Mechanika
i
Wytrzymałość Materiałów

Wykład nr 1
Wprowadzenie i podstawowe pojęcia.
Rachunek wektorowy.
Wypadkowa układu sił.
Równowaga.

Przedmiot

- **Mechanika (**ogólna, techniczna, teoretyczna) :
  - Dział fizyki zajmujący się badaniem **ruchu** i **równowagi** ciał materialnych, ustalaniem ogólnych praw ruchu oraz ich stosowaniem do wyidealizowanych ciał rzeczywistych (punkt materialny oraz ciało doskonale sztywne – ramy, kraty)
- **Wytrzymałość Materiałów**
  - jest nauką stosowaną, zajmującą się badaniem zjawisk występujących w ciałach rzeczywistych (odkształcalnych). Głównym jej zadaniem jest określenie wytrzymałości i sztywności urządzenia, konstrukcji lub elementu maszyny, czyli odporności na zniszczenie

Program zajęć (1)

- Podstawowe pojęcia
- Podstawy rachunku wektorowego
- Układy sił i stan równowagi
- Reakcje więzów w układach płaskich
- Siły wewnętrzne
- Reakcje więzów i siły wewnętrzne w układach przestrzennych
- Zjawisko tarcia i prawa tarcia

Program zajęć (2)

- Elementy kinematyki
- Podstawy dynamiki
- Analiza odkształceń i naprężeń
  - Rozciąganie
  - Ściskanie
  - Ścinanie
  - Skręcanie
  - Zginanie
- Wytrzymałość złożona, hipotezy wytrzymałościowe

Literatura

Antoniuk E., Kędzierzyński A., *Zadania z mechaniki ogólnej*. Statyka i kinematyka

Derski W., *Mechanika techniczna*.

Engel Z., Giergiel J., *Mechanika ogólna*. Część I. Statyka i kinematyka, Część II. Dynamika

Giergiel J., *Zbiór zadań z mechaniki ogólnej z odpowiedziami*,

Leyko J., *Mechanika ogólna*. T. 1. Statyka i kinematyka, T. 2. Dynamika

Leyko J., Szmelter J., *Zbiór zadań z mechaniki ogółnej*. T. 1. Statyka, T. 2. Kinematyka i dynamika,

Łunc M., Szaniawski A., *Zarys mechaniki ogólnej*

Mieszczerski J. L., *Zbiór zadań z mechaniki*

Misiak J., *Mechanika ogólna*. T. I. Statyka i kinematyka, T. II. Dynamika.

Misiak J., *Mechanika techniczna*. T. 1. Statyka i wytrzymałość materiałów, T. 2. Kinematyka i Dynamika,

Misiak J., *Zadania z mechaniki ogólnej*. Część I. Statyka, Część II. Kinematyka, Część III. Dynamika,

Niezgodziński M., Niezgodziński T., *Zbiór zadań z mechaniki ogólnej*.

Nizioł J., *Metodyka rozwiązywania zadań z mechaniki*

Osiński Z., *Mechanika ogólna.* Część I i II.

Zarankiewicz K., *Mechanika teoretyczna*. T. I. Statyka, T. II. Kinematyka, T. III. Dynamika,

Zawadzki J., Siuta W., *Mechanika ogólna*

Działy mechaniki

Statyka – bada przypadki, kiedy siły działające na ciało nie wywołują sił bezwładności, tj. są przykładane w nieskończenie długim czasie oraz równoważą się wzajemnie.

Kinematyka – zajmuje się badaniem ruchu ciał niezależnie od czynników wywołujących ten ruch. Przedmiotem badań są: droga, prędkość, przyspieszenie itd.

Dynamika – rozpatruje ruch ciał w zależności od sił działających na nie, bada zależności między takimi wielkościami jak: prędkość, przyśpieszenie, pęd, siła, energia itd.

Zasady dynamiki Newtona (1)

Prawo I

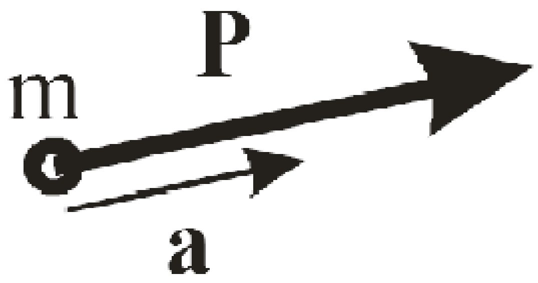
Punkt materialny, na który nie działa żadna siła lub działające siły równoważą się, pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym po linii prostej.

Zasady dynamiki Newtona (2)

Prawo II

Przyspieszenie punktu materialnego jest wprost proporcjonalne do siły działającej na ten punkt, a odwrotnie proporcjonalne do masy punktu materialnego. Jego zwrot i kierunek zgodny jest ze zwrotem I kierunkiem wektora siły.

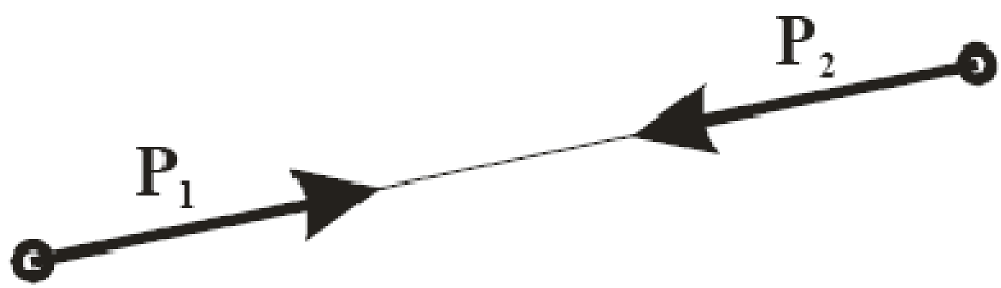
$$\mathbf{P} = \mathbf{m\,a}$$



Zasady dynamiki Newtona (3)

Prawo III

Dwa punkty materialne działają na siebie dwoma siłami równymi co do wartości, tym samym kierunku, ale o przeciwnym zwrocie.



$$\mathbf{P}_1 = -\mathbf{P}_2$$

$$P_1 = P_2$$

Idealizacje (1)

Punkt materialny – ciało o nieskończenie małych wymiarach, ale posiadające masę.

Modeluje ciała o bardzo małych wymiarach w porównaniu z wymiarami otoczenia.

Wymiary na tyle małe, aby można było pominąć obrót ciała względem układu odniesienia.

Idealizacje (2)

Ciało doskonale sztywne – odległości między jego punktami nie zmieniają się (nie podlega odkształceniom pod wpływem działających sił).

Model ciała rzeczywistego, gdy odkształcenia są pomijalnie małe w stosunku do wymiarów.

Idealizacje (3)

<u>Zasada zesztywnienia</u>

Warunki równowagi sił działających na ciało odkształcalne nie zostaną naruszone przez zesztywnienie tego ciała.

Punkt przyłożenia siły nie ulega przesunięciu mimo odkształcenia konstrukcji.

Zasada superpozycji

Działania poszczególnych obciążeń są od siebie niezależne.

Efekt działania (odkształcenie, siła wewnętrzna) dwóch lub więcej wpływów (obciążeń) może zostać wyznaczony jako suma efektów wywołanych działaniem tych wpływów oddzielnie.

Skalar i wektor

- **Skalar** – do opisania niezbędne jest podanie jednej wartości w odniesieniu do określonego punktu w przestrzeni.
- **Wektor** – do opisania poza miarą (modułem, długością wektora), niezbędne jest podanie:
  - kierunku (ułożenia linii działania),
  - zwrotu (uporządkowania punktów od początku do końca wektora),
  - punktu zaczepienia.

Interpretacja geometryczna, przykłady

- **Skalary**:
  - gęstość, masa, temperatura, energia;
- **Wektory**:
  - przemieszczenie, prędkość, przyspieszenie, siła
- Wektor można przedstawić jako uporządkowaną parę punktów, z których jeden jest początkiem wektora, a drugi jego końcem.

Rodzaje wektorów

- Wektory **zaczepione** – związane z punktem przyłożenia;
- Wektory **ślizgające się** – mogące poruszać się wzdłuż linii działania (np. wektory sił w mechanice);
- Wektory **swobodne** – mogą zostać przyłożone w dowolnym punkcie (np. wektory momentów sił).

Podstawowe jednostki

- **Masa**: g (gram); kg = 1000 g (kilogram)
- **Długość**: mm = 0,001 m (milimetr); m (metr); km = 1000 m (kilometr)
- **Czas**: s (sekunda); min = 60 s (minuta); h = 60 min = 3600 s (godzina)
- **Siła**: N = kg*m/s^2 (niuton); kN = 1000N (kiloniuton)
- **Moment siły**: Nm (Niutonometr)

Działania na wektorach

- Suma wektorów;
- Różnica wektorów;
- Mnożenie wektora przez skalar;
- Iloczyn wektorów:
  - skalarny;
  - wektorowy;
  - mieszany;
  - inne wielokrotne iloczyny wektorów.

