje funkcja  $y^u : \overline{B}_u(x^*, \tilde{r}_u) \rightarrow \overline{B}_s(y^*, r_s)$ , dla której

$$W_{\nu_\alpha, N(p^*, r_u, r_s)}^u(p^*) \cap (\overline{B}_u(x^*, \tilde{r}_u) \times \mathbb{R}^s) = \{(x, y^u(x)) : x \in \overline{B}_u(x^*, \tilde{r}_u)\}.$$

Co więcej,  $y^u$  spełnia warunek Lipschitza ze stałą  $L_u = \beta$ .

*Dowód* Dowód przebiega analogicznie do dowodu Twierdzenia 3.19.  $\square$

Zwracamy uwagę, że wyniki analogiczne do Twierdzeń 4.4 i 4.6 dla zbioru silnie stabilnego można uzyskać przez zmianę znaku rozważanego pola wektorowego. W praktyce weryfikację istnienia rozmaitości silnie stabilnej punktu równowagi  $p^*$  pola wektorowego  $F$  będziemy przeprowadzać rozważając pole  $-F$  i w oparciu o Twierdzenie 4.6 znajdując rozmaitość niestabilną punktu  $p^*$  dla tego pola.

Jak pokażemy w Rozdziale 5, założenia Twierdzenia 4.6 mogą zostać łatwo zweryfikowane przez komputer. Podkreślamy przy tym, że sprawdzenie czy potok równania różniczkowego spełnia warunki stożka, nie będzie wymagało całkowania równania.

### 4.3. Zależność rozmaitości od parametru równania różniczkowego

Rozważmy teraz sytuację, w której dysponujemy przedziałem parametrów  $\theta = [\underline{\theta}, \bar{\theta}] \subset \mathbb{R}$ , przy czym  $-\infty < \underline{\theta} < \bar{\theta} < +\infty$ , oraz rodziną pól wektorowych  $\{F_\theta\}_{\theta \in \theta}$  indeksowaną parametrem  $\theta$  spełniających dla dowolnego  $\theta$

$$F_\theta : D \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

gdzie obszar  $D \subset \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^s = \mathbb{R}^n$ . Będziemy przy tym zakładać, że odwzorowanie  $(\theta, p) \rightarrow F_\theta(p)$  jest ciągle ze względu na parametr  $\theta$  oraz jest klasy  $C^1$  ze względu na zmienną  $p$ .

Zdefiniujmy rodzinę autonomicznych równań różniczkowych

$$p' = F_\theta(p), \quad (4.16)$$

indeksowanych parametrem  $\theta$ .

Niech  $N \subset D$  będzie dane równością (2.2). Załóżmy, że dla dowolnego  $\theta$  punkt 0 jest punktem równowagi równania (4.16). Dla  $\mu > 1$  przez

$$W_{\mu, N}^u(0; F_\theta),$$

oznaczymy zbiór silnie niestabilny punktu równowagi 0 rozważanego równania ze współczynnikiem ekspansji  $\mu$  w otoczeniu  $N$ .

Przypuśćmy, że istnieją parametry  $\alpha, \nu_\alpha, \nu$  takie, że dla dowolnego  $\theta \in \boldsymbol{\theta}$  pole wektorowe  $F_\theta$  spełnia założenia Twierdzenia 4.4. Oznaczmy

$$\tilde{r}_u = r_u \sqrt{1 - \alpha^{-2}},$$

Wówczas na mocy Twierdzenia 4.4 istnieje rodzina funkcji  $\{y_\theta^u\}_{\theta \in \boldsymbol{\theta}}$ , takich że  $y_\theta^u : \overline{B}_u(\tilde{r}_u) \rightarrow \overline{B}_s$ , dla których zachodzą równości

$$W_{\nu_\alpha, N}^u(0; F_\theta) \cap (\overline{B}_u(\tilde{r}_u) \times \mathbb{R}^s) = \{(x, y_\theta^u(x)) : x \in \overline{B}_u(\tilde{r}_u)\}. \quad (4.17)$$

**Lemat 4.7** *Dla dowolnego ustalonego  $x \in \overline{B}_u(\tilde{r}_u)$  odwzorowanie  $\theta \rightarrow y_\theta^u(x)$  jest ciągle w przedziale  $\boldsymbol{\theta}$ .*

*Dowód* Ustalmy  $x \in \overline{B}_u(\tilde{r}_u)$ . Niech  $\theta \in \boldsymbol{\theta}$  i dobierzmy ciąg  $\{\theta_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \boldsymbol{\theta}$  spełniający  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \theta_k = \theta$ . Będziemy chcieli dowieść, że

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} y_{\theta_k}^u(x) = y_\theta^u(x). \quad (4.18)$$

Oznaczmy

$$p_\theta^u = (x, y_\theta^u(x)) \text{ oraz } p_k^u = (x, y_k^u(x)) \text{ dla dowolnego } k \in \mathbb{N}.$$

Zauważmy, że zbieżność (4.18) jest równoważna zbieżności

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} p_k^u = p_\theta^u. \quad (4.19)$$

Ponieważ  $p_k^u \in N$  oraz  $N$  jest zbiorem zwartym, więc powyższy warunek jest natomiast równoważny temu, że dowolny podciąg zbieżny  $\{p_{k_l}^u\}_{l \in \mathbb{N}}$  ma granicę równą  $p_\theta^u$ . Niech więc  $\{k_l\}_{l \in \mathbb{N}}$  będzie taki, że  $\lim_{l \rightarrow +\infty} k_l = +\infty$  oraz dla pewnego  $q \in N$  zachodzi

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} p_{k_l}^u = q. \quad (4.20)$$

Dla dowolnego  $k \in \mathbb{N}$  mamy

$$p_k^u \in W_{\nu_\alpha, N}^u(0; F_{\theta_k}) \cap (\overline{B}_u(\tilde{r}_u) \times \mathbb{R}^s).$$

Korzystając z Wniosku 4.5 dostajemy więc, że dla dowolnego  $t \geq 0$  i  $l \in \mathbb{N}$  zachodzi nierówność

$$\|\phi_{\theta_{k_l}}^{-t}(p_{k_l}^u)\| \leq \sqrt{2}e^{-\nu_\alpha t},$$

gdzie przez  $\phi_\theta^t$  rozumiemy potok indukowany przez równanie (4.16). Z uwagi na ciągłość potoku względem parametru, po przejściu w powyższej nierówności do granicy z  $l \rightarrow +\infty$  otrzymujemy

$$\|\phi_\theta^{-t}(q)\| \leq \sqrt{2}e^{-\nu_\alpha t}.$$

Stąd na mocy Definicji 4.2

$$q \in W_{\nu_\alpha, N}^u(0; F_{\theta_k}) \cap (\overline{B}_u(\tilde{r}_u) \times \mathbb{R}^s).$$

W takim razie na mocy (4.17) musi zachodzić

$$q = p_\theta^u,$$

co kończy dowód. □

## Komputerowa weryfikacja warunków stożka

Niech dla ustalonego  $\alpha > 0$  forma kwadratowa  $Q_\alpha : \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$  będzie dana przez (2.1). Przez  $\mathcal{Q}_\alpha$  oznaczmy macierz tej formy, tj.

$$\mathcal{Q}_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha^2 \text{Id}_u & 0 \\ 0 & -\text{Id}_s \end{bmatrix}.$$

Pokażemy teraz w jaki sposób korzystając z metod arytmetyki interwałowej można zweryfikować, że dane odwzorowanie spełnia warunki stożka. Po raz pierwszy metoda interwałowa sprawdzenia, że odwzorowanie spełnia dane warunki stożka, została zaproponowana przez P.Zgliczyńskiego w pracy [46]. W naszej pracy mamy nieco inną definicję warunków stożka, jednak weryfikacja tych warunków może zostać przeprowadzona w bardzo podobny sposób.

Rozważmy najpierw odwzorowanie

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

klasy  $C^1$ , zdefiniowane na pewnym podzbiórze otwartym  $D$  przestrzeni  $\mathbb{R}^n$ . Do sprawdzenia, że funkcja  $f$  spełnia warunki stożka przydatny może się okazać poniższy lemat.

**Lemat 5.1** *Niech odwzorowanie  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^s$ , gdzie  $D \subset \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^s$ , będzie funkcją klasy  $C^1$ , oraz niech  $m > 0$ . Oznaczmy przez  $\mathcal{Q}_\alpha$  macierz formy kwadratowej  $Q_\alpha$ . Niech  $U \subset D$  będzie wypukłym zbiorem otwartym. Przypuśćmy, że macierz*

$$[Df(U)]^T \mathcal{Q}_\alpha [Df(U)] - m\mathcal{Q}_\alpha \tag{5.1}$$

*jest dodatnio określona. Wówczas  $f$  spełnia warunku stożka dla  $(Q_\alpha, m)$  w  $U$ .*

*Dowód* Zauważmy, że dla dowolnych  $p_1, p_2 \in U$

$$\begin{aligned} f(p_1) - f(p_2) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} f((1-t)p_2 + tp_1) dt \\ &= \int_0^1 Df((1-t)p_2 + tp_1) dt (p_1 - p_2). \end{aligned}$$

Niech

$$B = \int_0^1 Df((1-t)p_2 + tp_1) dt.$$

Wówczas

$$B \in [Df(U)].$$

Warunek dodatniej określoności macierzy (5.1) implikuje, że forma kwadratowa  $V : \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$  zdefiniowana jako

$$V(p) = Q_\alpha(Bp) - mQ_\alpha(p),$$

jest określona dodatnio. W takim razie widzimy, że dla  $p_1 \neq p_2$

$$Q_\alpha(f(p_1) - f(p_2)) - mQ_\alpha(p_1 - p_2) = Q_\alpha(B(p_1 - p_2)) - mQ_\alpha(p_1 - p_2) > 0,$$

czego należało dowieść.  $\square$

W świetle powyższego lematu, weryfikacja warunków stożka może być przeprowadzona na komputerze z wykorzystaniem ścisłych metod arytmetyki interwałowej. Znanych jest bowiem wiele algorytmów pozwalających sprawdzić dodatnią określoność macierzy (zob. np. [2], [31], [33]). Ponadto dostępne są również techniki automatycznego różniczkowania funkcji, dzięki którym możemy znaleźć domknięcia interwałowe macierzy Jacobiego (zob. np. [30]).

Widzimy więc, że przy użyciu komputera możemy zweryfikować założenia Twierdzeń 3.19 oraz 3.20, wykazujących istnienie różnorodności stabilnych/niestabilnych w dyskretnych układach dynamicznych.

Okazuje się, że korzystając z komputera możemy przeprowadzić również weryfikację założeń analogicznego twierdzenia dla układów ciągłych generowanych przez równania różniczkowe (tj. Twierdzenia 4.6). Rozważmy więc autonomiczne równanie różniczkowe

$$x' = F(x),$$

zakładając przy tym, że pole wektorowe

$$F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$$

jest klasy  $C^1$ , gdzie zbiór  $D \subset \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^s = \mathbb{R}^n$  jest obszarem. Niech  $U \subset D$  będzie wypukłym zbiorem otwartym. Przypuśćmy, że istnieją  $\mu, L, M > 0$  takie, że dla dowolnego  $p \in U$  spełnione są nierówności

$$\|F(p)\| \leq \mu, \quad (5.2)$$

$$\|DF(p)\| \leq L, \quad (5.3)$$

oraz dla dowolnych  $p_1, p_2 \in U$

$$\|DF(p_1) - DF(p_2)\| \leq M \|p_1 - p_2\|. \quad (5.4)$$

Niech

$$[DF(U)] \subset \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 & \mathbf{B} \end{pmatrix}, \quad (5.5)$$

gdzie  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_1$  oraz  $\boldsymbol{\varepsilon}_2$  są macierzami interwałowymi o wymiarach odpowiednio  $u \times u$ ,  $s \times s$ ,  $u \times s$  oraz  $s \times u$ .

Weryfikacja założeń Twierdzenia 4.6 może zostać przeprowadzona w oparciu o Lemat 5.3, który przedstawiamy w dalszej części tego rozdziału. Zanim jednak przejdziemy do jego dowodu podamy następujący rezultat.

**Lemat 5.2** *Przypuśćmy, że funkcja  $F$  spełnia warunki (5.2-5.4). Niech  $g_1, g_2$  określone na pewnym otwartym podzbiornie wypukłym  $\Omega$  zbioru  $U^2 \times \mathbb{R}$ , będą dane jako*

$$\begin{aligned} g_1(p_1, p_2, t) &= \phi_t(p_1) - \phi_t(p_2) - (p_1 - p_2), \\ g_2(p_1, p_2, t) &= F(\phi_t(p_1)) - F(\phi_t(p_2)) - (F(p_1) - F(p_2)). \end{aligned}$$

Wówczas prawdziwe są następujące nierówności

$$\|g_1(p_1, p_2, t)\| \leq (e^{|t|L} - 1) \|p_1 - p_2\|, \quad (5.6)$$

$$\|g_2(p_1, p_2, t)\| \leq \left( L(e^{|t|L} - 1) + |t| e^{|t|L} \mu M \right) \|p_1 - p_2\|, \quad (5.7)$$

dla dowolnych  $p_1, p_2 \in U$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , takich, że  $(p_1, p_2, t) \in \Omega$ .

*Dowód* Dowód znajduje się w Dodatku A. □

**Lemat 5.3** *Niech  $Q_\alpha(x, y) = \alpha^2 \|x\|^2 - \|y\|^2$ , gdzie  $\alpha > 0$  oraz niech  $\nu \in \mathbb{R}$ . Przypuśćmy, że funkcja  $F$  spełnia warunki (5.2-5.5). Załóżmy ponadto, że macierze interwałowe*

$$\begin{aligned} \mathbf{A} - \frac{1}{2} \left( \|\epsilon_1\| + \frac{1}{\alpha^2} \|\epsilon_2\| + 2\nu \right) \text{Id}, \\ -\mathbf{B} + \frac{1}{2} \left( -\|\epsilon_2\| - \alpha^2 \|\epsilon_1\| + 2\nu \right) \text{Id}, \end{aligned}$$

są dodatnio określone. Wówczas dla dostatecznie małego  $t > 0$ , odwzorowanie  $\phi_t$  spełnia warunki stożka dla  $(Q_\alpha, m(t))$  w  $U$ , gdzie  $m(t) = 1 + t2\nu$ .

