

Mechanika

Wykład nr 2

Wypadkowa dowolnego układu sił.

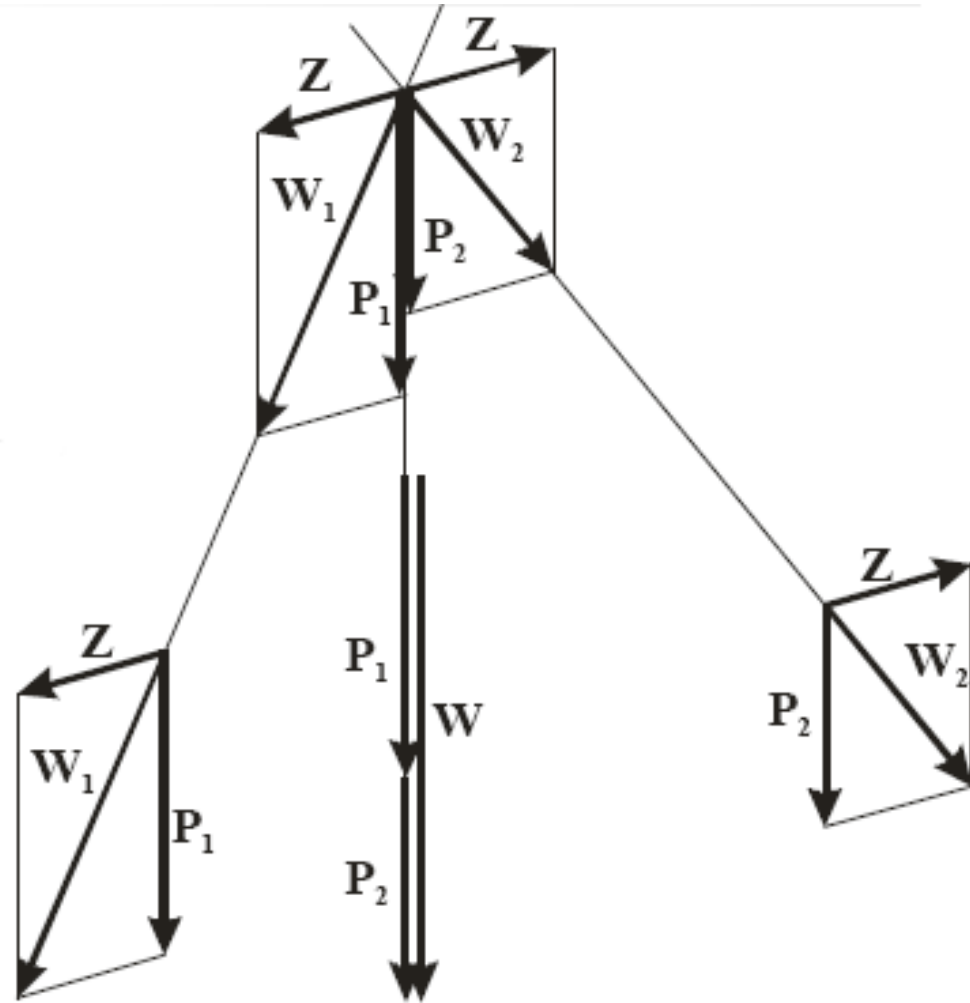
Równowaga.

Rodzaje sił i obciążeń.

Wyznaczanie reakcji.

Wypadkowa układu sił równoległych

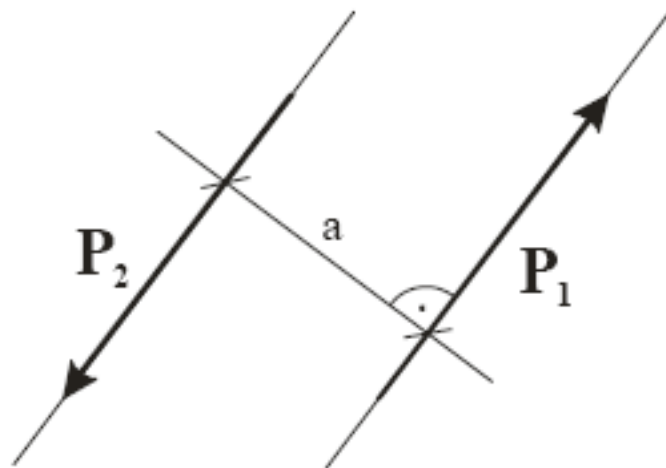
Przyłożenie układu zerowego (układ sił równoważących się, np. dwie siły o takiej samej mierze, linii działania i przeciwnych zwrotach) nie wpływa na stan równowagi ciała.



Para sił

Parę sił stanowią dwie siły o równoległych liniach działania, o przeciwnych zwrotach, zaś o tych samych miarach.

Ramię pary sił – odległość pomiędzy kierunkami sił nosi nazwę ramienia pary sił



$$P_1 = P_2 = P$$

$$M = Pa$$

Dowolny płaski układ sił (1)

Redukcja do siły wypadkowej przyłożonej w biegunie redukcji i wypadkowego momentu względem tego bieguna (pary sił).