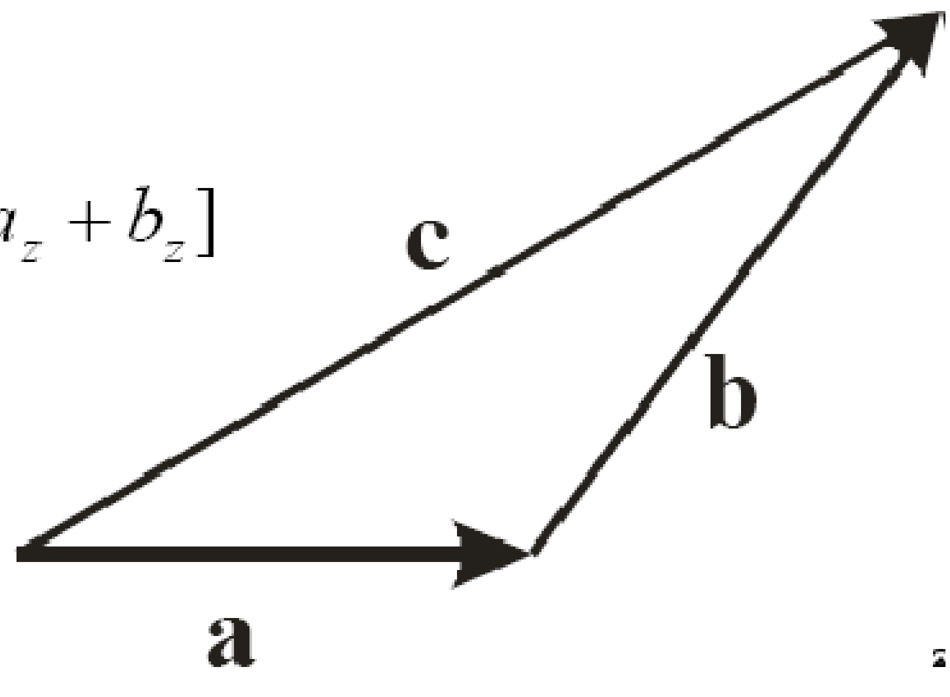
Dodawanie wektorów

- Suma wektorowa wektorów **a** i **b**:

$$\mathbf{a} = [a_x, a_y, a_z] \quad \mathbf{b} = [b_x, b_y, b_z]$$

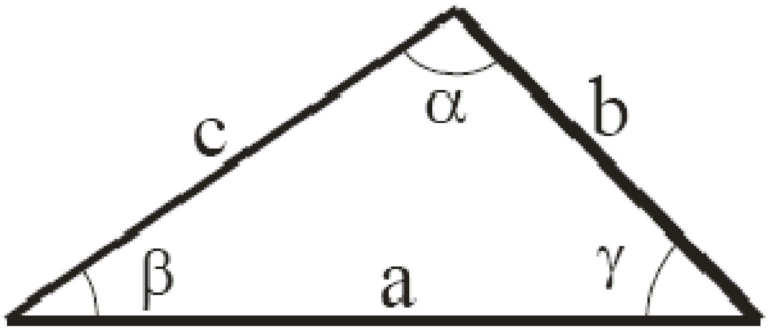
$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$$

$$\mathbf{c} = [a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z]$$



Twierdzenie cosinusów

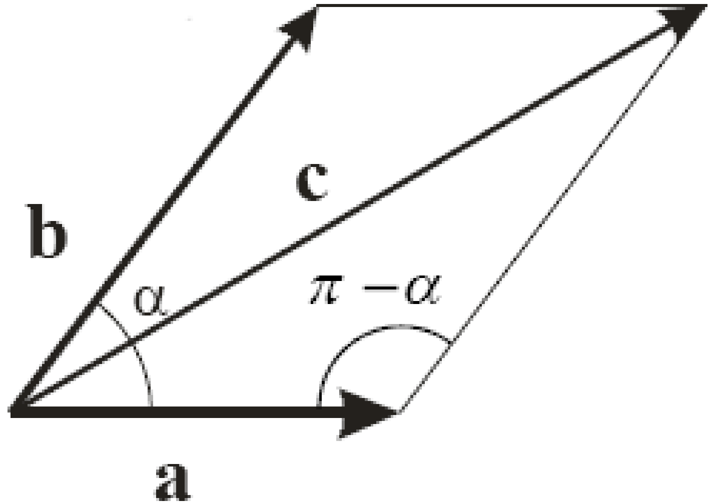
Kwadrat długości boku trójkąta leżącego naprzeciw kąta γ jest równy sumie kwadratów długości boków leżących przy tym kącie oraz podwojonego iloczynu tych długości boków i cosinusa tego kąta γ.



$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$$

Zasada równoległoboku

Suma dwóch wektorów może zostać przedstawiona jako przekątna równoległoboku zbudowanego na bazie sumowanych wektorów przecinająca kąt między tymi wektorami.



$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(\pi - \alpha)} =$$
$$= \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}$$

Odejmowanie wektorów (1)

- Różnica wektorów **a** i **b** jest równa sumie wektora **a** i wektora przeciwnego do **b**:

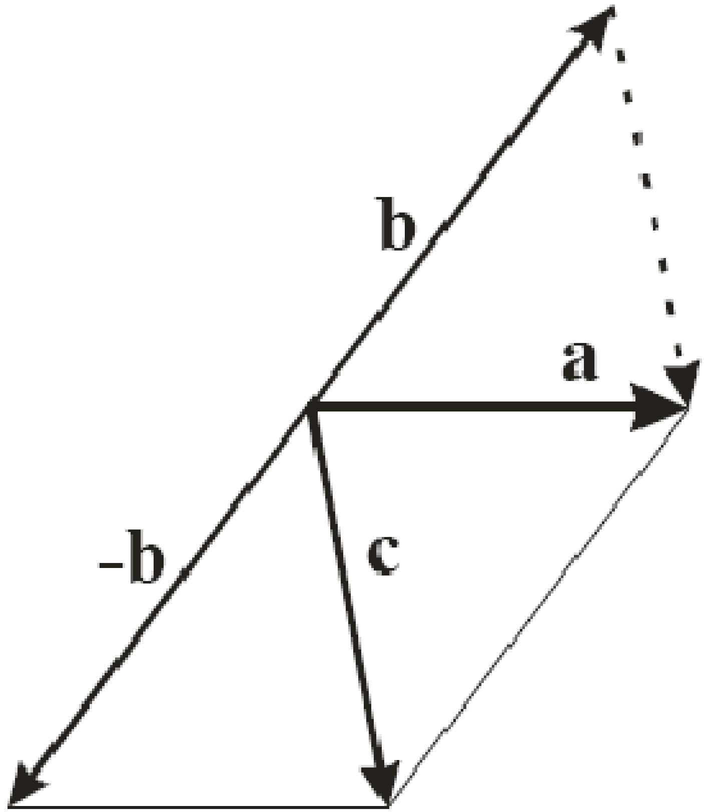
$$\mathbf{a} = [a_x, a_y, a_z] \qquad \mathbf{b} = [b_x, b_y, b_z]$$

$$-\mathbf{b} = [-b_x, -b_y, -b_z] \qquad \mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b} = [a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z]$$

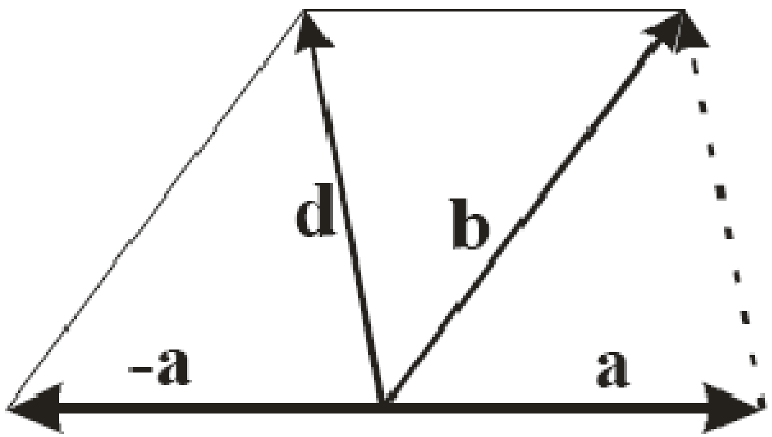
- Różnica wektorów **b** i **a** jest równa sumie wektora **b** i wektora przeciwnego do **a**:

$$-a = [-a_x, -a_y, -a_z] \qquad \mathbf{d} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = [b_x - a_x, b_y - a_y, b_z - a_z]$$

Odejmowanie wektorów (2)



$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \mathbf{a} - \mathbf{b}$$



$$\mathbf{d} = \mathbf{b} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{b} - \mathbf{a}$$

Skalowanie wektora

- Mnożenie wektora przez skalar (*n*) – wyniku otrzymuje się wektor o takim samym kierunku, mierze *n* razy większej (przy |*n*|>1)