*Dowód* Niech  $g_1$  i  $g_2$  będą funkcjami zdefiniowanymi w wypowiedzi Lematu 5.2. Przez  $Q_\alpha$  oznaczmy macierz formy kwadratowej  $Q_\alpha$  wymiaru  $(u + s) \times (u + s)$ , to jest  $Q_\alpha(p) = p^T Q_\alpha p$ , oraz niech

$$C = \int_0^1 DF((1 - \tau)p_2 + \tau p_1) d\tau \in [DF(U)].$$

Wówczas

$$C(p_1 - p_2) = F(p_1) - F(p_2).$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} Q_\alpha(\phi_t(p_1) - \phi_t(p_2)) \\ &= (\phi'_t(p_1) - \phi'_t(p_2))^T Q_\alpha(\phi_t(p_1) - \phi_t(p_2)) \\ & \quad + (\phi_t(p_1) - \phi_t(p_2))^T Q_\alpha(\phi'_t(p_1) - \phi'_t(p_2)) \\ &= (F(\phi_t(p_1)) - F(\phi_t(p_2)))^T Q_\alpha(\phi_t(p_1) - \phi_t(p_2)) \\ & \quad + (\phi_t(p_1) - \phi_t(p_2))^T Q_\alpha(F(\phi_t(p_1)) - F(\phi_t(p_2))) \\ &= (F(p_1) - F(p_2) + g_2(p_1, p_2, t))^T Q_\alpha(p_1 - p_2 + g_1(p_1, p_2, t)) \\ & \quad + (p_1 - p_2 + g_1(p_1, p_2, t))^T Q_\alpha(F(p_1) - F(p_2) + g_2(p_1, p_2, t)) \\ &= (p_1 - p_2)^T (C^T Q_\alpha + Q_\alpha C) (p_1 - p_2) + g_3(p_1, p_2, t), \end{aligned} \quad (5.8)$$

gdzie na mocy (5.6–5.7) widzimy, że dla dowolnych  $p_1, p_2 \in U$  i  $|t| \leq 1$ , takich, że  $g_i(p_1, p_2, t)$ , jest dobrze zdefiniowane dla  $i \in \{1, 2\}$ , funkcja  $g_3$  spełnia warunek

$$|g_3(p_1, p_2, t)| \leq b |t| \|p_1 - p_2\|^2,$$

dla pewnej stałej  $b$  zależnej od  $\mu, L, M$  oraz  $\alpha$ .

Ponieważ  $C \in [DF(N)]$ , więc macierz ta ma postać

$$C = \begin{pmatrix} A & \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 & B \end{pmatrix},$$

gdzie  $A \in \mathbf{A}$ ,  $B \in \mathbf{B}$ ,  $\varepsilon_1 \in \varepsilon_1$  oraz  $\varepsilon_2 \in \varepsilon_2$ . Korzystając z faktu, że

$$x^T \varepsilon_i y \geq -\|\varepsilon_i\| \|x\| \|y\| \geq -\frac{1}{2} \|\varepsilon_i\| (x^T x + y^T y) \quad \text{dla } i = 1, 2$$

dla  $p = (x, y) \neq 0$  mamy

$$\begin{aligned} p^T \mathcal{Q}_\alpha C p &= \alpha^2 x^T A x + \alpha^2 x^T \varepsilon_1 y - y^T \varepsilon_2 x - y^T B y & (5.9) \\ &\geq \alpha^2 x^T A x - \alpha^2 \frac{1}{2} \|\varepsilon_1\| (x^T x + y^T y) \\ &\quad - \frac{1}{2} \|\varepsilon_2\| (x^T x + y^T y) - y^T B y \\ &= \alpha^2 x^T \left( A - \frac{1}{2} \left( \|\varepsilon_1\| + \frac{1}{\alpha^2} \|\varepsilon_2\| \right) \text{Id} \right) x \\ &\quad - y^T \left( B + \frac{1}{2} \left( \alpha^2 \|\varepsilon_1\| + \|\varepsilon_2\| \right) \text{Id} \right) y \\ &> \alpha^2 \nu \|x\|^2 - \nu \|y\|^2 \\ &= \nu p^T \mathcal{Q}_\alpha p. \end{aligned}$$

Analogicznie wykazujemy, że dla  $p \neq 0$

$$p^T C^T \mathcal{Q}_\alpha p > \nu p^T \mathcal{Q}_\alpha p. \quad (5.10)$$

Korzystając z (5.8), (5.9) oraz (5.10), biorąc  $p_1 \neq p_2$ , dla pewnego  $\xi \in [-t, t]$  (które może zależeć od  $p_1, p_2$  i  $t$ ),

$$\begin{aligned} &Q_\alpha (\phi_t(p_1) - \phi_t(p_2)) \\ &= Q_\alpha (\phi_t(p_1) - \phi_t(p_2)) \Big|_{t=0} + t \frac{d}{ds} Q_\alpha (\phi_s(p_1) - \phi_s(p_2)) \Big|_{s=\xi} \\ &= Q_\alpha (p_1 - p_2) + t (p_1 - p_2)^T (C^T \mathcal{Q}_\alpha + \mathcal{Q}_\alpha C) (p_1 - p_2) + t g_3(p_1, p_2, \xi) \\ &> (1 + 2t\nu) Q_\alpha (p_1 - p_2) + t g_3(p_1, p_2, \xi). \end{aligned}$$

Ponieważ

$$\|t g_3(p_1, p_2, \xi)\| \leq b t^2 \|p_1 - p_2\|^2,$$

widzimy, że dla dostatecznie małego  $|t|$

$$Q_\alpha (\phi_t(p_1) - \phi_t(p_2)) \geq (1 + 2t\nu) Q_\alpha (p_1 - p_2),$$

co należało wykazać. □

---

**Uwaga 5.4** Należy podkreślić, że w świetle powyższego lematu, założenia Twierdzenia 4.6 wynikają bezpośrednio z oszacowań nałożonych na pole wektorowe. Aby je zweryfikować nie ma więc potrzeby całkować równania różniczkowego.



## Ograniczony Kołowy Problem Trzech Ciał

W rozdziale tym pokażemy w jaki sposób możemy zastosować metody przedstawione w poprzednich rozdziałach do przeprowadzenia wspieranego komputerowo dowodu istnienia orbity homoklinicznej w Ograniczonym Kołowym Problemie Trzech Ciał. Opisane poniżej zastosowanie prezentujemy w oparciu o pracę [15].

### 6.1. Opis problemu

Założenia Ograniczonego Kołowego Problemu Trzech Ciał są następujące: dwa ciała poruszają się pod wpływem wzajemnego oddziaływania grawitacyjnego na płaszczyźnie po orbicie kołowej dookoła swojego środka masy. Trzecie ciało (punkt materialny) porusza się w tej samej płaszczyźnie co pozostałe dwa, przyciągane ich siłami grawitacyjnymi, jednak nie wpływając w żaden sposób na ich ruch. Zagadnienie polega na opisaniu ruchu trzeciego ciała.

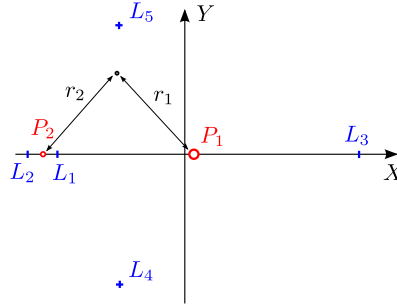
Z reguły dwa rotujące ciała (które bardzo często utożsamia się z planetą i księżycem, lub z gwiazdą i planetą) nazywa się *ciałami głównymi*, natomiast trzecie ciało (rozważane jako sztuczny satelita lub statek kosmiczny o zaniedbywalnej masie) to *ciało orbitujące*.

Problem rozważymy w rotującym układzie współrzędnych, o początku w środku masy układu ciał głównych. Płaszczyzna  $XOY$  rotuje razem z ciałami głównymi, które znajdują się na osi  $OX$ .

Jednostkę masy dobieramy w taki sposób, żeby masy  $\mu_1$  i  $\mu_2$  ciał głównych spełniały warunek  $\mu_1 + \mu_2 = 1$ . Takie przeskalowanie implikuje, że wówczas odległość między tymi ciałami wynosi 1 (zob. Szebehelly [35], Rozdział 1.5). Od tej pory większe ciało główne będziemy nazywać „słońcem”, a mniejsze „planetą”. Przyjmiemy konwencję, w której w rotującym układzie współrzędnych słońce znajduje się po prawej stronie początku układu, w punkcie o współrzędnych  $P_1 = (\mu, 0)$ , natomiast planeta jest umiejscowiona w  $P_2 = (\mu - 1, 0)$ .

Równania ruchu trzeciego ciała dane są jako (zob. [35])

$$\begin{cases} \ddot{X} - 2\dot{Y} = \Omega_X, \\ \ddot{Y} + 2\dot{X} = \Omega_Y, \end{cases} \quad (6.1)$$



Rysunek 6.1. Rotujący układ współrzędnych, o początku w środku masy układu ciał głównych. Słońce ma masę  $1 - \mu$  i leży w punkcie  $P_1 = (\mu, 0)$ . Planeta o masie  $\mu$  jest położona w  $P_2 = (\mu - 1, 0)$ . Trzecie ciało (punkt materialny) porusza się w płaszczyźnie  $XOY$ .

gdzie

$$\Omega = \frac{1}{2}(X^2 + Y^2) + \frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2},$$

oraz  $r_1, r_2$  są odległościami ciała orbitującego od odpowiednio większego i mniejszego ciała głównego (zob. Rysunek 6.1)

$$\begin{aligned} r_1^2 &= (X - \mu)^2 + Y^2, \\ r_2^2 &= (X - \mu + 1)^2 + Y^2. \end{aligned}$$

Równania te mają całkę pierwszą (zob. [35]) zwaną całką Jacobiego

$$C = 2\Omega - (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2).$$

Równania ruchu przyjmują formę Hamiltonowską, jeżeli rozważymy układ w nowych współrzędnych: położenia  $X$  i  $Y$  oraz pędów uogólnionych  $P_X = \dot{X} - Y$ ,  $P_Y = \dot{Y} + X$ . Wówczas Hamiltonian jest równy

$$H = \frac{1}{2}(P_X^2 + P_Y^2) + YP_X - XP_Y - \frac{1 - \mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2}, \quad (6.2)$$

natomiast pole wektorowe dane jest jako

$$F = J\nabla H, \quad (6.3)$$

gdzie

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \text{Id}_2 \\ -\text{Id}_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{Id}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Związek Hamiltonianu z całką Jacobiego wyraża się równością  $H = -\frac{C}{2}$ .

Z uwagi na obecność całki pierwszej, wymiar systemu może być zredukowany o jeden. Trajektorie układu pozostają na *powierzchni energii*  $M$  zadanej równością  $H(X, Y, P_X, P_Y) = h = \text{constant}$ . Równoważnie,  $M$  może być zdefiniowana jako poziomica całki Jacobiego, tj.

$$M \equiv \{C(X, Y, \dot{X}, \dot{Y}) = c = -2h\}. \quad (6.4)$$

Problem cechuje się odwróconą symetrią (ang. *reversing symmetry*), to znaczy dla dowolnego  $(X, Y, P_X, P_Y) \in \mathbb{R}^4$  i dowolnego  $t \in \mathbb{R}$  prawdziwa jest równość

$$S(\phi^t(X, Y, P_X, P_Y)) = \phi^{-t}(S(X, Y, P_X, P_Y)), \quad (6.5)$$

gdzie  $\phi^t$  jest potokiem pola wektorowego (6.3), a odwzorowanie  $S$  dane jest jako

$$S(X, Y, P_X, P_Y) = (X, -Y, -P_X, P_Y). \quad (6.6)$$

Układ posiada pięć punktów równowagi (zob. [35]). Trzy z nich, oznaczane zwyczajowo  $L_1, L_2$  oraz  $L_3$ , leżą na osi  $OX$  i z reguły są nazywane *współliniowymi punktami równowagi* (zob. Rysunek 6.1). Zauważmy, że przez  $L_1$  oznaczyliśmy *środkowy* punkt współliniowy, znajdujący się pomiędzy ciałami głównymi.

Macierz Jacobiego pola wektorowego w  $L_1$  ma dwie rzeczywiste i dwie czysto urojone wartości własne. Punkt ten ma jednowymiarową rozmaitość niestabilną. Na mocy (6.5), jednowymiarowa rozmaitość stabilna tego punktu jest  $S$ -symetryczna do rozmaitości niestabilnej.

W swojej pracy Llibre, Martinez i Simó [27] wykazali, że dla odpowiednio dobranej rodziny parametrów  $\mu \in \{\mu_k^*\}_{k=2}^\infty, \mu_{k+1}^* < \mu_k^*$ , rozmaitości stabilna i niestabilna punktu libracji  $L_1^{\mu_k^*}$  przecinają się, prowadząc do powstania orbity homoklinicznej. Praca [27] zawiera numeryczne potwierdzenie istnienia takiej orbity m.in. dla największego z tych parametrów (tj.  $\mu_2^*$ ) oraz dowód analityczny dla dostatecznie małego  $\mu_k^*$ .

Celem Rozdziału 6 jest pokazanie, że korzystając z naszej metody możemy w sposób ścisły wyznaczyć domknięcia interwałowe rozmaitości stabilnej i niestabilnej, a następnie zweryfikować istnienie orbit homoklinicznych dla dużych wartości  $\mu_k^*$ . Naszą uwagę skoncentrujemy na największym z parametrów, tj.

$$\mu_2^* \approx 0.004253863522$$

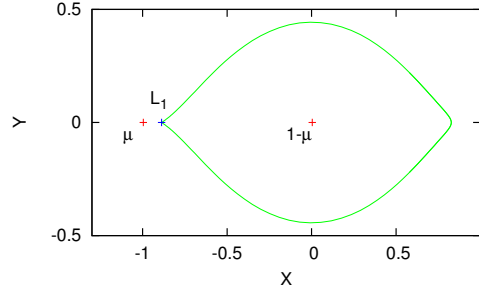
i wykażemy, że

$$\mu_2^* \in 0.004253863522 + 10^{-10} [-1, 1].$$

Znaleziona homklinika została przedstawiona na Rysunku 6.2.

**Uwaga 6.1** Nasze oszacowanie parametru, dla którego homoklinika punktu  $L_1^{\mu_2^*}$  istnieje, jest bardzo dokładne. Wynika to z faktu, że przedstawiona przez nas metoda znajdowania rozmaitości niezmienniczych, daje ścisłe ograniczenia tych rozmaitości. Pokazuje to, że jest to narzędzie, które może być efektywnie zastosowane do nietrywialnych problemów.

**Uwaga 6.2** W naszych rozważaniach wykorzystujemy parametr  $\mu_2^*$  z uwagi na to, że jest on największy, a więc najbardziej odległy od dowodu analitycznego przeprowadzonego w [27]. Korzystając z naszej metody możliwe jest również uzyskanie dowodu wspomaganego komputerowo dla innych parametrów. Jednakże, wraz ze zmniejszeniem się parametrów, dowód staje się coraz bardziej wymagający numerycznie.