Siły składowe mogą zostać przeniesione do bieguna redukcji, pod warunkiem przyłożenie momentu od tych sił względem bieguna redukcji.

Dowolny płaski układ sił (2)

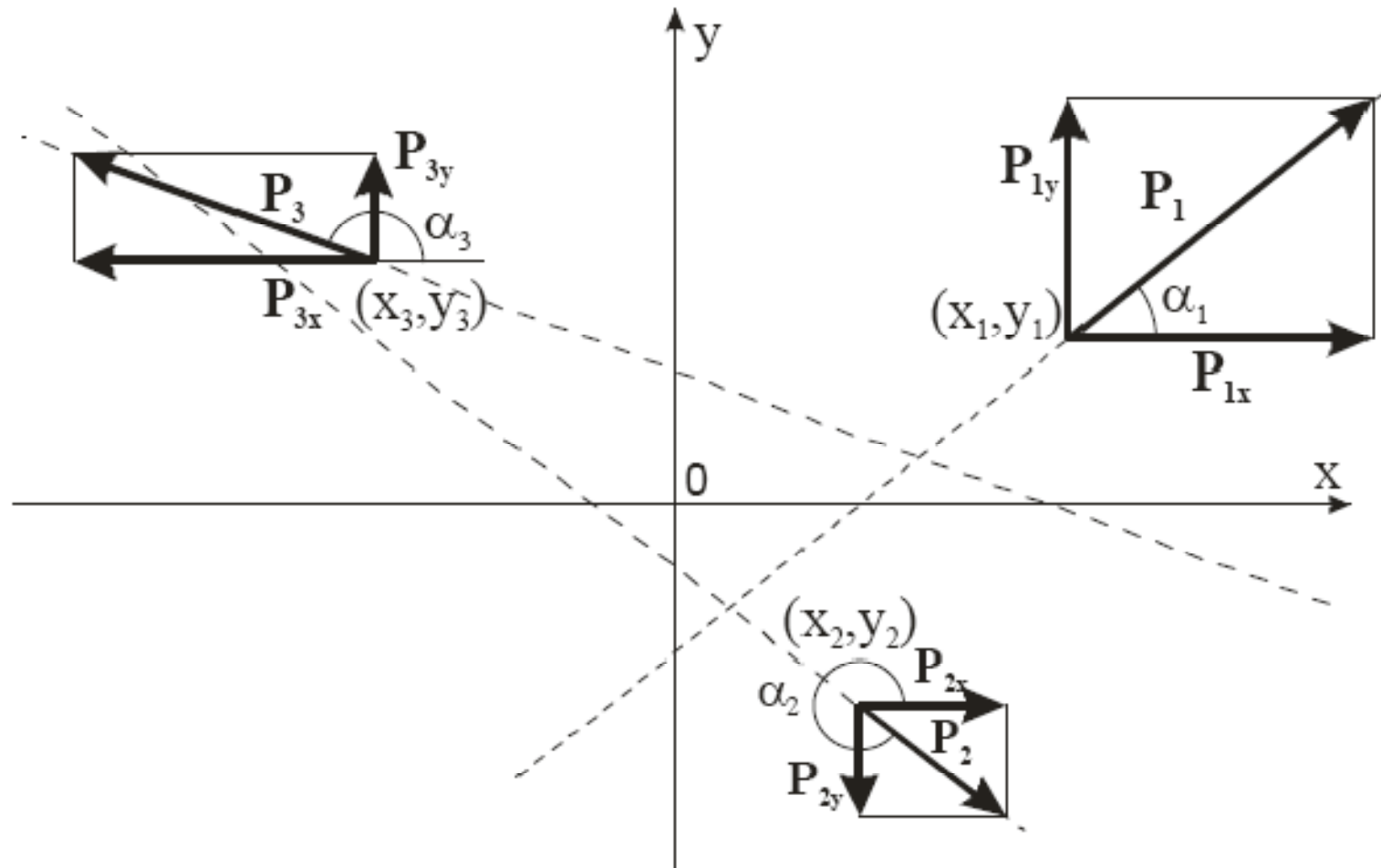
Wypadkową siłę wyznacza się dla układu zbieżnego przyłożonego w biegunie redukcji. n