$n>1$

- lub *1/n* razy mniejszej (przy |*n*|<1) i takim samym zwrocie, jeżeli *n*>0

$0<n<1$

- zaś przeciwnym, jeżeli *n*<0

$-1<n<0$

$n<-1$

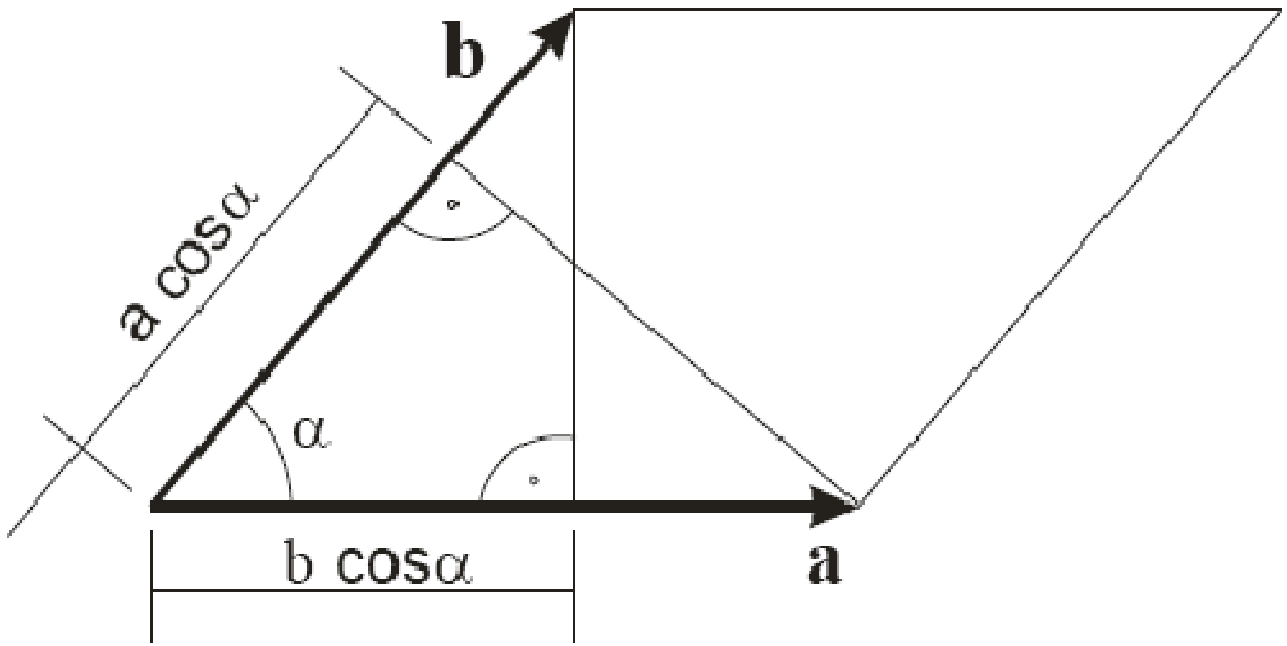
Iloczyn skalarny (1)

Iloczyn skalarny – wielkość skalarna równa iloczynowi modułów mnożonych wektorów i cosinusa kąta zawartego między nimi (iloczyn miary jednego wektora przez rzut prostokątny drugiego na kierunek pierwszego).

Iloczyn skalarny (2)

$$\mathbf{a} = [a_x, a_y, a_z] \qquad \mathbf{b} = [b_x, b_y, b_z]$$

$$s = \mathbf{a} \circ \mathbf{b} = a \cdot b \cdot \cos \sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$



Iloczyn wektorowy (1)

Iloczyn wektorowy (wektor):

- kierunek prostopadły do płaszczyzny wyznaczonej przez mnożone wektory,
- zwrot określony zgodnie z regułą śruby prawoskrętnej,
- miara równa iloczynowi miar mnożonych wektorów i sinusa kąta między nimi (pole powierzchni równoległoboku zbudowanego na mnożonych wektorach).

Iloczyn wektorowy (2)

$$\mathbf{a} = [a_x, a_y, a_z] \quad \mathbf{b} = [b_x, b_y, b_z]$$

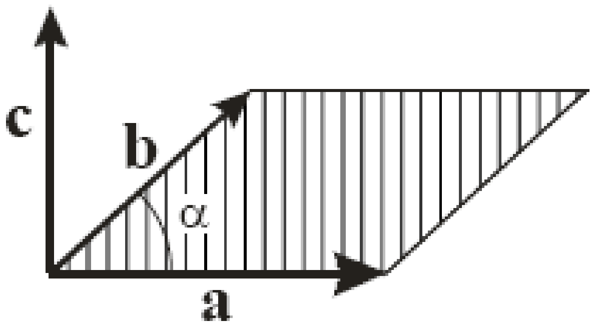
$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

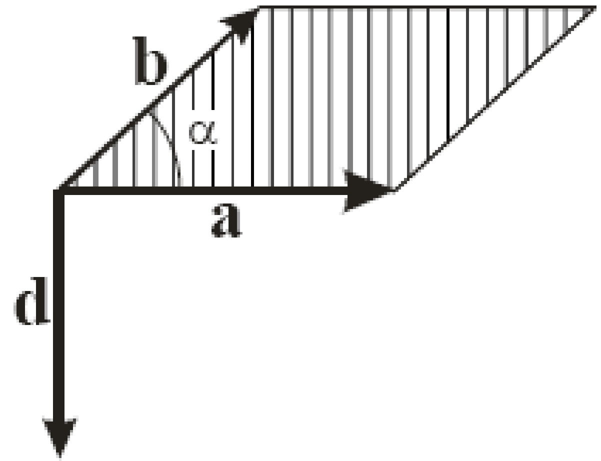
$$\mathbf{d} = \mathbf{b} \times \mathbf{a} \qquad \mathbf{d} = -\mathbf{c}$$

$$\mathbf{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \qquad \mathbf{d} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

$$c = d = a \cdot b \cdot \sin \sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) =$$

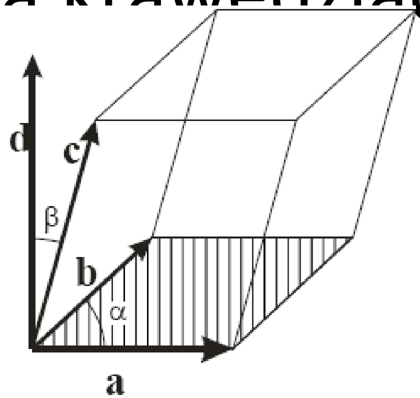
$$= \sqrt{\left(a_y b_z - a_z b_y\right)^2 + \left(a_z b_x - a_x b_z\right)^2 + \left(a_x b_y - a_y b_x\right)^2}$$





Iloczyn mieszany

Iloczyn mieszany – wielkość skalarna równa objętości równoległościanu zbudowanego na mnożonych wektorach jako na krawędziach.



$$V = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \circ \mathbf{c}$$

$$V = \mathbf{d} \circ \mathbf{c} = d \cdot c \cos\beta$$

$$d = ab \sin\alpha$$

$$V = ab \sin\alpha \cdot c \cos\beta$$

Przemienność działań

Suma wektorów i iloczyn skalarny są działaniami przemiennymi,

natomiast różnica wektorów i iloczyn wektorowy nie są przemienne.

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{c} \qquad \mathbf{b} - \mathbf{a} = \mathbf{d} \quad => \quad \mathbf{d} = -\mathbf{c}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c} \qquad \mathbf{b} \times \mathbf{a} = \mathbf{d} \quad => \quad \mathbf{d} = -\mathbf{c}$$

Pojęcie siły

Siła – wzajemne oddziaływanie ciał, które przejawia się w wyprowadzeniu ciała ze stanu spoczynku, bądź przez zmianę ruchu już poruszającego się ciała. Aby scharakteryzować siłę należy podać wektor, opisujący tą siłę, oraz punkt przyłożenia siły.

Układy sił

Układ sił – dowolna grupa oddziaływań ciał zewnętrznych na analizowane ciało.

Równoważne układy sił

Dwa układy sił są równoważne wtedy, gdy zastąpienie jednego układu, działającego na ciało sztywne, przez drugi układ sił **nie wywoła zmiany ruchu**, czyli nie spowoduje zmiany kierunku ruchu, prędkości, przyśpieszenia, itd.

Wypadkowa

Siła wypadkowa – Pojedynczy wektor, który jest sumą wszystkich wektorów sił z układu, przyłożonego do punktu materialnego i stanowi układ równoważny, pod warunkiem, że siła wypadkowa jest przyłożona do tego samego punktu materialnego.

Płaski i przestrzenny układ sił

Układ sił nazywamy **płaskim**, jeżeli kierunki wszystkich sił tego układu położone są w jednej płaszczyźnie.

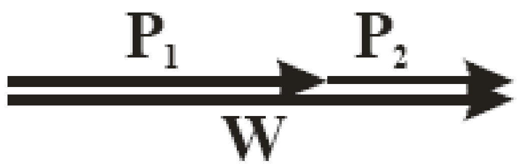
W każdym innym przypadku układ nazywamy **przestrzennym**.

Układ sił zbieżnych

- Układ sił zbieżnych – linie działania wszystkich sił przecinają się w jednym punkcie, tzw. punkcie zbieżności.
- Określanie wypadkowej układu sił:
  - działających wzdłuż jednej prostej;
  - zbieżnych
    - metoda graficzna;
    - metoda analityczna.

Siły działające wzdłuż jednej prostej

Wypadkowa układu sił działających wzdłuż jednej prostej jest wektorem o także działającym wzdłuż tej prostej, zwrocie zgodnym z większą ze składanych sił i mierze równej sumie, gdy miary wektorów składowych są zgodne, lub różnicy miar wektorów składowych, gdy zwroty składowych są przeciwne.