Rysunek 6.2. Na zielono została zaznaczona orbita homokliniczna, na czerwono masy, natomiast na niebiesko punkt równowagi  $L_1$ .

## 6.2. Odpowiednia zamiana współrzędnych

Aby móc wykorzystać Twierdzenie 4.6, rozważymy dany układ w lokalnych współrzędnych. Zamiana współrzędnych zostanie przeprowadzona w dwóch krokach, w sposób opisany poniżej. W pierwszym kroku zastosujemy liniową zamianę współrzędnych, dzięki której macierz Jacobiego pola wektorowego w otoczeniu punktu równowagi przyjmie postać Jordana. Drugim etapem będzie nieliniowa zmiana współrzędnych, która jeszcze bardziej „naprostuje” kierunek niestabilny.

Zacniemy od omówienia liniowej zmiany współrzędnych. Punkt libracji ma postać

$$L_1 = (X_{L_1}, 0, 0, X_{L_1}).$$

Macierz Jacobiego pola wektorowego w  $L_1$  ma wartość własną skojarzoną z kierunkiem niestabilnym, którą oznaczymy jako  $\lambda$ , przeciwną do niej i skojarzoną z kierunkiem stabilnym wartość własną  $-\lambda$ , a także dwie sprzężone wartości własne skojarzone z kierunkiem centralnym, które oznaczymy przez  $iv$  oraz  $-iv$  (gdzie  $v > 0$ ). Wartości  $\lambda$  i  $v$  dane są przy tym jako (zob. [24], Rozdział B.2)

$$\lambda = \sqrt{\frac{c_2 - 2 + \sqrt{9c_2^2 - 8c_2}}{2}}, \quad (6.7)$$

$$v = \sqrt{\frac{-c_2 + 2 + \sqrt{9c_2^2 - 8c_2}}{2}}, \quad (6.8)$$

gdzie

$$c_2 = \frac{1}{\gamma^3} \left( \mu + \frac{(1-\mu)\gamma^3}{(1-\gamma)^3} \right),$$

$$\gamma = X_{L_1} + 1 - \mu.$$

Liniową zamianę zmiennych zdefiniujemy w oparciu o następującą macierz (zob. [24], Rozdział B.2)

$$C = \begin{pmatrix} \frac{2\lambda}{s_1} & \frac{-2\lambda}{s_1} & 0 & \frac{2v}{s_2} \\ \frac{\lambda^2 - 2c_2 - 1}{s_1} & \frac{\lambda^2 - 2c_2 - 1}{s_1} & \frac{-v^2 - 2c_2 - 1}{s_1} & 0 \\ \frac{\lambda^2 + 2c_2 + 1}{s_1} & \frac{\lambda^2 + 2c_2 + 1}{s_1} & \frac{-v^2 + 2c_2 + 1}{s_1} & 0 \\ \frac{\lambda^3 + (1 - 2c_2)\lambda}{s_1} & \frac{-\lambda^3 - (1 - 2c_2)\lambda}{s_1} & 0 & \frac{-v^3 + (1 - 2c_2)v}{s_2} \end{pmatrix}, \quad (6.9)$$

przy czym stałe  $s_1, s_2$  dane są jako

$$\begin{aligned} s_1 &= \sqrt{2\lambda((4+3c_2)\lambda^2 + 4 + 5c_2 - 6c_2^2)}, \\ s_2 &= \sqrt{v((4+3c_2)v^2 - 4 - 5c_2 + 6c_2^2)}. \end{aligned}$$

Oznaczając przez  $p = (X, Y, P_X, P_Y)$  współrzędne wyjściowe rozważanego problemu, wprowadzimy lokalne współrzędne  $\hat{p}$  w otoczeniu  $L_1$  zdefiniowane równością

$$p = L_1 + C\hat{p}.$$

We współrzędnych  $\hat{p}$ , pole wektorowe dane jest jako

$$\hat{F}(\hat{p}) = C^{-1}F(L_1 + C\hat{p}),$$

przy czym jacobian pola wektorowego w zerze ma postać

$$D\hat{F}(0) = \text{diag}(A_h, A_c),$$

gdzie

$$A_h = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} \quad \text{oraz} \quad A_c = \begin{pmatrix} 0 & v \\ -v & 0 \end{pmatrix}.$$

Macierz  $A_h$  odpowiada zlinearyzowanej dynamice hiperbolicznej, natomiast  $A_c$  odpowiada rotacji w kierunku centralnym w punkcie równowagi.

**Uwaga 6.3** Podkreślamy, że pole wektorowe (6.3) zależy od parametru  $\mu$ . Stąd też zarówno współrzędne punktu libracji  $L_1$ , jak i macierz  $C$  oraz wartości  $\lambda$  oraz  $v$  dla różnych  $\mu$  przyjmują różną wartość. Jednak w celu uproszczenia notacji celowo pominięliśmy tę zależność w użytych przez nas powyżej oznaczeniach.

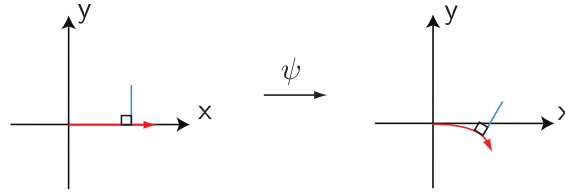
Kolejnym krokiem będzie zastosowanie nieliniowej zamiany współrzędnych

$$\psi : \mathbb{R}^4 \ni (x, y_1, y_2, y_3) = \hat{p} \rightarrow \hat{p} \in \mathbb{R}^4.$$

Odwzorowanie  $\psi$  będziemy chcieli zdefiniować w taki sposób, żeby dla dostatecznie małych wartości  $x$  punkty postaci  $\psi(x, 0)$  znajdowały się możliwie blisko rozmaitości niestabilnej układu we współrzędnych  $\hat{p}$  (zob. Rysunek 6.3). Niech więc  $K = (K_1, K_2, K_3, K_4) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$  będzie wektorem wielomianów. Załóżmy, że  $K$  jest numerycznym przybliżeniem pewnej funkcji parametryzującej rozmaitość niestabilną zera w pewnym jego otoczeniu. Zdefiniujemy  $\psi = (\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3)$  jako

$$\begin{aligned} \psi_0(x, y_1, y_2, y_3) &= K_0(x) - (y_1 K_1'(x) + y_2 K_2'(x) + y_3 K_3'(x)), \\ \psi_i(x, y_1, y_2, y_3) &= K_i(x) + y_i K_0'(x) \quad \text{dla } i = 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Zauważmy, że wówczas dla dowolnego  $x$  spełniona jest równość  $\psi(x, 0) = K(x)$ . Z uwagi na to, że  $K$  dobraliśmy w taki sposób, aby przybliżało rozmaitość niestabilną układu we współrzędnych  $\hat{p}$ , punkty postaci  $\psi(x, 0)$  znajdują się blisko tej rozmaitości. Intuicyjną ideą motywującą postać zamiany współrzędnych (6.10) jest takie przearanżowanie współrzędnych, żeby  $\psi(x, y_1, y_2, y_3) - K(x)$  było prostopadłe do  $K'(x)$  (zob. Rysunek 6.3).



Rysunek 6.3. Rozmaitość niestabilna w lokalnych współrzędnych  $(x, y_1, y_2, y_3)$  (po lewej), oraz we współrzędnych  $\hat{p}$  (po prawej).

**Uwaga 6.4** Odwzorowanie  $K$  może być wyznaczone jako przybliżone rozwiązanie tzw. *równania kohomologii*, tj. równania postaci

$$\hat{F}(K(x)) = R(x)DK(x), \quad (6.11)$$

gdzie  $K : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$  i  $R : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  są funkcjami analitycznymi. Wykres funkcji  $K$  rozwiązującej powyższe równanie parametryzuje rozmaitość niestabilną punktu równowagi w pewnym jego otoczeniu. Przybliżona postać  $K$  oraz  $R$  może być wyznaczona numerycznie (zob. [10]).

**Uwaga 6.5** Z uwagi na wspomnianą przez nas wcześniej zależność pola wektorowego  $\hat{F}$  od parametru  $\mu$  równanie (6.11) również jest parametryzowane przez  $\mu$ . Jednakże do naszych zastosowań wystarczające jest wykorzystanie do nieliniowej zamiany współrzędnych tej samej (dla całej rodziny parametrów  $\mu$ ) postaci numerycznie wyznaczonego wielomianu  $K$ .

Jako rezultat złożenia liniowej i nieliniowej zamiany współrzędnych otrzymujemy zamianę współrzędnych  $\Psi : \mathbb{R}^4 \ni \hat{p} \rightarrow p \in \mathbb{R}^4$  gdzie  $\hat{p} = (x, y_1, y_2, y_3)$ , zdefiniowaną jako

$$p = \Psi(\hat{p}) := L_1 + C\psi(\hat{p}). \quad (6.12)$$

Pole wektorowe we współrzędnych  $\hat{p}$  dane jest jako

$$\hat{F}(\hat{p}) = (D\Psi(\hat{p}))^{-1} F(\Psi(\hat{p})). \quad (6.13)$$

**Uwaga 6.6** W naszym przypadku zastosowanie nieliniowej zamiany współrzędnych nie jest absolutnie konieczne. Nawet w przypadku użycia wyłącznie liniowej zamiany współrzędnych jesteśmy w stanie otrzymać zadowalające wyniki, jednakże będą one mniej dokładne. Zdecydowaliśmy się dodać nieliniową zamianę współrzędnych aby zaprezentować, że takie techniki również można wykorzystać w naszych zastosowaniach. Zwracamy jednak uwagę, że w takim przypadku należy wykazać nieco ostrożności podczas obliczania pochodnej pola wektorowego w lokalnych współrzędnych. Kwestia ta zostanie dokładniej przedyskutowana w Rozdziale 6.3.

### 6.3. Domknięcie interwałowe zbioru niestabilnego dla całego przedziału parametrów

Rozważmy równanie (6.3) z parametrem  $\mu \in \boldsymbol{\mu}$ , gdzie

$$\boldsymbol{\mu} = 0.004253863522 + 10^{-10}[-1, 1]. \quad (6.14)$$

Naszym celem będzie znalezienie ciągłej rodziny punktów  $\{p_\mu^u\}_{\mu \in \boldsymbol{\mu}}$  takiej, że dla dowolnego  $\mu$  punkt  $p_\mu^u$  należy do zbioru niestabilnego punktu równowagi  $L_1^\mu$  równania (6.3). W tym celu rozważymy równanie (6.3) w lokalnych współrzędnych  $\hat{p} = \hat{p}_\mu$ , które zostały przez nas opisane równaniem (6.12), a następnie zastosujemy Twierdzenie 4.6. Wyniki uzyskanych przez nas w tym postępowaniu obliczeń numerycznych zostaną podane w Rozdziale 6.6.

Pierwszym krokiem będzie wyznaczenie domknięcia interwałowego rodziny punktów równowagi  $\{L_1^\mu\}_{\mu \in \boldsymbol{\mu}}$ . Korzystając ze zmodyfikowanej Interwałowej Metody Newtona (Twierdzenie 1.19) otrzymujemy, że  $\{L_1^\mu : \mu \in \boldsymbol{\mu}\} \subset \mathbf{L}_1$  dla pewnego wektora interwałowego  $\mathbf{L}_1 \in I(\mathbb{R}^4)$ .

Następnie wyznaczamy domknięcia interwałowe zbiorów  $\{\lambda_\mu : \mu \in \boldsymbol{\mu}\}$  oraz  $\{v_\mu : \mu \in \boldsymbol{\mu}\}$  dla  $\lambda_\mu, v_\mu$  zdefiniowanych przez nas w Rozdziale 6.2 i danych odpowiednio jako (6.7) oraz (6.8). Otrzymane interwały oznaczmy przez odpowiednio  $\boldsymbol{\lambda}$  oraz  $\mathbf{v}$ .

Dysponując interwałami  $\boldsymbol{\mu}, \mathbf{L}_1, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v}$  i korzystając z (6.9) możemy zdefiniować macierz interwałową  $\mathbf{C}$  będącą domknięciem interwałowym zbioru macierzy  $\{C_\mu : \mu \in \boldsymbol{\mu}\}$ . Następnie definiujemy interwałowe pole wektorowe  $\hat{\mathbf{F}} : I(\mathbb{R}^4) \rightarrow I(\mathbb{R}^4)$  jako

$$\hat{\mathbf{F}}(\hat{\mathbf{p}}) = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{L}_1 + \mathbf{C}\hat{\mathbf{p}}).$$

Wówczas dla dowolnego  $\mu \in \boldsymbol{\mu}$  pole  $\hat{\mathbf{F}}$  jest rozszerzeniem interwałowym pola wektorowego  $\hat{F}_\mu$  z Rodziału 6.2.

Aby znaleźć rozszerzenie interwałowe pola  $\hat{F}$  przyjmijmy następującą postać odzworowania  $K$ , będącego przybliżonym rozwiązaniem równania (6.11)

$$\begin{aligned} K_0(x) &= x, \\ K_1(x) &= -0.4426997319120566x^2 + 0.2117307906593041x^3, \\ K_2(x) &= 0.7204702544171099x^2 - 0.2077414984788253x^3, \\ K_3(x) &= 0.6096754412253178x^2 - 1.6248371332133488x^3. \end{aligned} \quad (6.15)$$

i zdefiniujmy nieliniową zamianę zmiennych  $\psi$  jako (6.10). Niech  $\boldsymbol{\psi}$  będzie rozszerzeniem interwałowym funkcji  $\psi$ . Wówczas funkcja interwałowa  $\boldsymbol{\Psi} : I(\mathbb{R}^4) \ni \hat{\mathbf{p}} \rightarrow \mathbf{p} \in I(\mathbb{R}^4)$  dana jako

$$\boldsymbol{\Psi}(\hat{\mathbf{p}}) := \mathbf{L}_1 + \mathbf{C}\boldsymbol{\psi}(\hat{\mathbf{p}})$$

jest dla dowolnego  $\mu \in \boldsymbol{\mu}$  rozszerzeniem interwałowym całkowitej zamiany zmiennych  $\Psi_\mu$ , natomiast interwałowe pole wektorowe  $\hat{\mathbf{F}}$  zdefiniowane jako

$$\hat{\mathbf{F}}(\hat{\mathbf{p}}) = (D\boldsymbol{\Psi}(\hat{\mathbf{p}}))^{-1} \mathbf{F}(\boldsymbol{\Psi}(\hat{\mathbf{p}})).$$

jest rozszerzeniem interwałowym pola  $\hat{F}_\mu$ .