$$\mathbf{W} = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i$$

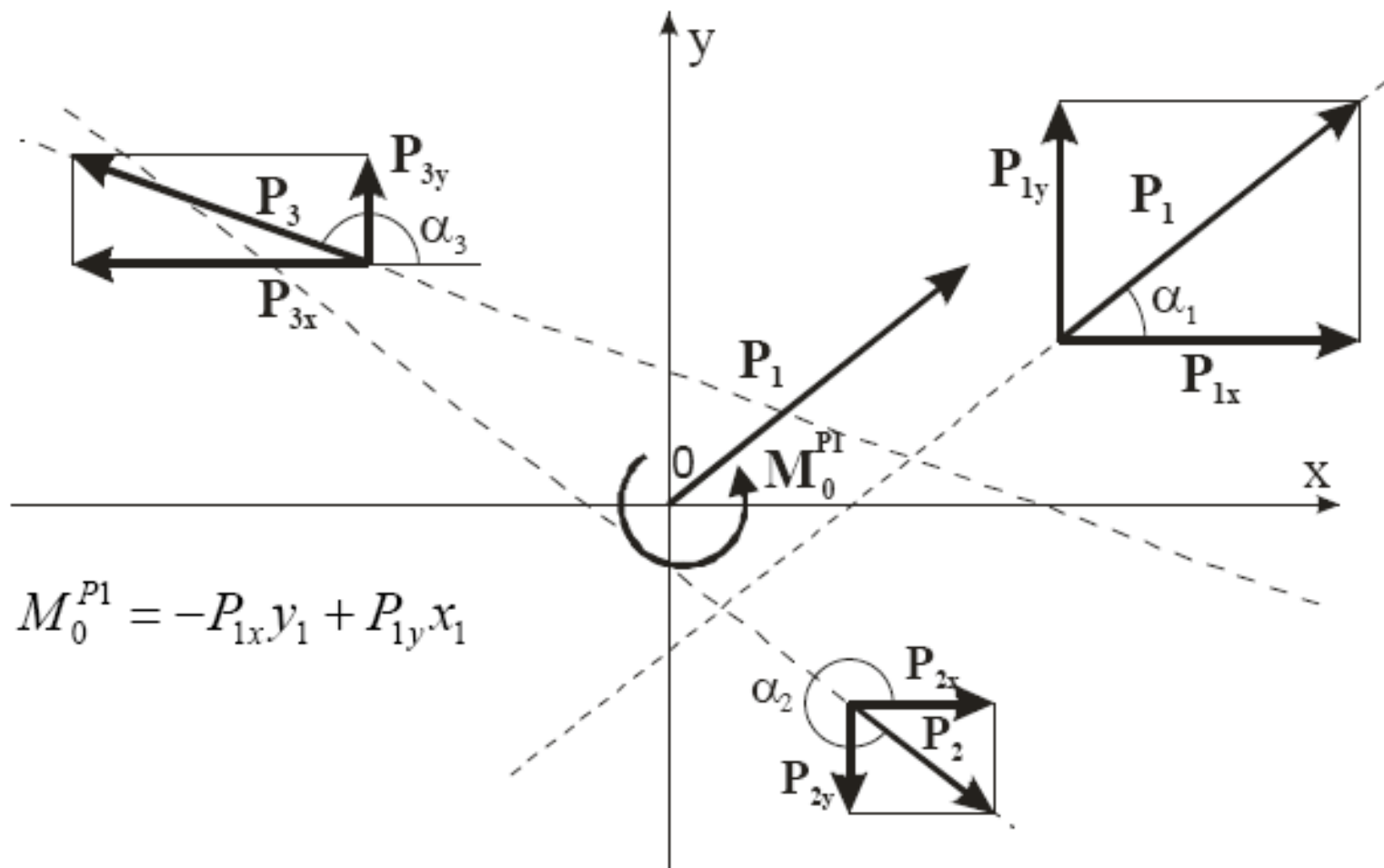
Wypadkowy moment...ny sumie momentów od sił składowych.

$$\mathbf{M}_o = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{P}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_{io}$$