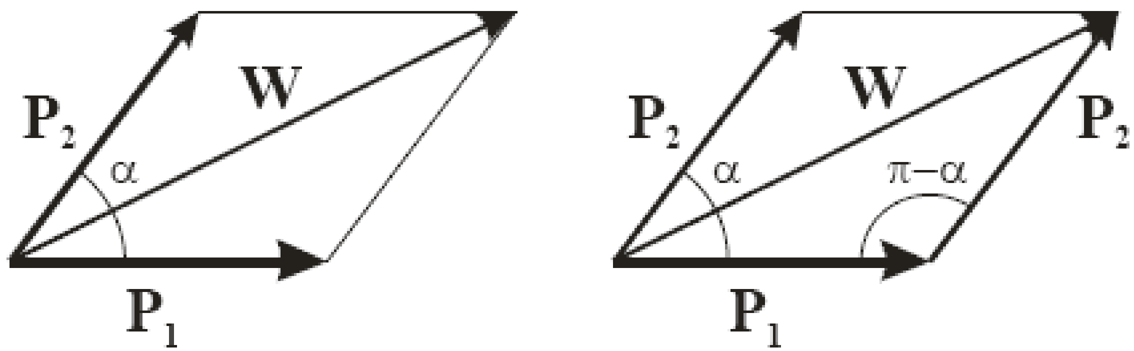


$$W = P_1 + P_2$$

$$W = P_1 - P_2$$

Wypadkowa
- metoda graficzna

Wypadkowa układu dwóch sił może zostać wyznaczona jako przekątna równoległoboku zbudowanego w oparciu o wektory składowe przecinająca kąt między tymi wektorami.

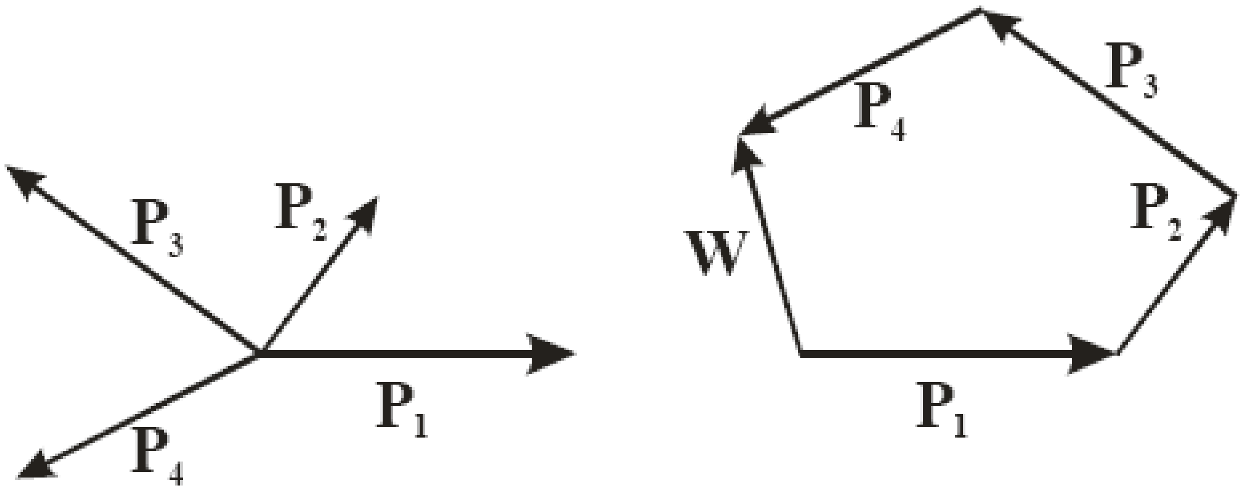


$$W = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 - 2P_1P_2\cos(\pi - \alpha)} =$$

$$= \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2\cos\alpha}$$

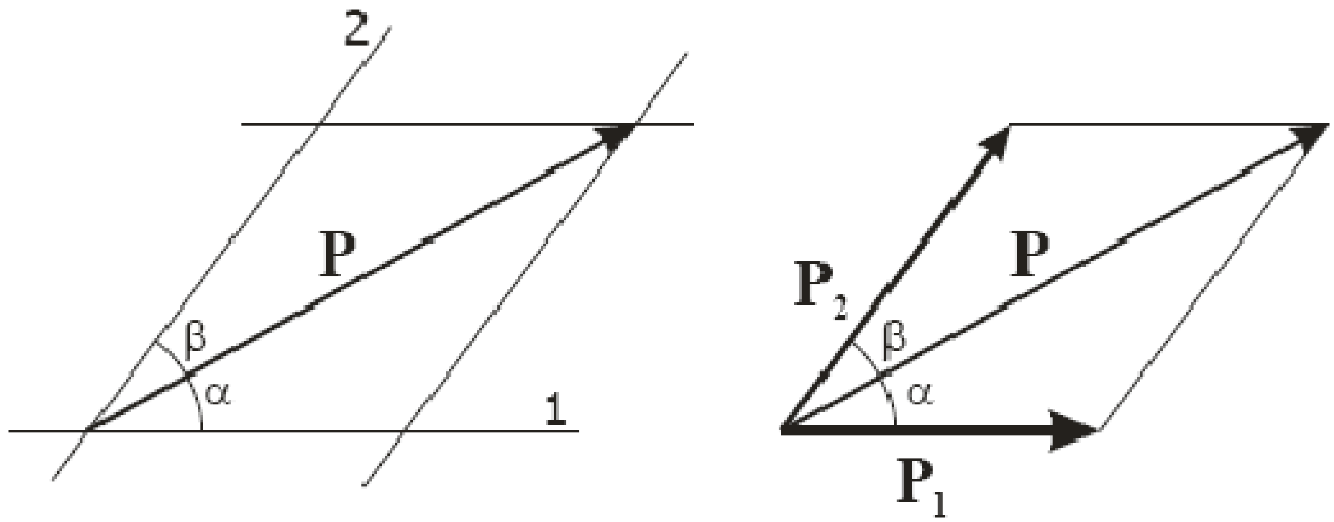
Wielobok sznurowy

Do końca pierwszej siły przykładany jest początek siły następnej, itd. Początek pierwszej siły połączony z końcem ostatniej określa wypadkową



Rozkładanie siły na składowe

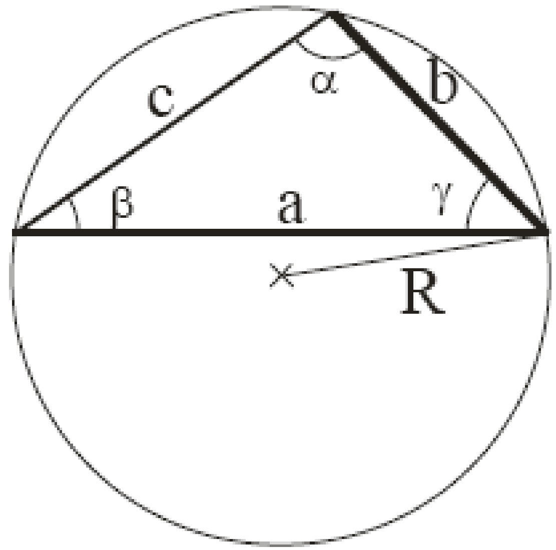
Przez początek i koniec danej siły przeprowadza się kierunki, na które siła ma zostać rozłożona. Siły składowe mogą zostać wyznaczone jako boki tak zbudowanego równoległoboku.



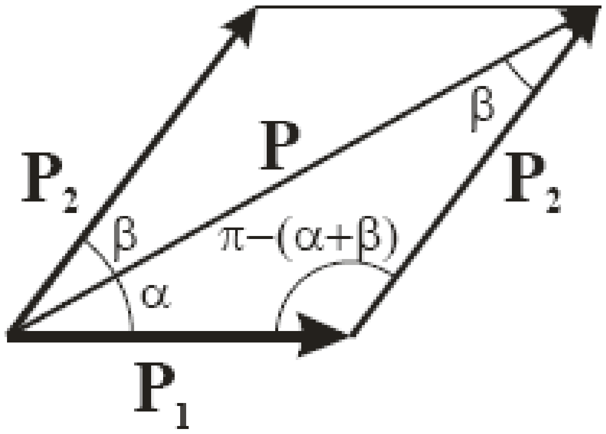
Twierdzenie sinusów

W dowolnym trójkącie stosunek długości boku do sinusa przeciwległego kąta jest stały i równa się długości średnicy okręgu opisanego na trójkącie.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$