Drugim krokiem będzie wykazanie, że dla dowolnego  $\mu \in \boldsymbol{\mu}$  pole wektorowe  $\hat{F}_\mu$  spełnia założenia Twierdzenia 4.6 (dla punktu równowagi  $\hat{p}_\mu^* = 0$ ). W tym celu ustalmy  $r_u, r_s, \alpha, \nu_\alpha, \nu_\beta$ . Założenia Twierdzenia 4.6 weryfikujemy w oparciu o Lemat 5.3, przyjmując

$$U = [-r_u, r_u] \times [-r_s, r_s]^3.$$

Zauważmy, że dla tak dobranego  $U$  spełniona jest inkluzja  $N(0, r_u, r_s) \subset U$ , gdzie

$$N(0, r_u, r_s) = \overline{B}_1(r_u) \times \overline{B}_3(r_s). \quad (6.16)$$

Jako macierze interwałowe  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2$  przyjmujemy przy tym macierze spełniające

$$D\hat{\mathbf{F}}(U) \subset \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 & \mathbf{B} \end{pmatrix}.$$

Naszym celem jest, aby interwałowe macierze  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2$  były możliwie namniejszej w sensie inkluzji. Dlatego wykonując obliczenia numeryczne dokonujemy podziału zbioru  $U$  i obliczamy pochodną  $D\hat{\mathbf{F}}$  na każdym z mniejszych podzbiorów, a jako wynik końcowy bierzemy domknięcie interwałowe zbioru otrzymanych częściowych wyników. Wyniki opisanych powyżej obliczeń numerycznych prezentujemy w Rozdziale 6.6.

**Uwaga 6.7** Aby znaleźć pochodną pola wektorowego w lokalnych współrzędnych  $\hat{p}$  możemy skorzystać z następującego rozumowania. Zauważmy, że na mocy (6.13) mamy

$$D\Psi(\hat{p}) \hat{F}(\hat{p}) = F(\Psi(\hat{p})),$$

skąd po obustronnym różniczkowaniu dostajemy

$$D^2\Psi(\hat{p}) \hat{F}(\hat{p}) + D\Psi(\hat{p}) D\hat{F}(\hat{p}) = DF(\Psi(\hat{p})) D\Psi(\hat{p}).$$

W takim razie

$$D\hat{F}(\hat{p}) = (D\Psi(\hat{p}))^{-1} (DF(\Psi(\hat{p})) D\Psi(\hat{p}) - D^2\Psi(\hat{p}) \hat{F}(\hat{p})), \quad (6.17)$$

co pozwala nam obliczyć  $D\hat{F}(\hat{p})$ .

Wykorzystując Lemat 5.3 udało nam się zweryfikować, że pole wektorowe  $\hat{F}_\mu$  wraz z punktem równowagi  $\hat{p}_\mu^* = 0$  spełniają założenia Twierdzenia 4.6 dla dowolnego  $\mu \in \boldsymbol{\mu}$  z odpowiednio dobranymi przez nas stałymi  $r_u, r_s, \alpha, \beta, \nu_\alpha, \nu_\beta$ , których wartości są takie same dla wszystkich parametrów  $\mu$ . Dla ustalonego  $\mu$  przez

$$W_{\nu_\alpha, \hat{N}}^u(0; \hat{F}_\mu)$$

oznaczymy więc zbiór silnie niestabilny punktu równowagi 0 równania  $\frac{d}{dt}\hat{p} = F_\mu(\hat{p})$ , ze współczynnikiem ekspansji  $\nu_\alpha$  w otoczeniu

$$\hat{N} = N(0, r_u, r_s)$$

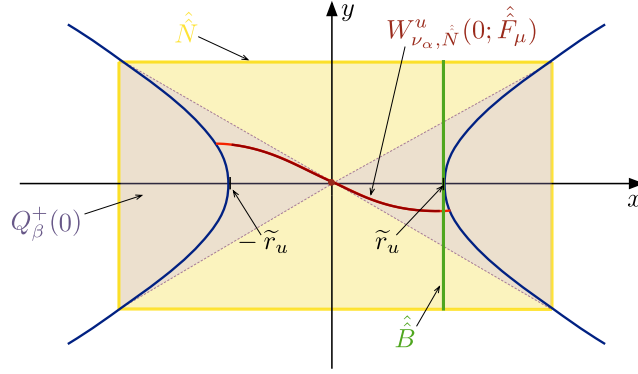
danym równością (6.16). Ponadto niech

$$\tilde{r}_u = r_u \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-2}}, \quad (6.18)$$

dla  $\beta = \frac{r_s}{r_u}$ . Wówczas w konsekwencji Twierdzenia 4.6 istnieje funkcja  $y_\mu^u : [-\tilde{r}_u, \tilde{r}_u] \rightarrow \overline{B}_3(r_s)$ , dla której

$$W_{\nu_\alpha, \hat{N}}^u(0; \hat{F}_\mu) \cap ([-\tilde{r}_u, \tilde{r}_u] \times \mathbb{R}^3) = \{(x, y_\mu^u(x)) : x \in [-\tilde{r}_u, \tilde{r}_u]\}. \quad (6.19)$$





Rysunek 6.4. Zbiór niestabilny punktu  $L_1$  we współrzędnych lokalnych  $\hat{p}$ . Dla dowolnego parametru  $\mu \in \boldsymbol{\mu}$  zbiór niestabilny w lokalnych współrzędnych  $(x, y_1, y_2, y_3)$  (na czerwono) przecina zbiór  $\hat{B} = \{\tilde{r}_u\} \times \overline{B}_3(r_s)$  (na zielono).

Zdefiniujmy rodzinę punktów  $\{\hat{p}_\mu^u\}_{\mu \in \boldsymbol{\mu}}$  jako

$$\hat{p}_\mu^u = (\tilde{r}_u, y_\mu^u(\tilde{r}_u)). \quad (6.20)$$

Wówczas w konsekwencji Lematu 4.7, z uwagi na możliwość zastosowania odpowiedniej liniowej zamiany współrzędnych dostajemy, że rodzina ta jest ciągła ze względu na parametr  $\mu$ . Oznaczmy

$$p_\mu^u = \Psi(\hat{p}_\mu^u). \quad (6.21)$$

Wówczas na mocy ciągłości  $\Psi$  rodzina punktów  $\{p_\mu^u\}_{\mu \in \boldsymbol{\mu}}$  jest również ciągła. Ponadto korzystając z (6.19) oraz definicji  $\hat{F}_\mu$  dostajemy, że  $p_\mu^u$  należy do zbioru niestabilnego punktu równowagi  $L_1^\mu$  równania (6.3).

## 6.4. Domknięcie interwałowe zbioru niestabilnego na krańcach przedziału parametrów

W Rozdziale 6.3, rozważając przedział parametrów  $\boldsymbol{\mu} = [\underline{\mu}, \overline{\mu}]$  dany jako (6.14) wykazaliśmy istnienie ciągłej rodziny punktów  $\{\hat{p}_\mu^u\}_{\mu \in \boldsymbol{\mu}}$ , takiej, że dla dowolnego  $\mu$  zachodzi inkluzja

$$\hat{p}_\mu^u \in W_{\nu_\alpha, \hat{N}}^u(0; \hat{F}_\mu) \cap \hat{B},$$

gdzie

$$\hat{B} = \{\tilde{r}_u\} \times \overline{B}_3(r_s).$$

dla  $\tilde{r}_u$  danego wzorem (6.18). Naszym celem będzie teraz znalezienie zbioru  $\hat{B}_0$  postaci

$$\hat{B}_0 = \{\tilde{r}_u\} \times \overline{B}_3(r_{s,0}),$$

gdzie  $r_{s,0} < r_s$  takiego, że dla  $\mu \in \{\underline{\mu}, \overline{\mu}\}$  zachodzi

$$\hat{p}_\mu^u \in \hat{B}_0.$$

W tym celu obierzmy  $\delta \in (0, 1)$ , a następnie zdefiniujmy

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \delta\alpha, & \beta_0 &= \delta\beta, \\ \nu_{\alpha_0} &= \nu_\alpha, & \nu_{\beta_0} &= \nu_\beta, \\ r_{u,0} &= r_u, & r_{s,0} &= \delta\beta r_u. \end{aligned} \tag{6.22}$$

Zauważmy przy tym, że wówczas  $\beta_0 = \frac{r_{u,0}}{r_{s,0}}$  oraz

$$r_{u,0} \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha_0}{\beta_0}\right)^{-2}} = r_u \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-2}} = \tilde{r}_u.$$

Ponadto dla  $\hat{N}_0 = N(0, r_{u,0}, r_{s,0}) = B_1(r_{u,0}) \times B_3(r_{s,0})$  spełniona jest inkluzja  $\hat{N}_0 \subset \hat{N}$ . W takim razie dla dowolnego  $\mu$ ,

$$W_{\nu_{\alpha_0}, \hat{N}_0}^u(0; \hat{F}_\mu) \subset W_{\nu_\alpha, \hat{N}}^u(0; \hat{F}_\mu). \tag{6.23}$$

Ustalmy  $\mu \in \{\underline{\mu}, \bar{\mu}\}$ . Postępując analogicznie jak w Rozdziale 6.3 pokazujemy, że pole wektorowe  $\hat{F}_\mu$  wraz z punktem równowagi  $\hat{p}_\mu^* = 0$  spełniają założenia Twierdzenia 4.6 ze stałymi  $r_{u,0}, r_{s,0}, \alpha_0, \beta_0, \nu_{\alpha_0}, \nu_{\beta_0}$ . W konsekwencji zbiór

$$W_{\nu_{\alpha_0}, \hat{N}_0}^u(0; \hat{F}_\mu) \cap \left( [-\tilde{r}_{u,0}, \tilde{r}_{u,0}] \times \mathbb{R}^3 \right)$$

jest wykresem pewnej funkcji określonej na przedziale  $[-\tilde{r}_{u,0}, \tilde{r}_{u,0}] = [-\tilde{r}_u, \tilde{r}_u]$  o wartościach w zbiorze  $B_3(r_{s,0})$ . Na mocy inkluzji (6.23) oraz równości (6.19) musi więc zachodzić

$$W_{\nu_{\alpha_0}, \hat{N}_0}^u(0; \hat{F}_\mu) \cap \left( [-\tilde{r}_{u,0}, \tilde{r}_{u,0}] \times \mathbb{R}^3 \right) = W_{\nu_\alpha, \hat{N}}^u(0; \hat{F}_\mu) \cap \left( [-\tilde{r}_u, \tilde{r}_u] \times \mathbb{R}^3 \right).$$

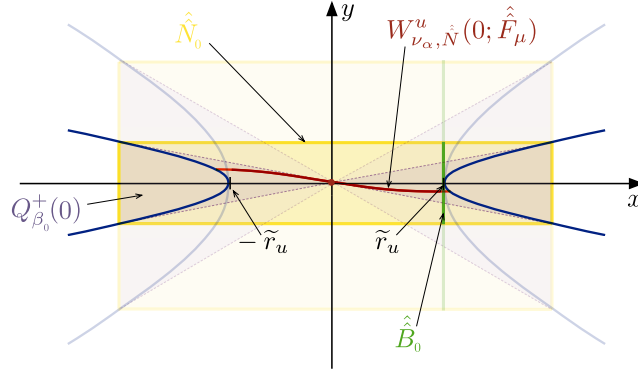
Stąd punkt  $\hat{p}_\mu^u \in W_{\nu_\alpha, \hat{N}}^u(0; \hat{F}_\mu) \cap \left( [-\tilde{r}_u, \tilde{r}_u] \times \mathbb{R}^3 \right)$  zdefiniowany równością (6.20) spełnia

$$\hat{p}_\mu^u \in \{\tilde{r}_u\} \times \bar{B}_3(r_{s,0}) = \hat{B}_0.$$

Zauważmy, że dzięki dobraniu promienia  $r_{s,0}$  tak, aby spełniona była nierówność  $r_{s,0} < r_s$  zachodzi inkluzja  $\hat{B}_0 \subsetneq \hat{B}$ . Pokazuje to, że dla  $\mu$  będących krańcami przedziału  $\underline{\mu}$  oszacowanie znalezione w tym rozdziale na punkty  $\hat{p}_\mu^u$  jest lepsze niż globalne oszacowanie dla całego przedziału parametrów  $\underline{\mu}$  znalezione w Rozdziale 6.3. Tym samym odpowiednie oszacowanie  $B_\mu = \Psi_\mu(\hat{B}_0)$  oraz  $B_{\bar{\mu}} = \Psi_{\bar{\mu}}(\hat{B}_0)$  na punkty  $p_\mu^u$  oraz  $p_{\bar{\mu}}^u$  jest dokładniejsze niż wcześniejsze globalne oszacowanie  $B = \Psi(\hat{B})$ . Znalezienie lepszego oszacowania dla parametrów krańcowych będzie miało kluczowe znaczenie w przeprowadzeniu komputerowo wspieranego dowodu istnienia orbity homoklinicznej.

## 6.5. Dowód istnienia orbity homoklinicznej

Niech dla dowolnego  $\mu \in \underline{\mu}$  dany będzie punkt  $p_\mu^u$  ze zbioru niestabilnego punktu równowagi  $L_1^\mu$  i niech rodzina punktów  $\{p_\mu^u\}_{\mu \in \underline{\mu}}$  będzie ciągła ze względu na parametr  $\mu$ .



Rysunek 6.5. Ścisłejsze oszacowanie zbioru niestabilnego punktu  $L_1$  we współrzędnych lokalnych  $\hat{p}$  otrzymane dla parametrów  $\mu$  leżących na brzegu przedziału  $\boldsymbol{\mu}$ . Dla każdego z parametrów  $\underline{\mu}$  i  $\bar{\mu}$  zbiór niestabilny w lokalnych współrzędnych  $(x, y_1, y_2, y_3)$  (na czerwono) przecina zbiór  $\hat{B}_0 = \{\tilde{r}_u\} \times \bar{B}_3(r_{s,0})$  (na zielono), gdzie  $r_{s,0} < r_s$  dla promienia  $r_s$  rozpatrywanego w Rozdziale 6.3.