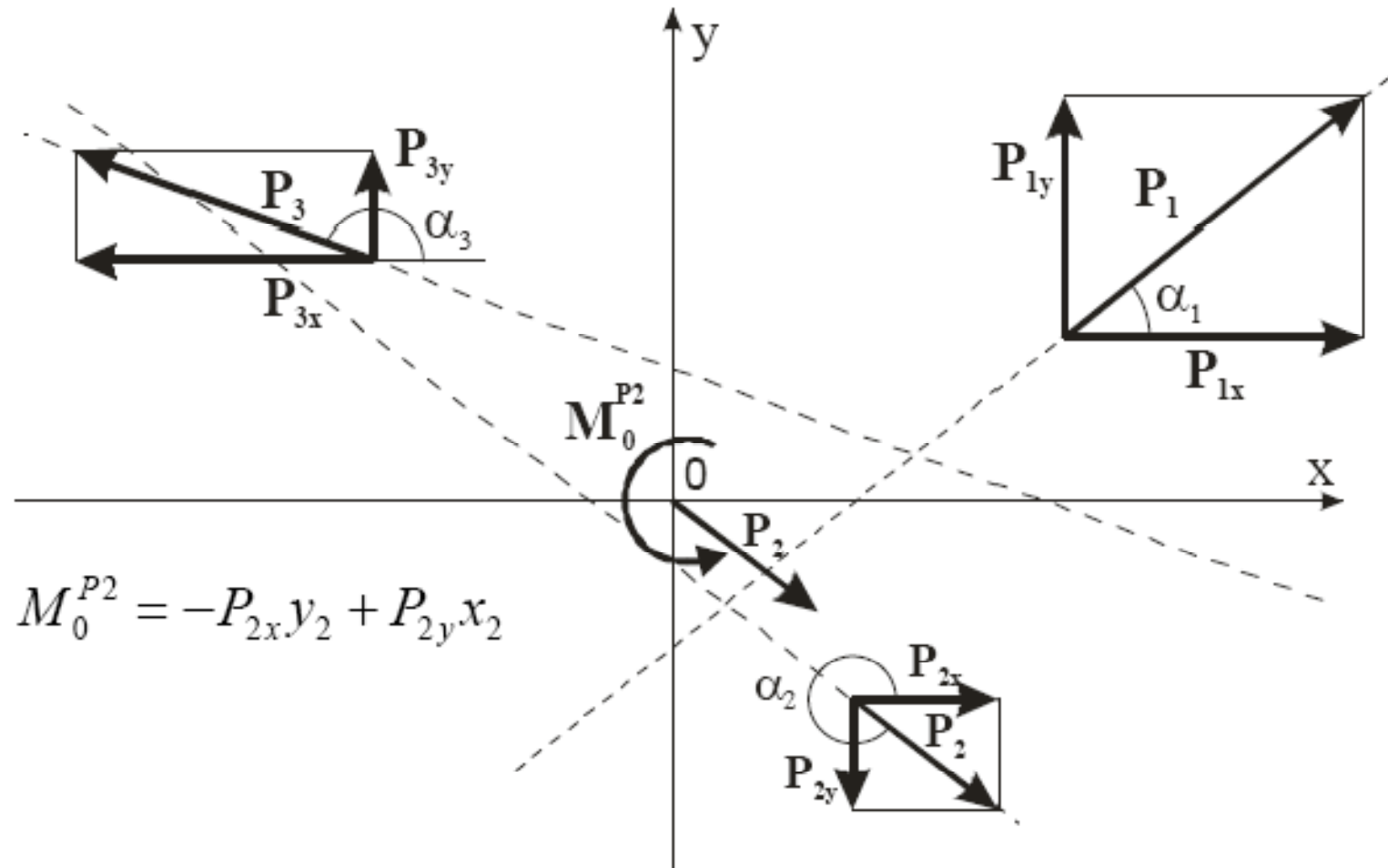
Przykład (1)



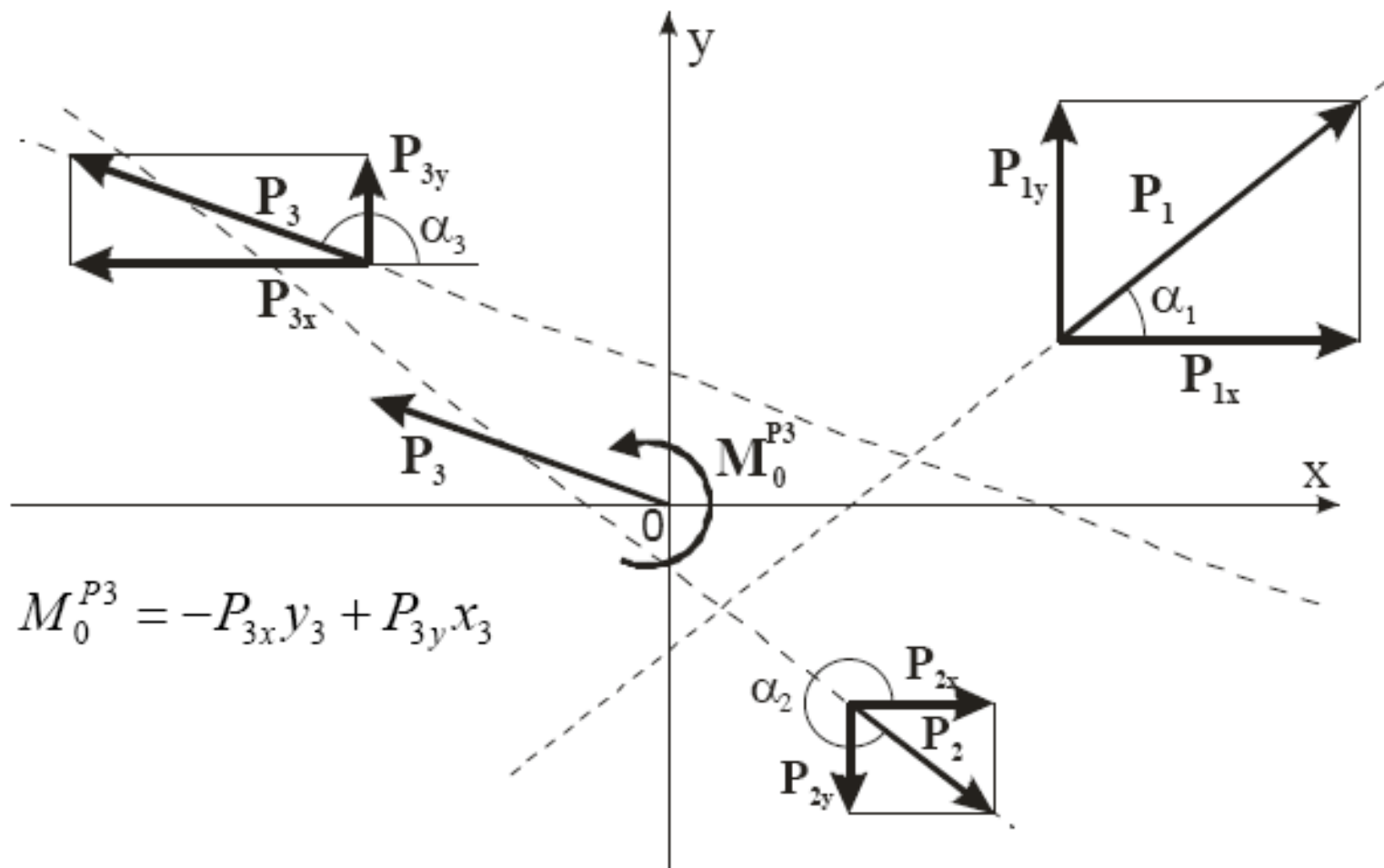
Przykład (2)