Miary wektorów składowych



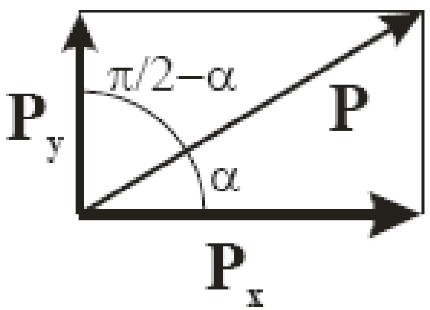
$$\frac{P_1}{\sin\beta} = \frac{P_2}{\sin\alpha} = \frac{P}{\sin(\pi - (\alpha + \beta))}$$

$$P_1 = \frac{P\sin\beta}{\sin(\pi - (\alpha + \beta))} = \frac{P\sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$P_2 = \frac{P\sin\alpha}{\sin(\pi - (\alpha + \beta))} = \frac{P\sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$P_x = \frac{P\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\sin\frac{\pi}{2}} = P\cos\alpha$$



$$P_y = \frac{P\sin\alpha}{\sin\frac{\pi}{2}} = P\sin\alpha$$

Wypadkowa
- metoda analityczna

Składowe sił układu:

$$P_{ix} = P_i \cos\alpha_i \qquad P_{iy} = P_i \sin\alpha_i$$

Składowe wypadkowej:

$$W_x = P_{1x} + P_{2x} + \ldots + P_{nx} \qquad W_y = P_{1y} + P_{2y} + \ldots + P_{ny}$$

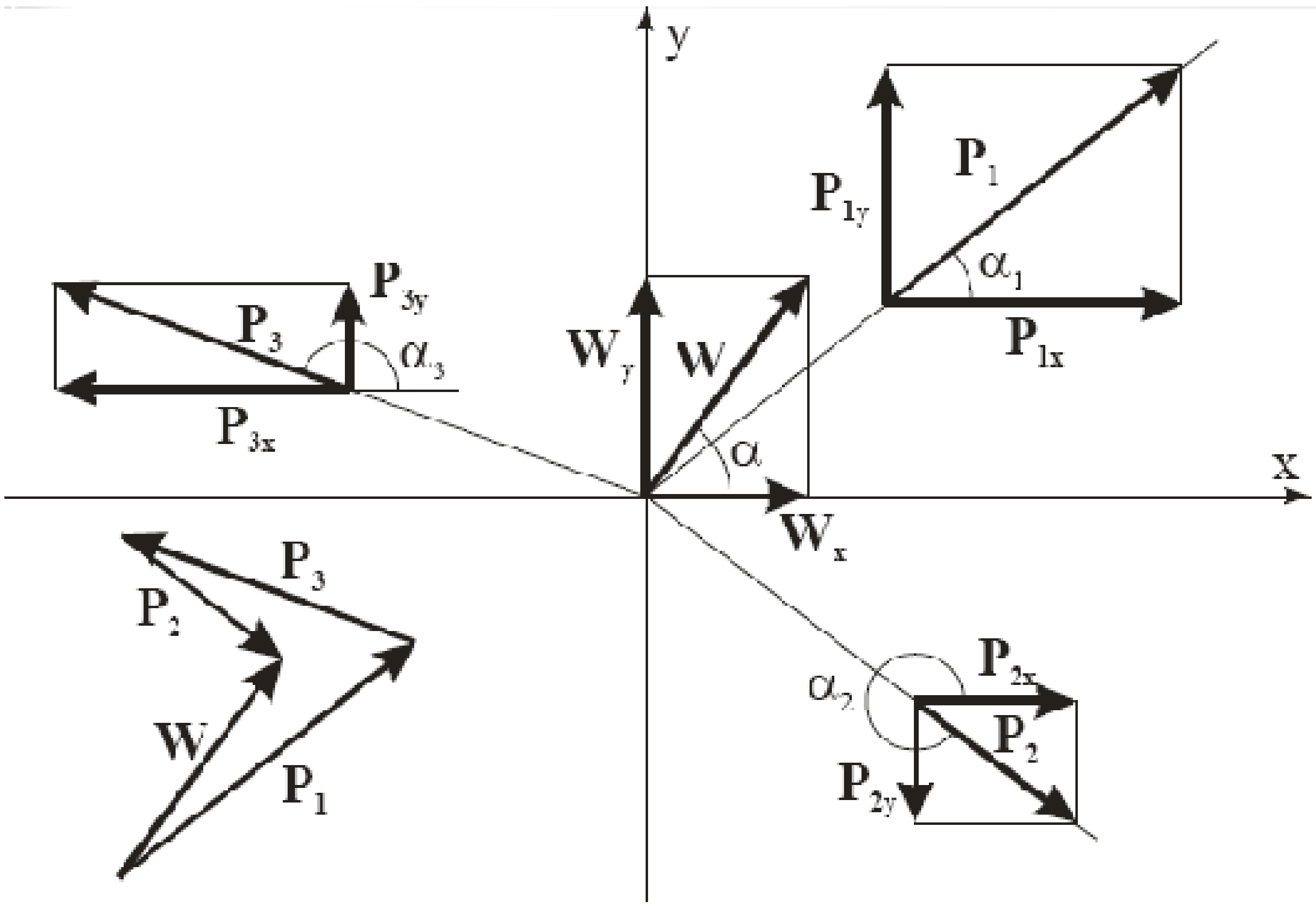
Siła wypadkowa:

$$W = \sqrt{W_x^{\,2} + W_y^{\,2}}$$

Kierunek wypadkowej:

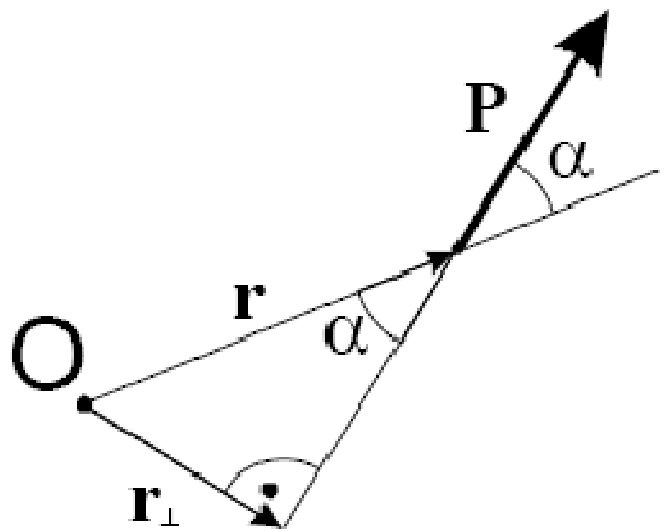
$$\cos\alpha = \frac{W_x}{W} \qquad \sin\alpha = \frac{W_y}{W}$$

Przykład



Moment siły (1)

Moment siły względem punktu – iloczyn wektorowy promienia wodzącego, czyli wektora łączącego omawiany punkt i punkt przyłożenia siły, oraz wektora siły:



$$\mathbf{M}_O^P = \mathbf{r} \times \mathbf{P}$$

$$M_O^P = r \cdot P \sin\alpha$$

$$r_\perp = r \cdot \sin\alpha$$

$$M_O^P = r_\perp \cdot P$$

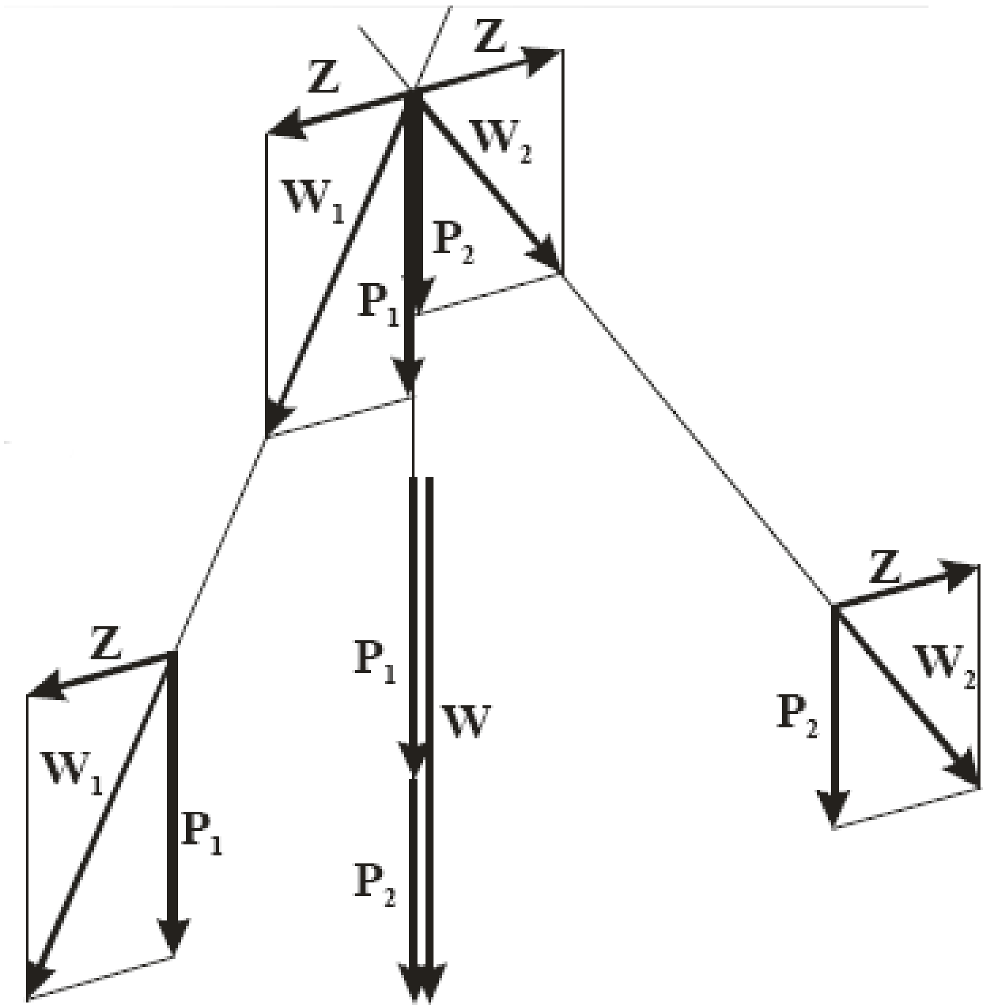
Moment siły (2)