Niech  $\{B_\mu\}_{\mu \in \boldsymbol{\mu}}$  będzie rodziną zbiorów takich, że  $p_\mu^u \in B_\mu$ . Przypuśćmy, że dla dowolnego  $\mu \in \boldsymbol{\mu}$  odwzorowanie Poincarégo  $P_\mu : B_\mu \rightarrow \{Y = 0\}$  zdefiniowane jako

$$P_\mu(p) = \phi_\mu^{\tau_\mu(p)}(p), \quad (6.24)$$

gdzie

$$\tau_\mu(p) = \inf \{t > 0 : \pi_Y \phi_\mu^t(p) = 0\},$$

jest dobrze określone. W powyższych równościach przez  $\phi_\mu^t$  rozumiemy potok indukowany przez równanie (6.3) dla ustalonego parametru  $\mu \in \boldsymbol{\mu}$ .

**Lemat 6.8** *Przypuśćmy, że  $\boldsymbol{\mu} = [\underline{\mu}, \bar{\mu}]$ . Jeżeli spełnione są warunki*

$$\pi_{P_X} P_\mu(p) < 0, \quad \text{dla dowolnego } p \in B_\mu, \quad (6.25)$$

$$\pi_{P_X} P_{\bar{\mu}}(p) > 0, \quad \text{dla dowolnego } p \in B_{\bar{\mu}}, \quad (6.26)$$

to wówczas istnieje  $\mu \in (\underline{\mu}, \bar{\mu})$ , dla którego punkt równowagi  $L_1^\mu$  posiada orbitę homokliniczną.

*Dowód* Zauważmy, że jeżeli dla pewnego  $\mu \in \boldsymbol{\mu}$  zachodzi

$$\pi_{(Y, P_X)} P_\mu(p_\mu^u) = (0, 0), \quad (6.27)$$

gdzie  $p_\mu^u \in B_\mu$  jest zdefiniowanym przez nas na początku tego rozdziału punktem ze zbioru niestabilnego punktu równowagi  $L_1^\mu$ , wówczas punkt  $P_\mu(p_\mu^u)$  jest  $S$ -symetryczny (zob. (6.6)). Korzystając z (6.5), a następnie (6.6) mamy wtedy

$$\phi_\mu^t(P_\mu(p_\mu^u)) = S^{-1}(\phi_\mu^{-t}(S(P_\mu(p_\mu^u)))) = S^{-1}(\phi_{-t}(P_\mu(p_\mu^u))) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} S^{-1}(L_1^\mu) = L_1^\mu,$$

przy czym przechodząc do granicy skorzystaliśmy z tego, że punkt  $P_\mu(p_\mu^u)$  leży w zbiorze niestabilnym punktu równowagi  $L_1^\mu$ . Z powyższego widzimy, że  $P_\mu(p_\mu^u)$  jest

punktem homoklinicznym dla  $L_1^\mu$ , a więc trajektoria  $(\phi_\mu^t(p_\mu^u))_{t \in \mathbb{R}}$  jest orbitą homokliniczną punktu  $L_1^\mu$ .

W takim razie wystarczy wykazać istnienie parametru  $\mu \in \boldsymbol{\mu}$ , dla którego  $P_\mu(p_\mu^u)$  spełnia warunek (6.27). Z definicji  $P_\mu$ , tj. (6.24), wiemy, że dla dowolnego  $\mu$  zachodzi  $\pi_Y P_\mu(p_\mu^u) = 0$ . Zdefiniujmy funkcję  $g : [\underline{\mu}, \bar{\mu}] \rightarrow \mathbb{R}$  jako

$$g(\mu) = \pi_{P_X} P_\mu(p_\mu^u).$$

Zauważmy, że na mocy założenia o ciągłości rodziny  $\{p_\mu^u\}_{\mu \in \boldsymbol{\mu}}$  oraz własności ciągłości potoku względem parametru, funkcja  $g$  jest ciągła. Co więcej z (6.25–6.26) dostajemy, że  $g(\underline{\mu}) < 0 < g(\bar{\mu})$ . Korzystając z Twierdzenia Darboux istnieje więc  $\mu \in \boldsymbol{\mu}$  dla którego  $g(\mu) = 0$ . W konsekwencji  $\mu$  spełnia (6.27), co kończy dowód.  $\square$

Zauważmy, że rodzina zbiorów  $\{B_\mu\}_{\mu \in \boldsymbol{\mu}}$  może zostać wyznaczona metodą zaprezentowaną w Rozdziałach 6.3 oraz 6.4. Wystarczy bowiem przyjąć

$$B_\mu = \begin{cases} \Psi(\hat{B}), & \text{dla } \mu \in (\underline{\mu}, \bar{\mu}), \\ \Psi_\mu(\hat{B}_0), & \text{dla } \mu = \underline{\mu} \\ \Psi_{\bar{\mu}}(\hat{B}_0), & \text{dla } \mu = \bar{\mu} \end{cases},$$

gdzie zbiory  $\hat{B}, \hat{B}_0$  są oszacowaniami w lokalnych współrzędnych na punkty ze zbioru niestabilnego znalezionymi odpowiednio w Rozdziale 6.3 oraz Rozdziale 6.4. Warunki (6.25–6.26) mogą wówczas zostać zweryfikowane poprzez numeryczne zcałkowanie układu, przy użyciu ścisłych, opartych o arytmetykę interwałową technik. Taką możliwość daje biblioteka CAPD<sup>1</sup> języka C++. Dzięki pakietowi możliwe jest obliczenie odwzorowania Poincarégo  $P_\mu$  dla zadanego interwału parametrów  $\boldsymbol{\mu}$ . Podczas wyznaczania odwzorowania Poincarégo następuje również sprawdzenie, że jest ono dobrze określone.

## 6.6. Wyniki ścisłych obliczeń numerycznych

Rozważmy najpierw interwał

$$\boldsymbol{\mu} = 0.004253863522 + 10^{-10} [-1, 1].$$

Wyznaczone za pomocą zmodyfikowanej Interwałowej Metody Newtona domknięcie interwałowe rodziny punktów równowagi  $\{L_1^\mu\}_{\mu \in \boldsymbol{\mu}}$  jest równe

$$\mathbf{L}_1 = \begin{pmatrix} [-0.887653187, -0.887653185] \\ 0 \\ 0 \\ [-0.887653187, -0.887653185] \end{pmatrix}.$$

Domknięcia interwałowe zbiorów  $\{\lambda_\mu : \mu \in \boldsymbol{\mu}\}$  oraz  $\{v_\mu : \mu \in \boldsymbol{\mu}\}$  dla  $\lambda_\mu, v_\mu$  zdefiniowanych przez nas w Rozdziale 6.2 wynoszą natomiast

$$\boldsymbol{\lambda} = [2.80038559, 2.80038574], \quad \mathbf{v} = [2.25179534, 2.25179554].$$

1. Computer Assisted Proofs in Dynamics <http://capd.ii.uj.edu.pl>

Interwałowa macierz  $C$  odpowiadająca za liniową zamianę współrzędnych ma postać

$$C = \begin{pmatrix} [0.40073074, 0.40073105] & [-0.40073105, -0.40073074] & 0 & [0.211364348, 0.211364399] \\ [-0.193254211, -0.193253956] & [-0.193254211, -0.193253956] & [-0.732790402, -0.732790212] & 0 \\ [1.31545461, 1.31545567] & [1.31545461, 1.31545567] & [0.256840917, 0.256841033] & 0 \\ [-0.140455374, -0.140454766] & [0.140454766, 0.140455374] & 0 & [-1.43872976, -1.43872924] \end{pmatrix}.$$

W celu wyznaczenia zbioru  $\hat{B}$  opisanego w Rozdziale 6.3 przyjmujemy następujące wartości parametrów

$$\begin{aligned} r_u &= 10^{-6}, & r_s &= 10^{-8}, \\ \alpha &= 10^2, & \beta &= 10^{-2}, \\ \nu_\alpha &= 2.8, & \nu_\beta &= 0.02. \end{aligned}$$

Wartość parametru  $\beta$  została dobrana do  $r_u, r_s$  tak, aby  $\beta = \frac{r_u}{r_s}$ . Zauważmy, że wybrana przez nas wartość  $\nu_\alpha$  jest bliska wartościom własnym  $\lambda_\mu$  odpowiadającym kierunkowi niestabilnemu pola wektorowego  $F_\mu$  w  $L_1^\mu$ . Wartość  $\nu_\beta$  dobraliśmy natomiast tak, aby spełniony był warunek  $\nu_\beta < \nu_\alpha$ .

Domknięcie interwałowe  $D\hat{F}(U)$  na zbiorze

$$U = \begin{pmatrix} 10^{-6}[-1, 1] \\ 10^{-8}[-1, 1] \\ 10^{-8}[-1, 1] \\ 10^{-8}[-1, 1] \end{pmatrix}$$

wynosi

$$D\hat{F}(U) = \begin{pmatrix} [2.80035961, 2.80041173] & 10^{-5}[-2.82539555, 2.82535809] & 10^{-6}[-7.83903357, 7.83906667] & 10^{-6}[-9.9746153, 9.97480159] \\ 10^{-6}[-9.07756745, 9.07757662] & [-2.80040713, -2.8003642] & 10^{-5}[-1.28995211, 1.28993151] & 10^{-6}[-9.58023535, 9.58035826] \\ 10^{-6}[-5.21234213, 5.21233726] & 10^{-5}[-1.15188624, 1.15189785] & 10^{-6}[-3.99635791, 3.9964359] & [2.25178917, 2.25180171] \\ 10^{-6}[-5.82140503, 5.8214032] & 10^{-6}[-5.4407016, 5.44075638] & [-2.25181729, -2.25177359] & 10^{-6}[-5.06251947, 5.06240517] \end{pmatrix}.$$

Otrzymaną przez nas powyżej macierz interwałową wykorzystujemy do zweryfikowania założeń Twierdzenia 4.6 w oparciu o Lemat 5.3.

Promień  $\tilde{r}_u$  przedziału, na którym określone są funkcje  $y_\mu^u$  jest równy

$$\tilde{r}_u = 9.99999995 \cdot 10^{-7}.$$

Zbiór  $\hat{B}$ , który przecinają wykresy zbiorów niestabilnych w lokalnych współrzędnych, ma natomiast postać

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 9.99999995 \cdot 10^{-7} \\ 10^{-8}[-1, 1] \\ 10^{-8}[-1, 1] \\ 10^{-8}[-1, 1] \end{pmatrix}.$$

Po transformacji zbioru  $\hat{B}$  do oryginalnych współrzędnych otrzymujemy zbiór  $B$  postaci

$$B = \mathbf{L}_1 + \begin{pmatrix} 10^{-7}[3.94610076, 4.06852323] \\ 10^{-7}[-2.02515105, -1.83993945] \\ 10^{-6}[1.29973119, 1.33117828] \\ 10^{-7}[-1.56248169, -1.24663848] \end{pmatrix}.$$

Następnie dzielimy przedział  $\mu$  na 10 podprzedziałów  $\mu = \mu_1 \cup \dots \cup \mu_{10}$  i dla każdego podprzedziału parametrów całkując równanie różniczkowe od zbioru  $B$  aż do sekcji  $\{Y = 0\}$  weryfikujemy, że odwzorowanie Poincarégo  $P_\mu$  jest dobrze określone.

Dla parametrów  $\mu \in \{\underline{\mu}, \bar{\mu}\}$ , gdzie

$$\begin{aligned}\underline{\mu} &= 0.004253863522 - 10^{-10}, \\ \bar{\mu} &= 0.004253863522 + 10^{-10},\end{aligned}$$

powtarzamy powyższe kroki otrzymując odpowiednie domknięcia interwałowe punktów równowagi  $L_1^\mu$  i  $L_1^{\bar{\mu}}$ ,

$$\mathbf{L}_1^\mu = \begin{pmatrix} -0.887653187 + 10^{-9}[-1, 1] \\ 0 \\ 0 \\ -0.887653187 + 10^{-9}[-1, 1] \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{L}_1^{\bar{\mu}} = \begin{pmatrix} -0.887653185 + 10^{-9}[-1, 1] \\ 0 \\ 0 \\ -0.887653185 + 10^{-9}[-1, 1] \end{pmatrix},$$

domknięcia interwałowe wartości  $\lambda_\mu, v_\mu$

$$\begin{aligned}\lambda_\mu &= 2.80038566 + 10^{-9}[-1, 1], & \mathbf{v}_\mu &= 2.25179544 + 10^{-9}[-1, 1], \\ \lambda_{\bar{\mu}} &= 2.80038567 + 10^{-9}[-1, 1], & \mathbf{v}_{\bar{\mu}} &= 2.25179544 + 10^{-9}[-1, 1],\end{aligned}$$

oraz odpowiednie domknięcia interwałowe macierzy  $C_\mu$

$$\mathbf{C}_\mu = \begin{pmatrix} 0.400730896 + 10^{-9}[-1, 1] & -0.400730896 + 10^{-9}[-1, 1] & 0 & 0.211364373 + 10^{-9}[-1, 1] \\ -0.193254084 + 10^{-9}[-1, 1] & -0.193254084 + 10^{-9}[-1, 1] & -0.732790307 + 10^{-9}[-1, 1] & 0 \\ 1.31545514 + 10^{-9}[-1, 1] & 1.31545514 + 10^{-9}[-1, 1] & 0.256840975 + 10^{-9}[-1, 1] & 0 \\ -0.14045507 + 10^{-9}[-1, 1] & 0.14045507 + 10^{-9}[-1, 1] & 0 & -1.4387295 + 10^{-9}[-1, 1] \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C}_{\bar{\mu}} = \begin{pmatrix} 0.400730895 + 10^{-9}[-1, 1] & -0.400730895 + 10^{-9}[-1, 1] & 0 & 0.211364373 + 10^{-9}[-1, 1] \\ -0.193254083 + 10^{-9}[-1, 1] & -0.193254083 + 10^{-9}[-1, 1] & -0.732790307 + 10^{-9}[-1, 1] & 0 \\ 1.31545514 + 10^{-9}[-1, 1] & 1.31545514 + 10^{-9}[-1, 1] & 0.256840975 + 10^{-9}[-1, 1] & 0 \\ -0.14045507 + 10^{-9}[-1, 1] & 0.14045507 + 10^{-9}[-1, 1] & 0 & -1.4387295 + 10^{-9}[-1, 1] \end{pmatrix}.$$

Możemy zauważyć, że otrzymane przez nas powyżej oszacowania dla krańcowych wartości  $\mu$  są dużo bardziej dokładne niż analogiczne oszacowania dla całego przedziału parametrów  $\mu$ .