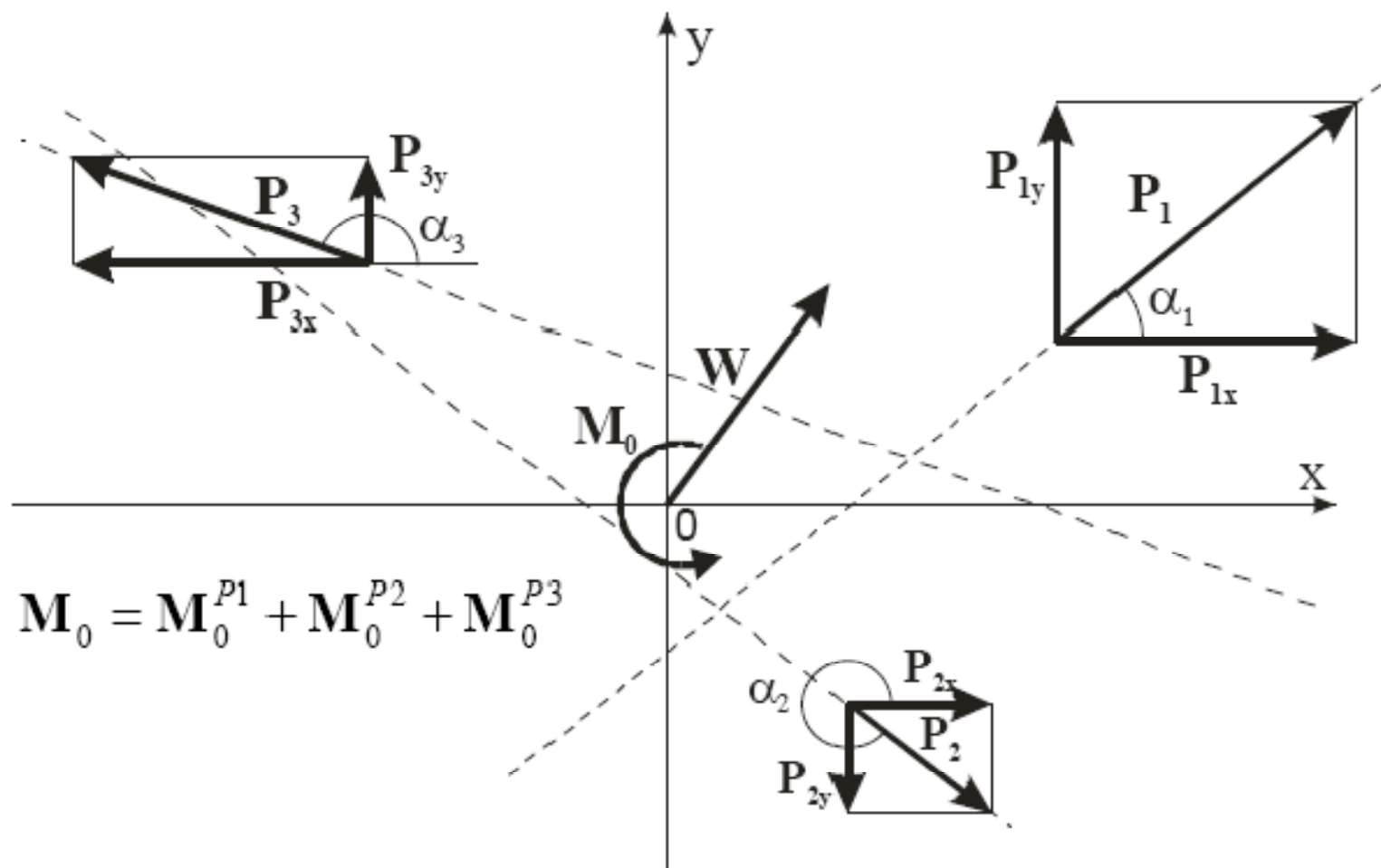
Przykład (3)



Przykład (4)



Przykład (5)