Moment siły względem prostej - Momentem względem prostej nazywamy iloczyn wektorowy promienia wodzącego, czyli wektora łączącego punkt prostej najbliższy kierunkowi siły i punkt przyłożenia siły, i wektora siły:

$$\mathbf{M_l = r \times P}$$

Wypadkowa układu sił równoległych

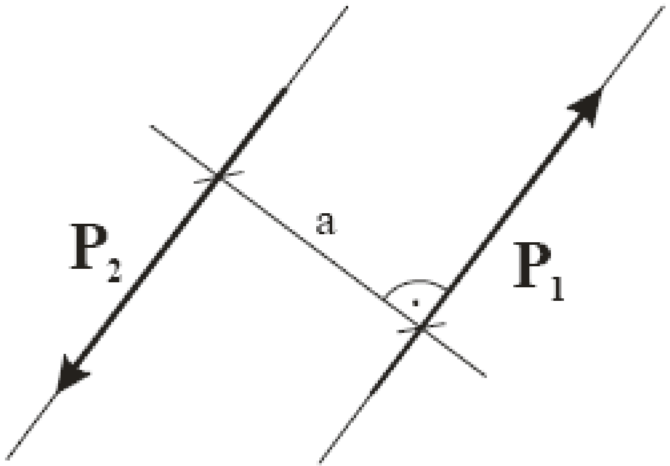
Przyłożenie układu zerowego (układ sił równoważących się, np. dwie siły o takiej samej mierze, linii działania i przeciwnych zwrotach) nie wpływa na stan równowagi ciała.



Para sił

Parę sił stanowią dwie siły o równoległych liniach działania, o przeciwnych zwrotach, zaś o tych samych miarach.

Ramię pary sił – odległość pomiędzy kierunkami sił nosi nazwę ramienia pary sił



$$P_1 = P_2 = P$$

$$M = Pa$$

Dowolny płaski układ sił (1)

Redukcja do siły wypadkowej przyłożonej w biegunie redukcji i wypadkowego momentu względem tego bieguna (pary sił).

Siły składowe mogą zostać przeniesione do bieguna redukcji, pod warunkiem przyłożenie momentu od tych sił względem bieguna redukcji.

Dowolny płaski układ sił (2)

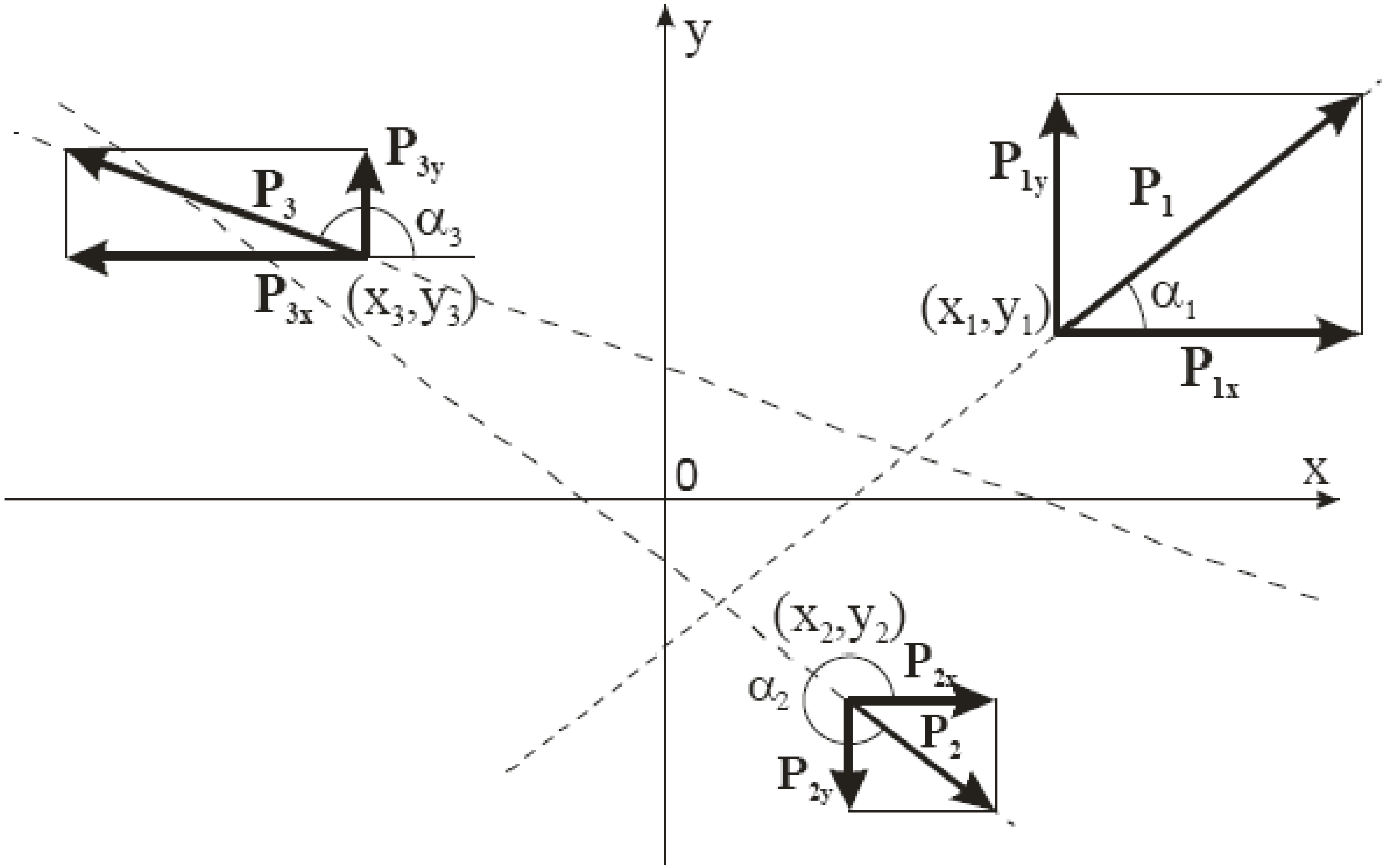
Wypadkową siłę wyznacza się dla układu zbieżnego przyłożonego w biegunie redukcji. *n*

$$\mathbf{W} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}_i$$

Wypadkowy moment jest równy sumie momentów od sił składowych.

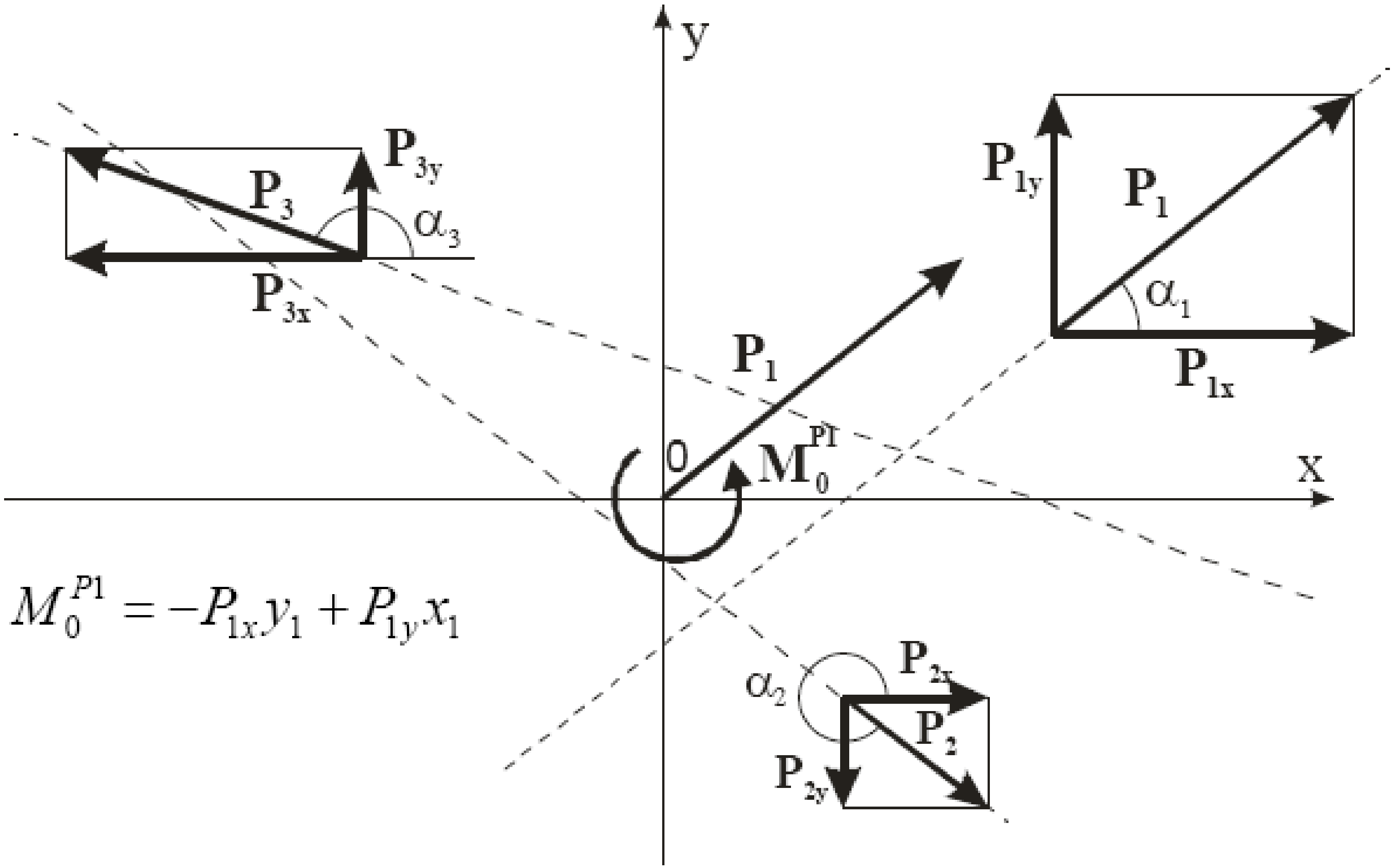
$$\mathbf{M}_o = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times \mathbf{P}_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}_{io}$$