W celu wyznaczenia zbioru  $\hat{B}_0$  opisanego w Rozdziale 6.4 przyjmujemy  $\delta = 5 \cdot 10^{-3}$ , oraz zgodnie z (6.22) dobieramy następujące wartości parametrów

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= 5 \cdot 10^{-1}, & \beta_0 &= 5 \cdot 10^{-5}, \\ \nu_{\alpha_0} &= 2.8, & \nu_{\beta_0} &= 0.2, \\ r_{u,0} &= 10^{-6}, & r_{s,0} &= 5 \cdot 10^{-11}.\end{aligned}$$

Odpowiednie domknięcia interwałowe  $D\hat{\mathbf{F}}_\mu(U)$  na zbiorze

$$U = \begin{pmatrix} 10^{-6}[-1, 1] \\ 10^{-11}[-5, 5] \\ 10^{-11}[-5, 5] \\ 10^{-11}[-5, 5] \end{pmatrix}$$

wynoszą

$$D\hat{\mathbf{F}}_\mu(U) = \begin{pmatrix} [2.8003729, 2.80039842] & 10^{-5}[-1.52376872, 1.52374365] & 10^{-6}[-2.74941201, 2.74939242] & 10^{-6}[-3.4852118, 3.4853157] \\ 10^{-9}[-6.94093093, 6.94104779] & [-2.80039842, -2.80037291] & 10^{-5}[-1.00759155, 1.00757391] & 10^{-6}[-5.32710034, 5.32716804] \\ 10^{-9}[-4.41022784, 4.41014546] & 10^{-6}[-6.72835466, 6.72841354] & 10^{-6}[-2.65743655, 2.65750047] & [2.25179226, 2.25179862] \\ 10^{-9}[-3.66319682, 3.66311563] & 10^{-9}[-1.88787644, 1.91707216] & [-2.25181454, -2.25177634] & 10^{-6}[-2.65752176, 2.65743433] \end{pmatrix},$$

$$D\hat{\mathbf{F}}_{\bar{\mu}}(U) = \begin{pmatrix} [2.80037291, 2.80039843] & 10^{-5}[-1.5237687, 1.52374363] & 10^{-6}[-2.74941202, 2.74939242] & 10^{-6}[-3.48521168, 3.48531557] \\ 10^{-9}[-6.94105545, 6.94093103] & [-2.80039843, -2.80037291] & 10^{-5}[-1.00759153, 1.00757389] & 10^{-6}[-5.32710025, 5.32716795] \\ 10^{-9}[-4.41016162, 4.41024128] & 10^{-6}[-6.72835454, 6.72841342] & 10^{-6}[-2.6574365, 2.65750041] & [2.25179226, 2.25179862] \\ 10^{-9}[-3.66314989, 3.66323345] & 10^{-9}[-1.88787863, 1.91707161] & [-2.25181454, -2.25177634] & 10^{-6}[-2.65752171, 2.65743428] \end{pmatrix}.$$

Następnie kolejno dla  $\mu = \underline{\mu}$  oraz  $\mu = \bar{\mu}$  weryfikujemy założenia Twierdzenia 4.6 w oparciu o Lemat 5.3.

Zbiór  $\hat{B}_0$ , który przecinają wykresy zbiorów niestabilnych w lokalnych współrzędnych dla parametrów  $\mu \in \{\underline{\mu}, \bar{\mu}\}$ , ma postać

$$\hat{B}_0 = \begin{pmatrix} 9.99999995 \cdot 10^{-7} \\ 10^{-11}[-5, 5] \\ 10^{-11}[-5, 5] \\ 10^{-11}[-5, 5] \end{pmatrix}.$$

Po transformacji zbioru  $\hat{B}_0$  do oryginalnych współrzędnych otrzymujemy odpowiednie zbiory  $B_{\underline{\mu}}$  oraz  $B_{\bar{\mu}}$  postaci

$$B_{\underline{\mu}} = \mathbf{L}_1^{\underline{\mu}} + \begin{pmatrix} 10^{-7}[4.00700595, 4.00761805] \\ 10^{-7}[-1.93300827, -1.93208223] \\ 10^{-6}[1.31537612, 1.31553335] \\ 10^{-7}[-1.40534968, -1.4037705] \end{pmatrix},$$

$$B_{\bar{\mu}} = \mathbf{L}_1^{\bar{\mu}} + \begin{pmatrix} 10^{-7}[4.00700595, 4.00761804] \\ 10^{-7}[-1.93300827, -1.93208222] \\ 10^{-6}[1.31537612, 1.31553335] \\ 10^{-7}[-1.40534968, -1.40377049] \end{pmatrix}.$$

Następnie kolejno dla  $\mu = \underline{\mu}$  oraz  $\mu = \bar{\mu}$  całkujemy równanie różniczkowe od zbiorów odpowiednio  $B_{\underline{\mu}}$  oraz  $B_{\bar{\mu}}$  aż do sekcji  $\{Y = 0\}$ . Otrzymujemy tym samym oszacowania na obrazy odwzorowania Poincarégo

$$P_{\underline{\mu}}(B_{\underline{\mu}}) = \begin{pmatrix} 0.827025883 + 10^{-9}[-1, 1] \\ 0 \\ -10^{-8}[6.23218087, 4.08396164] \\ 0.925122564 + 10^{-9}[-1, 1] \end{pmatrix},$$

$$P_{\bar{\mu}}(B_{\bar{\mu}}) = \begin{pmatrix} 0.827025881 + 10^{-9}[-1, 1] \\ 0 \\ 10^{-8}[4.09947909, 6.24736624] \\ 0.925122562 + 10^{-9}[-1, 1] \end{pmatrix}.$$

Najważniejszym rezultatem jest tutaj fakt, że na trzeciej współrzędnej mamy odpowiednio wartości ujemne oraz dodatnie, co pokazuje, że spełnione są warunki (6.25-6.26).

Dowód wspomagany komputerowo zajął 9.17 sekund, przy wykorzystaniu jednego rdzenia procesora Intel i5 o częstotliwości 1.60GHz.



## Podsumowanie

W rozprawie zajęliśmy się kwestią zbiorów silnie stabilnych i silnie niestabilnych punktów stałych w układach dynamicznych zarówno dyskretnych jak i ciągłych. Korzystając z własności dysków horyzontalnych wykazaliśmy, że w przypadku gdy odwzorowanie lub potok równania różniczkowego generujący dany układ, spełnia odpowiednio sformułowane warunki stożka, zbiór silnie stabilny/silnie niestabilny jest wykresem pewnej funkcji lipschitzowskiej (a tym samym rozmaitością) w pewnym (określonym) otoczeniu punktu stałego. Z uwagi na łatwość zweryfikowania warunków stożka przy użyciu ścisłych metod arytmetyki interwałowej, opracowana przez nas metoda znajdowania silnych rozmaitości niezmienniczych może zostać wykorzystana w dowodach wspomaganych komputerowo.

Na przykładzie Ograniczonego Kołowego Problemu Trzech Ciał zaprezentowaliśmy w jaki sposób możemy zastosować naszą metodę do przeprowadzenia komputerowo wspieranego dowodu istnienia orbity homoklinicznej. Kluczowym aspektem była tu możliwość wyznaczenia ścisłego oszacowania lokalnej rozmaitości niestabilnej jednego z punktów libracji oraz wykorzystanie ciągłości funkcji parametryzującej rozmaitość do wykazania przecinania się zbioru stabilnego i niestabilnego na odpowiednio dobrej sekcji Poincarégo.

## Dowody lematów pomocniczych

W dodatku tym umieszczamy dowody lematów pomocniczych zawartych w poprzednich rozdziałach naszej pracy.

*Dowód (Lematu 1.3)* Zauważmy, że jeżeli punkt  $p$  posiada trajektorię w tył w  $U$ , to ciąg (skończony) składający się z pierwszych  $i$ -elementów tej trajektorii jest trajektorią w tył o długości  $i$  tego punktu w  $U$ . Kończy to dowód prostszej implikacji.

Założmy więc teraz, że dla dowolnego  $i \in \mathbb{N}$ , istnieje trajektoria w tył punktu  $p$  długości  $i$  w  $U$ . Dla ustalonego  $i$  oznaczmy tę trajektorię przez  $(p_{i,-i}, \dots, p_{i,-2}, p_{i,-1}, p_{i,0})$ . Pokażemy teraz w jaki sposób skonstruować trajektorię w tył  $(\dots, p_{-2}, p_{-1}, p_0)$  punktu  $p$  w  $U$ . Niech

$$p_0 = p_{i,0} = p.$$

Następnie z ciągu  $\{p_{i,-1}\}_{i \geq 1}$  punktów z  $U$  wybierzmy podciąg zbieżny  $\{p_{i_l,-1}\}_{l \geq 0}$  (podciąg taki istnieje z uwagi na zwartość  $U$ ). Niech

$$p_{-1} = \lim_{l \rightarrow +\infty} p_{i_l,-1}.$$

Z założenia o zwartości  $U$  dostajemy  $p_{-1} \in U$ . Co więcej, ciągłość  $f$  oraz fakt, że  $(p_{i,-i}, \dots, p_{i,-2}, p_{i,-1}, p_{i,0})$  jest trajektorią w tył, implikują, że

$$f(p_{-1}) = f\left(\lim_{l \rightarrow +\infty} p_{i_l,-1}\right) = \lim_{l \rightarrow +\infty} f(p_{i_l,-1}) = p_0.$$

Teraz z ciągu  $\{p_{i,-2}\}_{i \geq 2}$  punktów z  $U$  ponownie wybierzmy podciąg zbieżny  $\{p_{i_k,-2}\}_{k \geq 0}$  i oznaczmy

$$p_{-2} = \lim_{k \rightarrow +\infty} p_{i_k,-2}.$$

Zwartość  $U$  daje, że  $p_{-2} \in U$ . Natomiast na mocy ciągłości  $f$

$$f(p_{-2}) = f\left(\lim_{k \rightarrow +\infty} p_{i_k,-2}\right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} f(p_{i_k,-2}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} p_{i_k,-1} = p_{-1}.$$

Powtarzając tę procedurę indukcyjnie otrzymujemy ciąg punktów  $(\dots, p_{-2}, p_{-1}, p_0)$  z  $U$  spełniających  $f(p_{-i-1}) = f(p_{-i})$ . Ciąg ten jest więc trajektorią w tył punktu  $p$  w  $U$ . □

*Dowód (Lematu 1.22)* Z uwagi na domkniętość  $A$ , zbiór  $A \cap \text{Int}(B)$  jest domknięty w  $\text{Int}(B)$ . Z drugiej strony na mocy założenia  $\partial A \cap \text{Int}(B) = \emptyset$  mamy

$$A \cap \text{Int}(B) = (\text{Int}(A) \cup \partial A) \cap \text{Int}(B) = \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B),$$

skąd dostajemy, że  $A \cap \text{Int}(B)$  jest również otwarty w  $\text{Int}(B)$ . W takim razie albo

$$A \cap \text{Int}(B) = \emptyset,$$

albo

$$A \cap \text{Int}(B) = \text{Int}(B).$$

Ponieważ  $A \cap \text{Int}(B) \neq \emptyset$ , więc musi zachodzić  $A \cap \text{Int}(B) = \text{Int}(B)$ . Stąd  $\text{Int}(B) \subset A$ , co na mocy domkniętości  $A$  pociąga za sobą  $B \subset A$ .  $\square$

*Dowód (Lematu 1.23)* Zauważmy, że z założenia lematu mamy  $\partial A \cap \text{Int}(B) = \emptyset$ . W takim razie na mocy Lematu 1.22,  $B \subset A$ .

Pokażemy teraz, że  $A \subset B$ . Zauważmy, że bez straty ogólności rozumowania możemy przyjąć, że  $0 \in A \cap \text{Int}(B)$  oraz  $B = \overline{B}_u$ . Oznaczmy  $K = A \setminus \overline{B}_u$  i dla dowodu niewprost załóżmy, że  $K \neq \emptyset$ . Niech  $x_0 \in K$ . Zdefiniujmy

$$\Lambda = \{\lambda \geq 0 : \lambda x_0 \in A\}.$$

Zauważmy, że  $1 \in \Lambda$ , oraz  $\Lambda$  jest zwarty (gdyż  $A$  jest zbiorem zwartym). W takim razie

$$\lambda_0 = \sup \Lambda$$

jest dobrze zdefiniowane oraz dla tak zdefiniowanego  $\lambda_0 \in \Lambda$ . Wówczas dla dostatecznie dużego  $k \in \mathbb{N}$  mamy  $(\lambda_0 + \frac{1}{k})x_0 \notin A$  oraz  $\lambda_0 x_0 \in A$ , co implikuje

$$\lambda_0 x_0 \in \partial A.$$

Z tego, że  $x_0 \in A$  mamy  $\lambda_0 \geq 1$ . W takim razie

$$\|\lambda_0 x_0\| = \lambda_0 \|x_0\| \geq \|x_0\| > 1,$$

gdyż  $\lambda_0 \geq 1$  i  $x_0 \notin \overline{B}_u$ . W takim razie  $\lambda_0 x_0 \notin \partial \overline{B}_u$ , co stanowi sprzeczność z założeniem  $\partial A \subset \partial B$ . Pokazuje to, że musi zachodzić  $A \subset B$ .  $\square$

*Dowód (Lematu 2.4)* Niech  $(x_0, y_0) \in \{Q_{\alpha_1} = c_1\} \cap \{Q_{\alpha_2} = c_2\}$ . Wówczas

$$\begin{cases} \alpha_1^2 \|x_0\|^2 - \|y_0\|^2 = c_1 \\ \alpha_2^2 \|x_0\|^2 - \|y_0\|^2 = c_2 \end{cases}.$$

Stąd oraz z faktu, że  $\alpha_1 \neq \alpha_2$ ,

$$\begin{cases} \|x_0\|^2 = \frac{c_1 - c_2}{\alpha_1^2 - \alpha_2^2} \\ \|y_0\|^2 = \frac{c_1 \alpha_2^2 - c_2 \alpha_1^2}{\alpha_1^2 - \alpha_2^2} \end{cases}.$$

W takim razie (2.4) implikuje

$$\begin{cases} \frac{c_1 - c_2}{\alpha_1^2 - \alpha_2^2} \leq 1 \\ \frac{c_1 \alpha_2^2 - c_2 \alpha_1^2}{\alpha_1^2 - \alpha_2^2} \leq 1 \end{cases}.$$

Niech teraz  $(x, y) \in \{Q_{\alpha_1} \geq c_1\} \cap \{Q_{\alpha_2} \leq c_2\}$ . Wówczas

$$\begin{aligned} \begin{cases} \alpha_1^2 \|x\|^2 - \|y\|^2 \geq c_1 \\ -\alpha_2^2 \|x\|^2 + \|y\|^2 \geq -c_2 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) \|x\|^2 \geq c_1 - c_2 \\ (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) \|y\|^2 \geq c_1 \alpha_2^2 - c_2 \alpha_1^2 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \|x\|^2 \leq \frac{c_1 - c_2}{\alpha_1^2 - \alpha_2^2} \\ \|y\|^2 \leq \frac{c_1 \alpha_2^2 - c_2 \alpha_1^2}{\alpha_1^2 - \alpha_2^2} \end{cases}. \end{aligned}$$