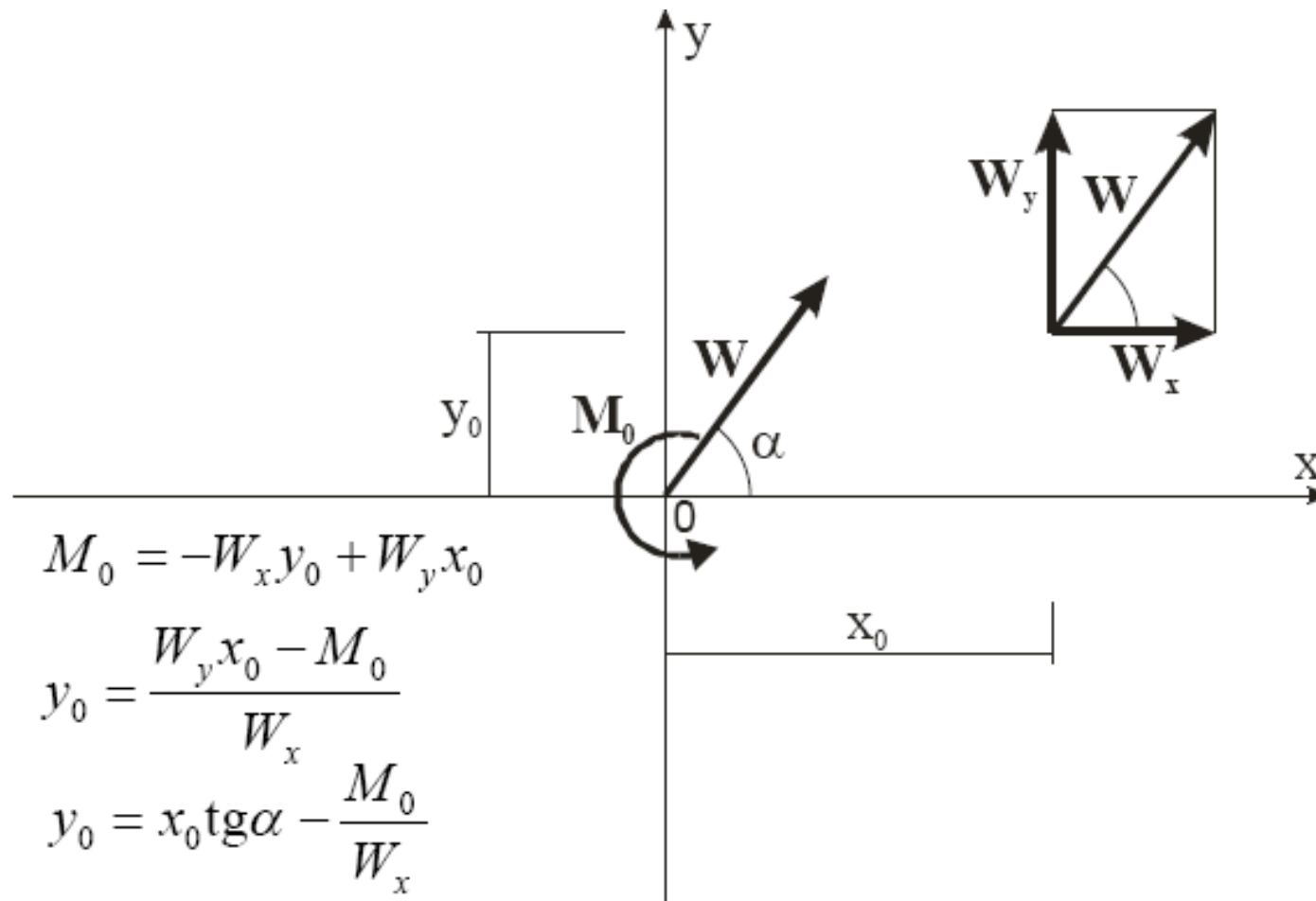


Dowolny płaski układ sił (3)

Wypadkowy moment może zostać przedstawiony jako:

- wektor momentu;
- para sił;
- moment od siły wypadkowej przyłożonej nie w biegunie redukcji, a na linii działania wyznaczonej w taki sposób, że moment od siły wypadkowej równy jest momentowi od sił składowych.

Moment od wypadkowej



Uogólnienie w przestrzeni

Układ sił **zbieżnych** – redukcja do siły wypadkowej przyłożonej w punkcie zbieżności.

Dowolny przestrzenny układ sił – redukcja do wypadkowej siły i wypadkowego momentu.

Stan równowagi

- **Równowaga statyczna**

Punkt materialny (ciało sztywne) jest w równowadze, jeżeli pod wpływem układu sił, nie porusza się on lub porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym. Taki układ sił nazywa się zrównoważonym lub równoważnym zeru.

Oswobodzenie z więzów

- Ciało nieswobodne można myślowo oswobodzić z więzów, zastępując ich działanie reakcjami.
- Ciało oswobodzone z więzów można traktować jako swobodne pod działaniem sił czynnych (obciążeń) i biernych (reakcji).