Przykład (1)



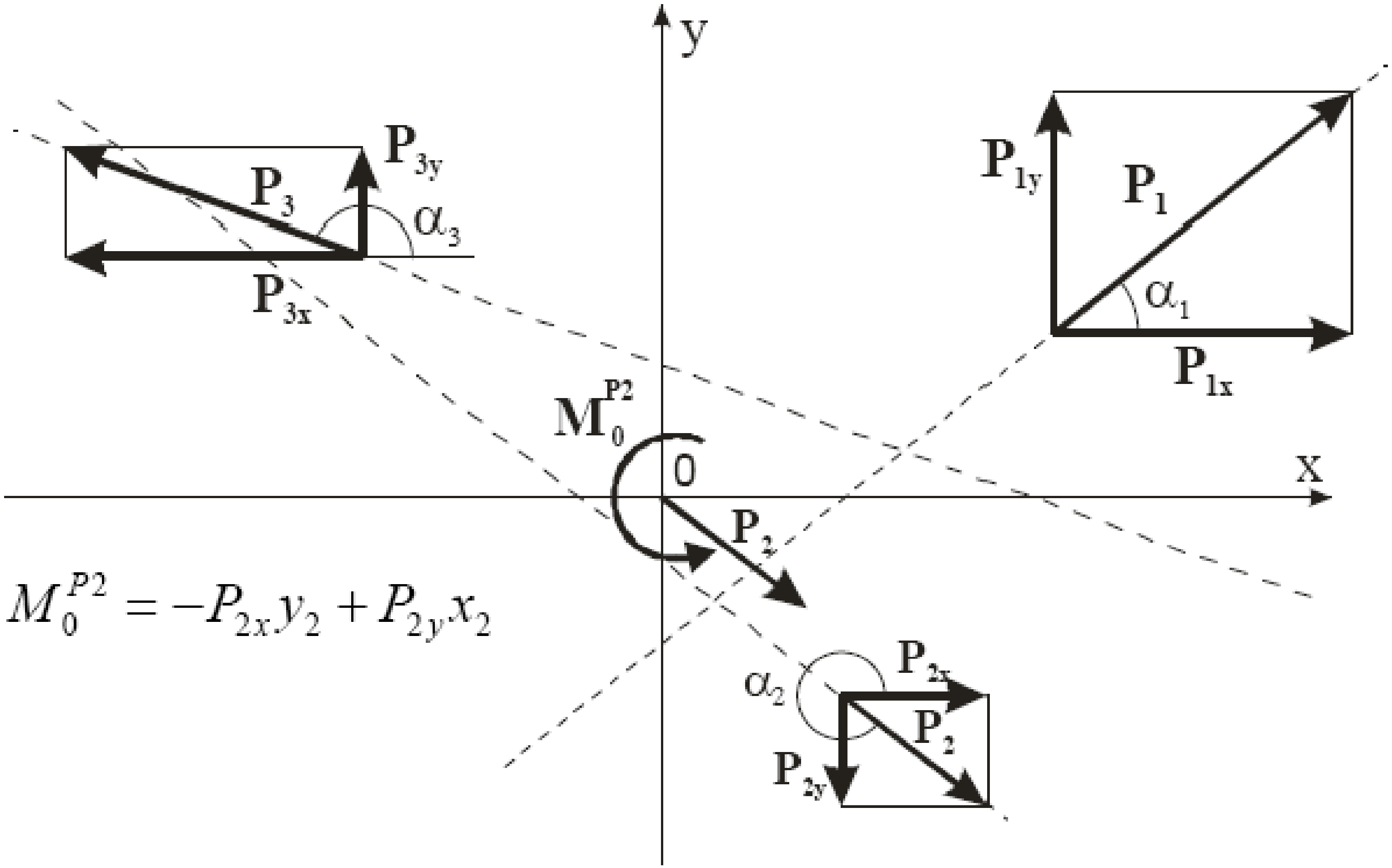
y
x
0
P_{3y}
P_3
α_3
P_{3x}
(x_3,y_3)
P_{1y}
P_1
α_1
(x_1,y_1)
P_{1x}
(x_2,y_2)
P_{2x}
α_2
P_2
P_{2y}

Przykład (2)



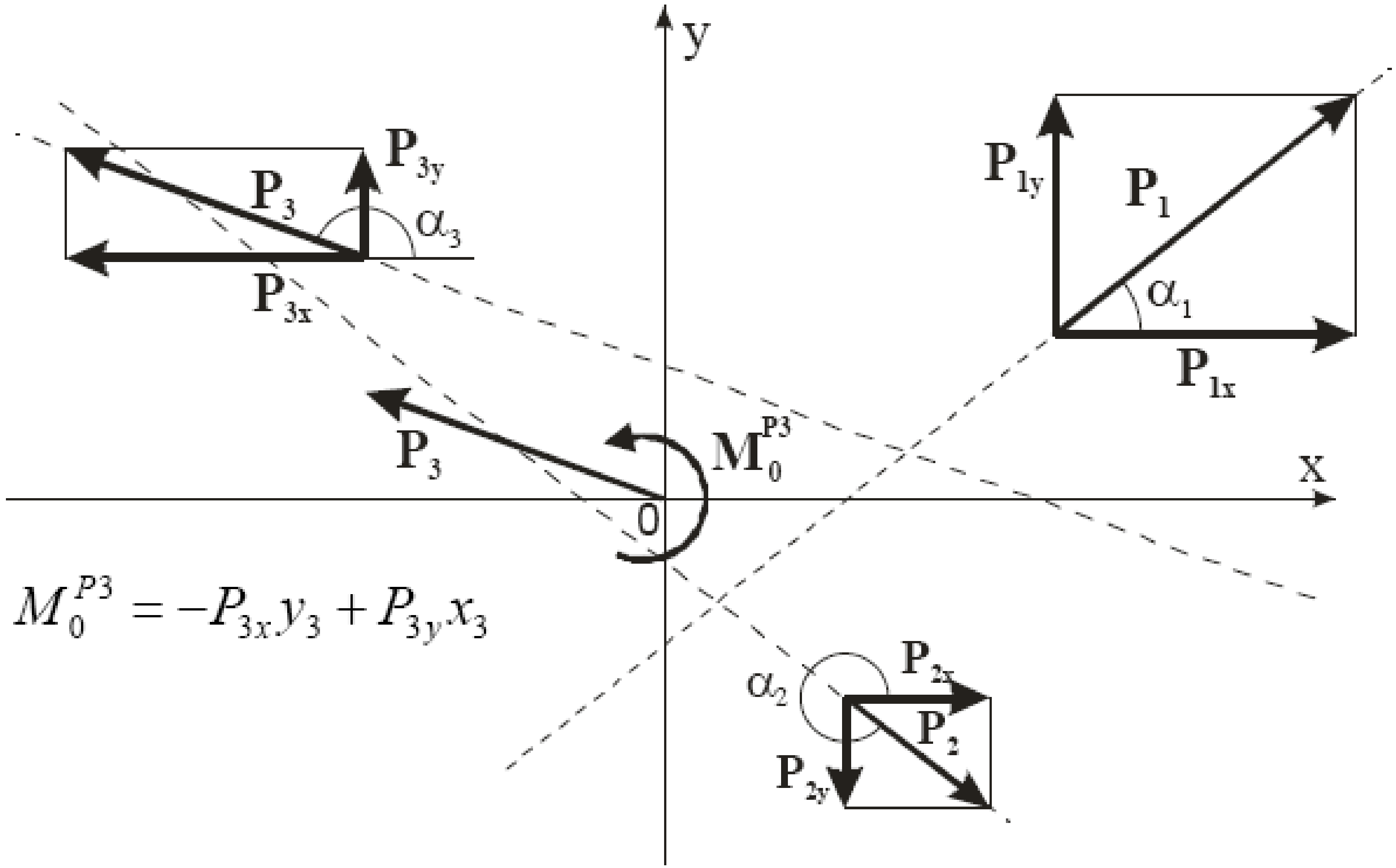
$$M_0^{P1} = -P_{1x}y_1 + P_{1y}x_1$$

Przykład (3)



