Zestaw 0 - wprowadzenie

W poniższych zadaniach rozważamy jednokrokowy model dwumianowy ($\mathbb{T} = \{0, T\}$). Dana jest przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, gdzie

$$\Omega = \{U, D\}, \text{ gdzie } -1 < D < U,$$
$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{U\}, \{D\}, \Omega\}$$
$$\mathbb{P}(U) = p, \ \mathbb{P}(D) = 1 - p.$$

Cena waloru ryzykownego w chwili T

$$S(T) = \begin{cases} S^U = S(0)(1+U), & \text{z prawdopodobieństwem } p, \\ S^D = S(0)(1+D), & \text{z prawdopodobieństwem } 1-p. \end{cases},$$

gdzie $S(0) \in \mathbb{R}_+$.
Stopa wolna od ryzyka R.

1. Niech $S(0) = 100, \ U = 0.2, \ D = -0.1, \ p = 0.9, \ r = 10\%$. Dany jest portfel $V_{(x,y)}$, którego wartość w chwili 0 jest równa
$$V_{(x,y)}(0) = 120.$$
Wiadomo, że $y = -80$.
   (a) Znaleźć x (liczbę akcji w portfelu).
   (b) Znaleźć wartość portfela w chwili 1.
   (c) Znaleźć $V_{(x,y)}(1) - V_{(x,y)}(0)$.
   (d) Wykazać, że dla dowolnego portfela $V_{(x,y)}$ zachodzi następujący wzór
$$\widetilde{V}_{(x,y)}(1) - \widetilde{V}_{(x,y)}(0) = x(\widetilde{S}(1) - \widetilde{S}(0)).$$

2. Wykazać, że w jednokrokowym modelu dwumianowym nie występuje arbitraż wtedy i tylko wtedy, gdy
$$D < R < U.$$

3. Załóżmy, że na rynku dostępne są dwie akcje
$$S_1(0) = 100, \ U_1 = 0.2, \ D_1 = -0.1$$
$$S_2(0) = 100, \ U_1 = 0.25, \ D_2 = -0.05,$$
przy czym w obu przypadkach $p = 0.9$. Zakładamy, że na rynku nie są dostępne żadne instrumenty wolne od ryzyka. Skonstruować strategię arbitrażową. Jak będzie wyglądała strategia arbitrażowa, gdy założymy, że $S_2(0) = 80$?

4. Niech $S(0) = 100, \ U = 0.2, \ D = -0.1, \ p = 0.9, \ r = 10\%$. Dana jest opcja put P z ceną realizacji $K = 100$.
   (a) Znaleźć wypłatę z opcji P w chwili 1.
   (b) Znaleźć portlef replikujący opcję P.

(c) Znaleźć wartość portfela replikującego w chwili 0.

5. Dana jest opcja call C z ceną realizacji K.

   (a) Znaleźć portfel V replikujący opcję C.

   (b) Wykazać, że $C(0) = V(0)$.

   (c) Pokazać, że cena opcji call w chwili 0 jest równa

   $$C(0) = \frac{1}{1+r}\left(q(S(0)(1+U) - K) + (1-q)(S(0)(1+D) - K)_+\right),$$

   gdzie $q = \frac{R-D}{U-D}$.