Rodzaje sił w mechanice

- W mechanice wyróżnia się następujące rodzaje sił:
 - **siły zewnętrzne** – obciążenie pochodzące od innych ciał;
 - **reakcje** - siły zewnętrzne wynikające ze sposobu zamocowania konstrukcji;
 - **siły wewnętrzne** – wzajemne oddziaływanie pomiędzy częściami ciała.

Stopnie swobody (1)

Każde ciało doskonale sztywne mogące poruszać się w przestrzeni nazywamy ciałem swobodnym.

Stopniem swobody nazywa się możliwość wykonania ruchu ciała niezależnego od innych ruchów.

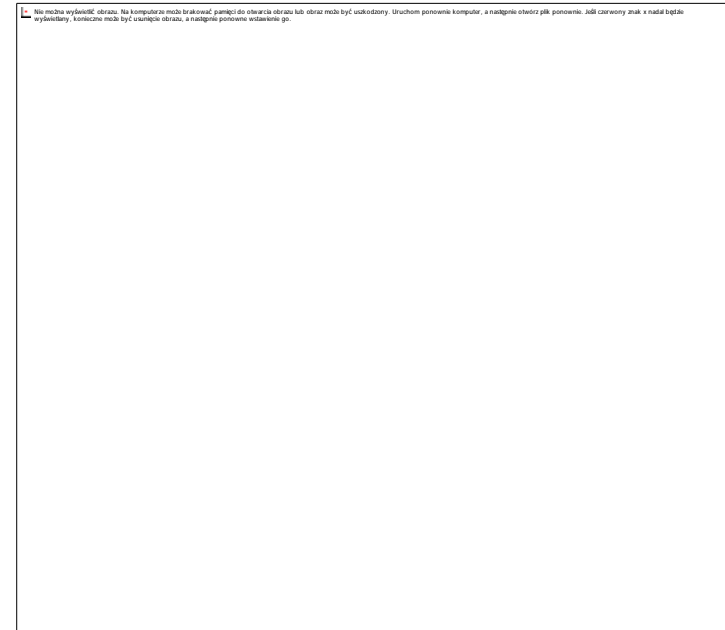
Punkt materialny (def. ciało materialne, którego wymiary geometryczne mogą być zaniedbane w porównaniu z innymi wymiarami występującymi w danym zagadnieniu. Innymi słowy jest to punkt geometryczny obdarzony masą) ma na płaszczyźnie dwa, a w przestrzeni trzy stopnie swobody

Stopnie swobody (2)

- Ciało sztywne (lub Bryła sztywna - ciało materialne, którego kształt i wymiary nie ulegają zmianie pod działaniem sił) ma na płaszczyźnie trzy, a w przestrzeni sześć stopni swobody.
 - Trzy stopnie swobody ciała sztywnego na płaszczyźnie oznaczają możliwość dwóch przesunięć niezależnych w kierunku osi x i y oraz możliwość obrotu ciała w płaszczyźnie Oxy .
 - Sześć stopni swobody ciała w przestrzeni oznaczają możliwość trzech niezależnych przesunięć w kierunku osi x , y i z oraz możliwość niezależnego obrotu ciała wokół tych osi.
- Więzami nazywamy warunki ograniczające ruch ciała w przestrzeni. Wprowadzenie więzów jest równoznaczne z działaniem na ciało sił biernych, czyli reakcji.

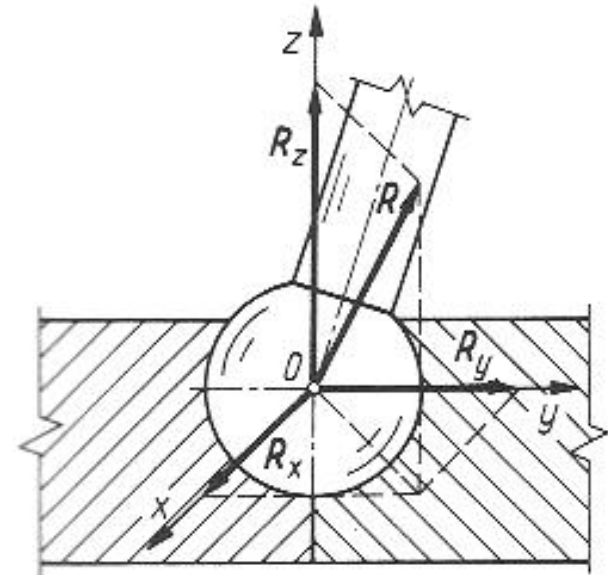
Więzy i ich reakcje (1)

- **Przegub walcowy** - Ciało sztywne jest osadzone na walcowym sworzniu przechodzącym przez kołowy otwór wykonany w tym ciele. Po pominięciu siły tarcia jako małej w porównaniu z siłą normalną R do powierzchni styku linia działania tej reakcji będzie przechodziła przez oś sworznia. Występujące dwie reakcje R_x i R_y stanowią dwie niewiadome i umożliwiają wyznaczenie wartości reakcji R i jej kierunku.