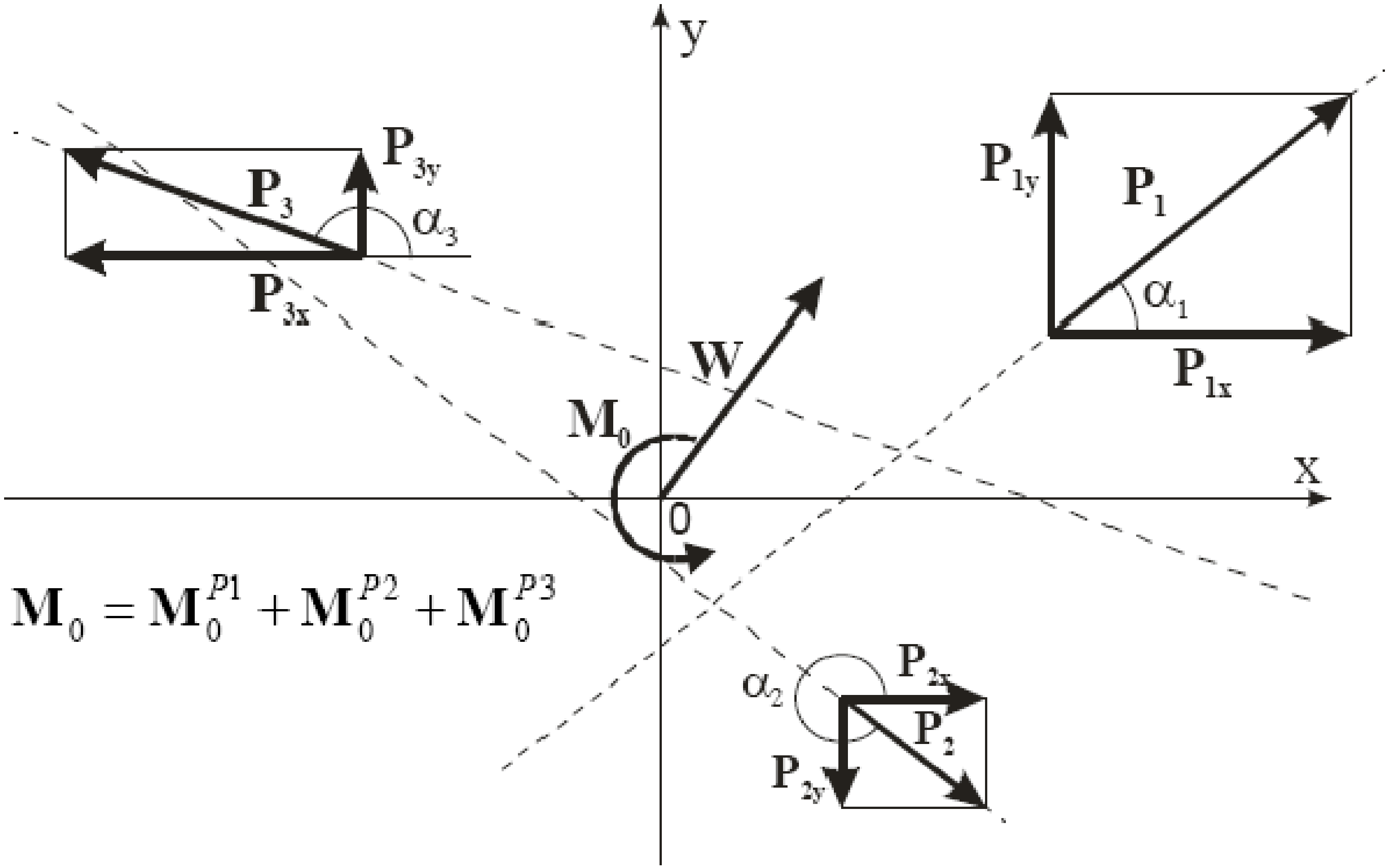
$$M_0^{P2} = -P_{2x} y_2 + P_{2y} x_2$$

Przykład (4)



$$M_0^{P3} = -P_{3x} y_3 + P_{3y} x_3$$

Przykład (5)



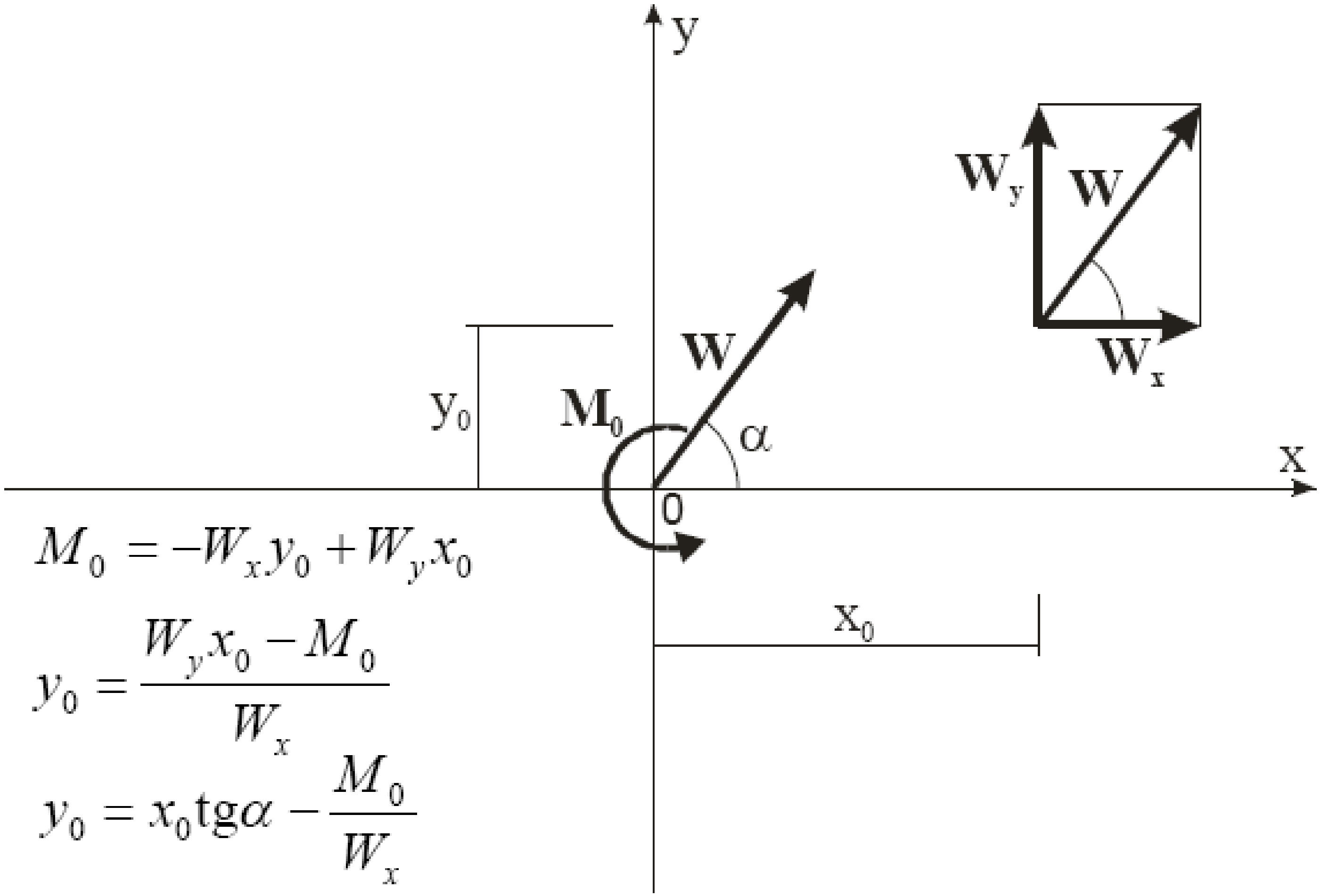
$$\mathbf{M}_0 = \mathbf{M}_0^{P1} + \mathbf{M}_0^{P2} + \mathbf{M}_0^{P3}$$

Dowolny płaski układ sił (3)

Wypadkowy moment może zostać przedstawiony jako:

- wektor momentu;
- para sił;
- moment od siły wypadkowej przyłożonej nie w biegunie redukcji, a na linii działania wyznaczonej w taki sposób, że moment od siły wypadkowej równy jest momentowi od sił składowych.

Moment od wypadkowej



$$M_0 = -W_x y_0 + W_y x_0$$

$$y_0 = \frac{W_y x_0 - M_0}{W_x}$$

$$y_0 = x_0 \operatorname{tg}\alpha - \frac{M_0}{W_x}$$

Uogólnienie w przestrzeni

Układ sił **zbieżnych** – redukcja do siły wypadkowej przyłożonej w punkcie zbieżności.

Dowolny przestrzenny układ sił – redukcja do wypadkowej siły i wypadkowego momentu.