W takim razie  $\|x\|^2 \leq 1$  i  $\|y\|^2 \leq 1$ , co oznacza, że  $(x, y) \in N$ .  $\square$

*Dowód (Wniosku 2.5)* Niech  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = \alpha$  oraz  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = \alpha^2 - 1$ . Zauważmy, że

$$\{Q_{\alpha_1} = c_1\} \cap \{Q_{\alpha_2} = c_2\} = \partial B_u \times \partial B_s \subset N.$$

Tak więc na mocy Lematu 2.4 z tego, że  $(x, y) \in \{Q_{\alpha_1} \geq c_1\} \cap \{Q_{\alpha_2} \leq c_2\}$  dostajemy, że  $(x, y)$  należy do  $N$ .  $\square$

*Dowód (Wniosku 2.6)* Niech  $\alpha_1 = \alpha$ ,  $\alpha_2 = 1$  oraz  $c_1 = c - (1 - \alpha_1^2)$ ,  $c_2 = c$ . Zauważmy, że

$$\{Q_{\alpha_1} = c_1\} \cap \{Q_{\alpha_2} = c_2\} = \partial B_u \times \partial B_s(\sqrt{1 - c}) \subset N.$$

Tak więc na mocy Lematu 2.4 z tego, że  $(x, y) \in \{Q_{\alpha_1} \geq c_1\} \cap \{Q_{\alpha_2} \leq c_2\}$  dostajemy, że  $(x, y)$  należy do  $N$ .  $\square$

*Dowód (Lematu 2.12)* Zdefiniujmy funkcję  $\zeta : \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^s \ni (u, s) \rightarrow (x, y) \in \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^s$  jako

$$\zeta(u, s) = (u\beta_\zeta(u, s), s), \quad (\text{A.1})$$

gdzie  $\beta_\zeta : \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}_+$  dane jest wzorem

$$\beta_\zeta(u, s) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} \sqrt{c + \|s\|^2}, & \text{gdy } \|u\| \leq 1, \\ \frac{1}{\|u\|} \left( \frac{1}{\alpha} \sqrt{c + \|s\|^2} - 1 \right) + 1, & \text{gdy } \|u\| > 1. \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Naszym pierwszym celem będzie pokazanie, że  $\zeta$  zadane równością (A.1) jest funkcją odwrotną do  $\eta$ . Weźmy więc dowolne  $(x, y) \in \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^s$ . Pokażemy, że

$$\zeta(\eta(x, y)) = (x, y). \quad (\text{A.3})$$

Gdy  $Q_\alpha(x, y) \leq c$ , to  $\alpha \|x\| \leq \sqrt{c + \|y\|^2}$ . Stąd oraz na mocy definicji funkcji  $\eta$  dostajemy

$$\|\pi_u(\eta(x, y))\| = \left\| x \frac{\alpha}{\sqrt{c + \|y\|^2}} \right\| = \frac{\alpha \|x\|}{\sqrt{c + \|y\|^2}} \leq 1, \quad (\text{A.4})$$

W takim razie korzystając kolejno z definicji  $\zeta$ ,  $\eta$  oraz  $\beta_\zeta$  dostajemy

$$\begin{aligned} \zeta(\eta(x, y)) &= (\pi_u(\eta(x, y))\beta_\zeta(\eta(x, y)), y) \\ &= \left( x \frac{\alpha}{\sqrt{c + \|y\|^2}} \frac{1}{\alpha} \sqrt{c + \|y\|^2}, y \right) \\ &= (x, y). \end{aligned}$$

Z drugiej strony, gdy  $Q_\alpha(x, y) > c$ , to  $\alpha \|x\| > \sqrt{c + \|y\|^2}$ . Stąd oraz na mocy definicji funkcji  $\eta$  dostajemy

$$\begin{aligned} \|\pi_u(\eta(x, y))\| &= \left\| x \left[ \frac{1}{\|x\|} \left( 1 - \frac{1}{\alpha} \sqrt{c + \|y\|^2} \right) + 1 \right] \right\| \\ &= \left| 1 + \frac{1}{\alpha} \left( \alpha \|x\| - \sqrt{c + \|y\|^2} \right) \right| \\ &> 1. \end{aligned} \tag{A.5}$$

W takim razie korzystając kolejno z definicji  $\zeta$ ,  $\eta$  oraz  $\beta_\zeta$  dostajemy

$$\begin{aligned} \zeta(\eta(x, y)) &= (\pi_u(\eta(x, y))\beta_\zeta(\eta(x, y)), y) \\ &= \left( x \left[ \frac{1}{\|x\|} \left( 1 - \frac{1}{\alpha} \sqrt{c + \|y\|^2} \right) + 1 \right] \left[ \frac{\frac{1}{\alpha} \sqrt{c + \|y\|^2} - 1}{\left\| x \left[ \frac{1}{\|x\|} \left( 1 - \frac{1}{\alpha} \sqrt{c + \|y\|^2} \right) + 1 \right] \right\|} + 1 \right], y \right) \\ &= (x, y). \end{aligned}$$

Wykazaliśmy więc, że dla dowolnego  $(x, y) \in \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^s$  zachodzi (A.3). W szczególności implikuje to, że  $\zeta$  jest suriekcją na  $\mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^s$ . Zauważmy, że  $\zeta$  jest również injekcją. Istotnie jeżeli dla pewnych  $(u_1, s_1), (u_2, s_2) \in \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^s$  zachodzi równość  $\zeta(u_1, s_1) = \zeta(u_2, s_2)$ , to wprost z definicji  $\zeta$  mamy  $s_1 = s_2$ , przy czym dla  $s = s_1 = s_2$  musi być spełniony warunek

$$u_1 \beta_\zeta(u_1, s) = u_2 \beta_\zeta(u_2, s). \tag{A.6}$$

Gdy  $u_1, u_2 \in \bar{B}_u$ , na mocy (A.2) mamy  $\beta_\zeta(u_1, s) = \beta_\zeta(u_2, s)$ , skąd (A.6) daje równość  $u_1 = u_2$ . Gdy  $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^u \setminus \bar{B}_u$ , to (A.2) oraz równość  $\|u_1 \beta_\zeta(u_1, s)\| = \|u_2 \beta_\zeta(u_2, s)\|$  wynikająca z (A.6) implikują  $\|u_1\| = \|u_2\|$ . Ponieważ  $\beta_\zeta$  jest funkcją o wartościach rzeczywistych dodatnich, więc na mocy (A.6) oznacza to, że  $u_1 = u_2$ . Pozostał nam do rozpatrzenia przypadek, gdy  $\|u_1\| \leq 1$  i  $\|u_2\| > 1$ . Wówczas (A.2) oraz równość  $\|u_1 \beta_\zeta(u_1, s)\| = \|u_2 \beta_\zeta(u_2, s)\|$  implikują

$$\frac{\|u_1\|}{\alpha} \sqrt{c + \|s\|^2} = \frac{1}{\alpha} \sqrt{c + \|s\|^2} - 1 + \|u_2\|,$$

a po przekształceniu

$$0 = \frac{1}{\alpha} \sqrt{c + \|s\|^2} (1 - \|u_1\|) + (\|u_2\| - 1),$$

co jest sprzeczne z założeniem  $\|u_1\| \leq 1$  i  $\|u_2\| > 1$ . Taki przypadek zajść więc nie może. Pokazuje to, że  $u_1 = u_2$ , a więc  $\zeta$  jest w istocie injekcją. W takim razie jest bijekcją, i na mocy równości (A.3) jest funkcją odwrotną do  $\eta$ . Zauważmy ponadto, że  $\zeta$  jest również funkcją ciągłą. W takim razie na mocy Twierdzenia Brouwera o zachowaniu otwartości (zob. [7])  $\zeta$  jest homeomorfizmem. Funkcja  $\eta$  jest więc również homeomorfizmem. Stąd oraz na mocy (A.4) i (A.5) (spełnionych gdy odpowiednio  $Q_\alpha(x, y) \leq c$  oraz  $Q_\alpha(x, y) > c$ ) dostajemy równość (2.10) z tezy lematu.

Do wykazania pozostała nam nierówność (2.11). Dla ustalonego  $b > 0$  odwzorowanie

$$x \rightarrow \sqrt{b + \|x\|^2}$$

spełnia warunek Lipschitza za stałą 1, stąd

$$\|\pi_x(\zeta(u, s_1) - \zeta(u, s_2))\| \leq \frac{1}{\alpha} \|s_1 - s_2\|.$$

Ponadto z definicji  $\zeta$  mamy

$$\|\pi_y(\zeta(u, s_1) - \zeta(u, s_2))\| = \|s_1 - s_2\|.$$

W takim razie dla dowolnych  $s_1, s_2$  zachodzi

$$Q_\alpha(\zeta(u, s_1) - \zeta(u, s_2)) \leq \alpha^2 \left( \frac{1}{\alpha} \|s_1 - s_2\| \right)^2 - \|s_1 - s_2\|^2 = 0,$$

czego należało dowieść. □

*Dowód (Lematu 2.13)* Niech  $\eta$  będzie zamianą współrzędnych zadaną przez (2.9). Z definicji dysku horyzontalnego oraz z faktu, że  $\eta$  jest homeomorfizmem, dostajemy, że  $\pi_u \circ \eta \circ h : \overline{B}_u \rightarrow \mathbb{R}^u$  jest odwzorowaniem ciągłym. Co więcej dla dowolnych  $x_1, x_2 \in \overline{B}_u$ , takich, że

$$\pi_u \circ \eta \circ h(x_1) = \pi_u \circ \eta \circ h(x_2),$$

mamy na mocy nierówności (2.11) z Lematu 2.12

$$Q_\alpha(h(x_1) - h(x_2)) \leq 0,$$

skąd z Definicji 2.7 dostajemy  $x_1 = x_2$ .

W takim razie odwzorowanie  $\pi_u \circ \eta \circ h$  jest bijektywne na swój obraz. Zbiór  $\overline{B}_u$  jest zwarty, a więc  $(\pi_u \circ \eta \circ h)^{-1}$  jest również odwzorowaniem ciągłym. Stąd zbiór  $\pi_u \circ \eta \circ h(\overline{B}_u)$  jest homeomorficzny z  $\overline{B}_u$ .

Oznaczmy

$$A = \pi_u \circ \eta \circ h(\overline{B}_u), \quad B = \overline{B}_u.$$

Ustalmy dowolne  $x \in \partial B_u$ . Wówczas  $Q_\alpha(h(x)) = c$ , skąd na mocy definicji  $Q_\alpha$  oraz równości (2.9) dostajemy

$$\|\pi_u(\eta(h(x)))\| = 1.$$

Oznacza to, że  $\partial A \subset \partial B$ . Z tego, że  $\pi_x h(0) = 0$ , mamy  $\pi_u \circ \eta \circ h(0) = 0 \in A \cap \text{Int}(B)$ . Na mocy Lematu 1.23 widzimy, że musi zachodzić  $A = B$ , skąd

$$\pi_u \circ \eta \circ h(\overline{B}_u) = \overline{B}_u.$$

W takim razie na mocy własności (2.10) z Lematu 2.12, dla dowolnego  $x \in \overline{B}_u$  mamy

$$Q_\alpha(h(x)) \leq c,$$

co należało udowodnić. □

Dowód (Lematu 2.14) Obierzmy dowolne  $u_1, u_2 \in \bar{B}_u$ . Dla  $i \in \{1, 2\}$  niech

$$x_i = \pi_x h(u_i), \quad y_i = \pi_y h(u_i).$$

Korzystając z tego, że  $h$  spełnia warunek (2.6), mamy

$$\|y_1 - y_2\| \leq \alpha \|x_1 - x_2\|. \quad (\text{A.7})$$

Z drugiej strony

$$\|h(u_1) - h(u_2)\| = \sqrt{\|x_1 - x_2\|^2 + \|y_1 - y_2\|^2}.$$

W takim razie na mocy (A.7)

$$\|h(u_1) - h(u_2)\| \leq \sqrt{1 + \alpha^2} \|x_1 - x_2\|, \quad (\text{A.8})$$

oraz

$$\|h(u_1) - h(u_2)\| \geq \sqrt{1 + \alpha^{-2}} \|y_1 - y_2\|. \quad (\text{A.9})$$

Z założenia lematu  $h$  spełnia warunek (2.13). W takim razie z równości (2.10) z Lematu 2.12 dostajemy dla dowolnego  $u \in \bar{B}_u$

$$Q_\alpha(h(u)) \leq c.$$

W konsekwencji na mocy definicji funkcji  $\eta$  (zob. (2.9)), mamy

$$h(u) = \eta^{-1}(u, \pi_y h(u)) = \left( \frac{u}{\alpha} \sqrt{c + \|\pi_y h(u)\|^2}, \pi_y h(u) \right).$$

Oznaczając  $g(y) = \sqrt{c + \|y\|^2}$ , z powyższego oraz z (A.8) dostajemy

$$\begin{aligned} \|h(u_1) - h(u_2)\| &\leq \sqrt{1 + \alpha^2} \left\| \frac{u_1}{\alpha} \sqrt{c + \|\pi_y h(u_1)\|^2} - \frac{u_2}{\alpha} \sqrt{c + \|\pi_y h(u_2)\|^2} \right\| \\ &= \frac{\sqrt{1 + \alpha^2}}{\alpha} \|u_1 g(y_1) - u_2 g(y_2)\| \\ &= \frac{\sqrt{1 + \alpha^2}}{\alpha} \|u_1 g(y_1) - u_2 g(y_1) + u_2 (g(y_1) - g(y_2))\| \\ &\leq \frac{\sqrt{1 + \alpha^2}}{\alpha} (|g(y_1)| \|u_1 - u_2\| + |g(y_1) - g(y_2)| \|u_2\|). \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Zauważmy, że dla dowolnego  $a \in [0, r_s]$  prawdziwa jest nierówność

$$\sqrt{c + a^2} \leq \sqrt{c + r_s^2}$$

oraz

$$\frac{\partial}{\partial a} (\sqrt{c + a^2}) = \frac{a}{\sqrt{c + a^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{c}{a^2} + 1}} \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{c}{r_s^2} + 1}} = \frac{r_s}{\sqrt{c + r_s^2}}.$$

Zauważmy ponadto, że na mocy (2.12) zachodzi inkluzja  $y_i \in \overline{B}_s(r_s)$ . W takim razie korzystając z (A.10), z faktu, że  $u_2 \in \overline{B}_u$ , a następnie z (A.9) mamy

$$\begin{aligned} \|h(u_1) - h(u_2)\| &\leq \frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha} \left( \sqrt{c+r_s^2} \|u_1 - u_2\| + \frac{r_s}{\sqrt{c+r_s^2}} \left| \|y_1\| - \|y_2\| \right| \right) \\ &\leq \frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha} \left( \sqrt{c+r_s^2} \|u_1 - u_2\| + \frac{r_s}{\sqrt{c+r_s^2}} \|y_1 - y_2\| \right) \\ &\leq \frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha} \left( \sqrt{c+r_s^2} \|u_1 - u_2\| + \frac{r_s (\sqrt{1+\alpha^2})^{-1}}{\sqrt{c+r_s^2}} \|h(u_1) - h(u_2)\| \right) \\ &= \sqrt{c+r_s^2} \frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha} \|u_1 - u_2\| + \frac{r_s}{\sqrt{c+r_s^2}} \|h(u_1) - h(u_2)\| \end{aligned}$$

Ponieważ zachodzi  $\frac{r_s}{\sqrt{c+r_s^2}} < 1$ , więc po przekształceniu powyższej nierówności

$$\|h(u_1) - h(u_2)\| \leq \frac{(c+r_s^2)\sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha(\sqrt{c+r_s^2} - r_s)} \|u_1 - u_2\|.$$

Pokazuje to, że  $h$  spełnia warunek Lipschitza ze stałą  $L$ .

Pozostało wykazać, że  $h$  jest dyskiem  $Q_\alpha$  horyzontalnym o promieniu  $c$ . Zauważmy, że konsekwencją lipschitzowskości  $h$  jest fakt, że jest to odwzorowanie ciągle. Ponadto z (2.13),  $\eta(h(0)) = (0, s)$ , dla pewnego  $s \in \mathbb{R}^s$ . Pociąga to za sobą

$$\pi_x h(0) = \frac{0}{\alpha} \sqrt{c + \|s\|^2} = 0.$$

Pokazuje to, że  $h$  spełnia warunek (2.7). W takim razie  $h$  spełnia wszystkie założenia Definicji 2.7 i w konsekwencji jest dyskiem  $Q_\alpha$ -horyzontalnym. Wykażemy teraz, że promień tego dysku jest równy  $c$ . Niech  $u \in \partial B_u$ . Z (2.13) oraz na mocy równości (2.10) z Lematu 2.12 i faktu, że  $\eta$  jest homeomorfizmem mamy

$$Q_\alpha(h(u)) = Q_\alpha(\eta^{-1}(u, \pi_y h(u))) = c,$$

co kończy dowód. □

*Dowód (Lematu 5.2)* Zaczniemy od wykazania (5.6) dla dowolnego  $t > 0$ . Ustalmy  $p_1 \neq p_2$  i oznaczmy  $v(t) = \|g_1(p_1, p_2, t)\|$ . Ponieważ  $g_1(p_1, p_2, 0) = 0$ ,

$$\begin{aligned} v(t) &= \left\| \int_0^t \frac{d}{ds} g_1(p_1, p_2, s) ds \right\| \\ &= \left\| \int_0^t F(\phi_s(p_1)) - F(\phi_s(p_2)) ds \right\| \\ &\leq \int_0^t L \|\phi_s(p_1) - \phi_s(p_2) - (p_1 - p_2)\| ds + \int_0^t L \|p_1 - p_2\| dt, \end{aligned}$$



przy czym w ostatniej nierówności skorzystaliśmy z założenia (5.3). Przyjmując  $c(t) = tL \|p_1 - p_2\|$  oraz  $u(t) = L$ , na mocy Lematu Gronwalla 1.21,

$$\begin{aligned} v(t) &\leq \int_0^t L \|p_1 - p_2\| \left[ \exp \left( \int_s^t L d\tau \right) \right] ds \\ &= L \|p_1 - p_2\| \frac{1}{L} (e^{tL} - 1), \end{aligned}$$

co kończy dowód (5.6) dla  $t > 0$ . Dla  $t < 0$  dowód przebiega analogicznie, natomiast dla  $t = 0$  w (5.6) mamy równość.

Wykażemy teraz (5.7) dla  $t > 0$ . Zauważmy, że na mocy spełniania przez  $F$  warunków (5.2-5.4), dla dowolnego  $s > 0$ ,

$$\|\phi_s(p_1) - \phi_s(p_2)\| \leq \|p_1 - p_2\| e^{Ls}, \quad (\text{A.11})$$

$$\|DF(\phi_s(p_1)) - DF(\phi_s(p_2))\| \leq M \|\phi_s(p_1) - \phi_s(p_2)\|, \quad (\text{A.12})$$

$$\|[DF(\phi_s(p_1)) - DF(\phi_s(p_2))]F(\phi_s(p_2))\| \leq \mu \|DF(\phi_s(p_1)) - DF(\phi_s(p_2))\|. \quad (\text{A.13})$$

Oznaczając  $v(t) = \|g_2(p_1, p_2, t)\|$ , i wykonując odpowiednie obliczenia (przy czym w drugiej nierówności korzystamy z (A.11–A.13)),

$$\begin{aligned} v(t) &= \left\| \int_0^t \frac{d}{ds} (F(\phi_s(p_1)) - F(\phi_s(p_2))) - (F(p_1) - F(p_2)) ds \right\| \\ &= \left\| \int_0^t DF(\phi_s(p_1))F(\phi_s(p_1)) - DF(\phi_s(p_2))F(\phi_s(p_2)) ds \right\| \\ &\leq \int_0^t \|DF(\phi_s(p_1))F(\phi_s(p_1)) - DF(\phi_s(p_1))F(\phi_s(p_2))\| ds \\ &\quad + \int_0^t \|DF(\phi_s(p_1))F(\phi_s(p_2)) - DF(\phi_s(p_2))F(\phi_s(p_2))\| ds \\ &\leq \int_0^t L \|F(\phi_s(p_1)) - F(\phi_s(p_2))\| ds + \int_0^t \mu M e^{Ls} \|p_1 - p_2\| ds \\ &\leq \int_0^t Lv(s) ds + \int_0^t L \|F(p_1) - F(p_2)\| ds + \int_0^t \mu M e^{Ls} \|p_1 - p_2\| ds \\ &\leq \int_0^t Lv(s) ds + \int_0^t (L^2 + \mu M e^{Ls}) \|p_1 - p_2\| ds. \end{aligned}$$

Przyjmując teraz  $c(t) = \int_0^t (L^2 + \mu M e^{Ls}) \|p_1 - p_2\| ds$  i  $u(t) = L$ , na mocy Lematu Gronwalla 1.21,

$$\begin{aligned} v(t) &\leq \int_0^t (L^2 + \mu M e^{Ls}) \|p_1 - p_2\| \left[ \exp \left( \int_s^t L d\tau \right) \right] ds \\ &= (L(e^{Lt} - 1) + te^{Lt}\mu M) \|p_1 - p_2\|. \end{aligned}$$

Wykazuje to prawdziwość (5.7) dla  $t > 0$ . Dla  $t < 0$  dowód przebiega analogicznie, natomiast dla  $t = 0$  nierówność (5.7) zamienia się w równość.  $\square$

# Bibliografia

- [1] G. Alefeld. Inclusion methods for systems of nonlinear equations - the interval newton method and modifications. *Topics in validated computations*, 5:7–26, 1994.
- [2] G. Alefeld, G. Mayer. The cholesky method for interval data. *Linear Algebra and its Applications*, 194:161 – 182, 1993.
- [3] G. Alefeld, G. Mayer. Interval analysis: theory and applications. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 121(1–2):421 – 464, 2000.
- [4] P. W. Bates, L. Kening, Z. Chongchun. Existence and persistence of invariant manifolds for semiflows in banach space. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 135(645), 9 1998.
- [5] N. Berglund, B. Gentz. *Noise-induced phenomena in slow-fast dynamical systems: a sample-paths approach*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [6] G.D. Birkhoff. *Nouvelles recherches sur les systèmes dynamiques 1*. Memoriae Pont. Acad. Sci. Novi Lyncaei, 1935.
- [7] L.E.J. Brouwer. Beweis der invarianz des n-dimensionalen gebiets. *Mathematische Annalen*, 71:305–313, 1912.
- [8] X. Cabré, E. Fontich, R. de la Llave. The parameterization method for invariant manifolds I: manifolds associated to non-resonant subspaces. *Indiana University mathematics journal*, strony 283–328, 2003.
- [9] X. Cabré, E. Fontich, R. de la Llave. The parameterization method for invariant manifolds II: regularity with respect to parameters. *Indiana University mathematics journal*, strony 329–360, 2003.
- [10] X. Cabré, E. Fontich, R. de la Llave. The parameterization method for invariant manifolds III: overview and applications. *Journal of Differential Equations*, 218(2):444 – 515, 2005.
- [11] M. J Capiński. Covering relations and the existence of topologically normally hyperbolic invariant sets. *Discrete and Continuous Dynamical Systems A.*, 23(3):705–725, 2009.
- [12] M. J. Capiński. Computer assisted existence proofs of lyapunov orbits at L2 and transversal intersections of invariant manifolds in the Jupiter–Sun PCR3BP. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 11(4):1723–1753, 2012.
- [13] M. J Capiński, P. Roldán. Existence of a center manifold in a practical domain around L1 in the restricted three-body problem. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 11(1):285–318, 2012.

- [14] M. J. Capiński, C. Simó. Computer assisted proof for normally hyperbolic invariant manifolds. *Nonlinearity*, 25(7):1997, 2012.
- [15] M. J. Capiński, A. Wasieczko-Zajac. Geometric proof of strong stable/unstable manifolds with application to the restricted three body problem. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, 46(1):363–399, 2015.
- [16] M. J. Capiński, P. Zgliczyński. Cone conditions and covering relations for topologically normally hyperbolic invariant manifolds. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 30(3):641–670, 2011.
- [17] E. A. Coddington, N. Levinson. *Theory of Ordinary Differential Equations*. Robert E. Krieger, Malabar, Florida, 1984.
- [18] G. E. Forsythe. Pitfalls of computation, or why a math book isn't enough. *Amer. Math. Monthly*, 77:931—956, 1970.
- [19] M. Gidea, P. Zgliczyński. Covering relations for multidimensional dynamical systems—I. *Journal of Differential Equations*, 202(1):32–58, 2004.
- [20] M. Gidea, P. Zgliczyński. Covering relations for multidimensional dynamical systems—II. *Journal of Differential Equations*, 202(1):59–80, 2004.
- [21] J. Guckenheimer, T. Johnson, P. Meerkamp. Rigorous enclosures of a slow manifold. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 11(3):831–863, 2012.
- [22] T. Hickey, Q. Ju, M. H. Van Emden. Interval arithmetic: From principles to implementation. *J. ACM*, 48(5):1038–1068, Wrzesie/n 2001.
- [23] K. Hinsien. *Computation in Science*. IOP Concise Physics. Morgan & Claypool Publishers, 2015.
- [24] A. Jorba. A methodology for the numerical computation of normal forms, centre manifolds and first integrals of hamiltonian systems. *Experimental Mathematics*, 8(2):155–195, 1999.
- [25] B. Krauskopf, H. M. Osinga, E. J. Doedel, M. E. Henderson, J. Guckenheimer, A. Vladimirovsky, M. Dellnitz, O. Junge. A survey of methods for computing (un) stable manifolds of vector fields. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 15(03):763–791, 2005.
- [26] U. W. Kulisch. *Complete Interval Arithmetic and Its Implementation on the Computer*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2009.
- [27] J. Llibre, R. Martínez, C. Simó. Transversality of the invariant manifolds associated to the Lyapunov family of periodic orbits near L2 in the restricted three-body problem. *Journal of Differential Equations*, 58(1):104 – 156, 1985.
- [28] R. E. Moore, R. B. Kearfott, M. J. Cloud. *Introduction to Interval Analysis*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, 2009.
- [29] H. Poincaré. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste: Invariants intégraux. Solutions périodiques du deuxième genre. Solutions doublement asymptotiques. 1899.* Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. Gauthier-Villars et fils, 1899.
- [30] L. B. Rall. *Automatic Differentiation: Techniques and Applications*, wolumen 120 serii *Lecture Notes in Computer Science*. Springer, Berlin, 1981.
- [31] J. Rohn. Positive definiteness and stability of interval matrices. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 15(1):175–184, 1994.
- [32] S. M. Rump. Verification methods: Rigorous results using floating-point arithmetic. *Acta Numerica*, 19:287–449, 2010.
- [33] S.M. Rump. Verification of positive definiteness. *BIT Numerical Mathematics*, 46(2):433–452, 2006.

- 
- [34] R. Szczelina, P. Zgliczyński. A homoclinic orbit in a planar singular ODE—a computer assisted proof. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 12(3):1541–1565, 2013.
- [35] V. G. Szebehely. *Theory of orbits, the restricted problem of three bodies*. Academic Press, 1967.
- [36] W. Tucker. The Lorenz attractor exists. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics*, 328(12):1197–1202, 1999.
- [37] W. Tucker. A rigorous ODE solver and Smale's 14th problem. *Foundations of Computational Mathematics*, 2(1):53–117, 2002.
- [38] M. H. van Emden. *The Logic Programming Paradigm in Numerical Computation*, strony 257–276. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1999.
- [39] J. Žilinskas. Comparison of packages for interval arithmetic. *Informatika*, 16(1):145–154, Styczeń 2005.
- [40] S. Wiggins. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Texts in Applied Mathematics. Springer New York, 2003.
- [41] D. Wilczak, P. Zgliczyński. Heteroclinic connections between periodic orbits in planar restricted circular three-body problem—a computer assisted proof. *Communications in mathematical physics*, 234(1):37–75, 2003.
- [42] D. Wilczak, P. Zgliczyński. Heteroclinic connections between periodic orbits in planar restricted circular three body problem. part II. *Communications in mathematical physics*, 259(3):561–576, 2005.
- [43] D. Wilczak, P. Zgliczyński. Computer assisted proof of the existence of homoclinic tangency for the Hénon map and for the forced damped pendulum. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 8(4):1632–1663, 2009.
- [44] D. Wilczak, P. Zgliczyński. Cr-Lohner algorithm. *Schedae Informaticae*, 2011(Volume 20), 2012.
- [45] P. Zgliczyński. C1-Lohner algorithm. *Foundations of Computational Mathematics*, 2(4):429–465, 2002.
- [46] P. Zgliczyński. Covering relations, cone conditions and the stable manifold theorem. *Journal of Differential Equations*, 246(5):1774 – 1819, 2009.