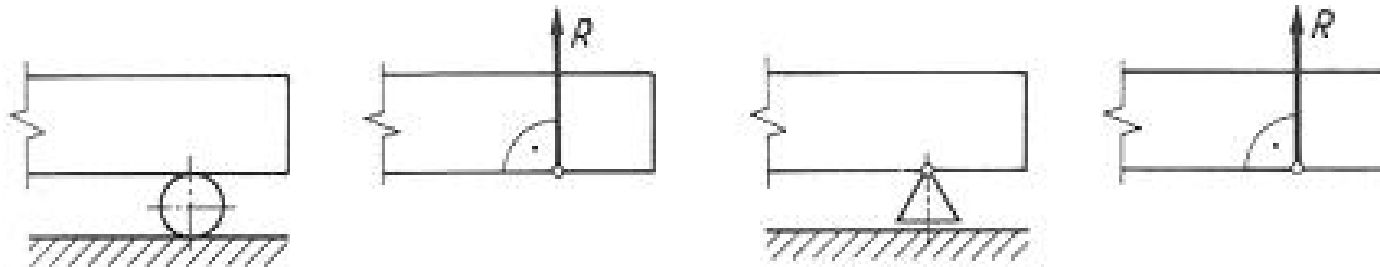
Więzy i ich reakcje (2)

- **Przegub kulisty** - krępują swobodę przesunięć, ale umożliwiają obrót wokół dowolnej osi. Ich zakończenie jest wykonane w kształcie kuli, która jest osadzona w łożysku kulistym. W wyniku pominięcia sił tarcia w przegubie kulistym powstaje reakcja R o dowolnym kierunku w przestrzeni, przechodząca przez środek kuli i mająca trzy niezależne składowe R_x , R_y i R_z .



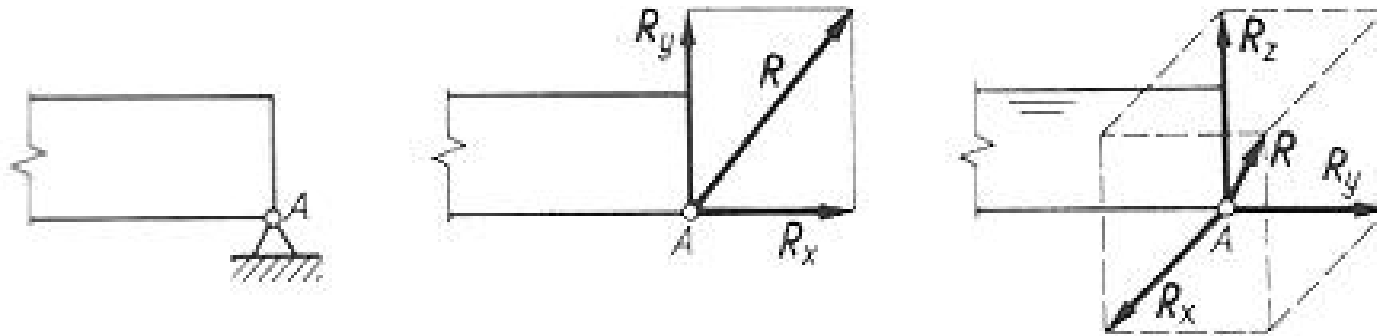
Więzy i ich reakcje (3)

- Podpora przegubowa przesuwna (rolkowa) - opór przy przesuwaniu takiej podpory w kierunku poziomym jest bardzo mały, przyjmuje się, że linia działania reakcji jest prostopadła do płaszczyzny poziomej (przesuwu).



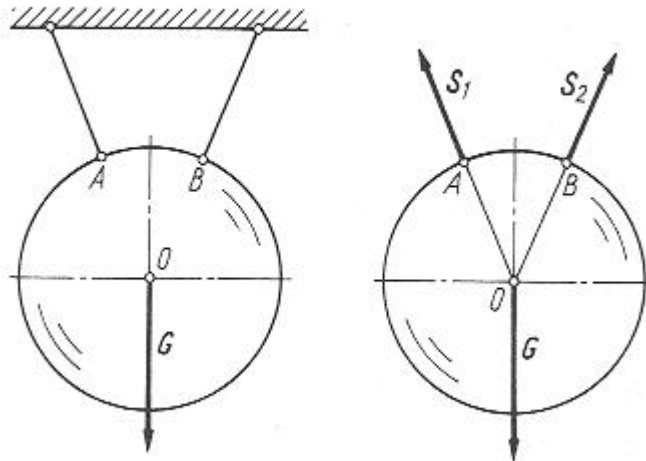
Więzy i ich reakcje (4)

Podpora przegubowa stała - koniec podparcia ciała sztywnego może się obracać dookoła osi przegubu, ale nie może się przemieszczać w dwóch kierunkach. Przy założeniu, że w przegubie nie ma tarcia, linia działania reakcji R przechodzi przez punkt A . Powstają dwie niezależne od siebie składowe reakcje R_x i R_y . Rozważając podporę przegubową stałą w przestrzeni należy zauważyć, że koniec podparcia A nie może się przemieszczać w trzech kierunkach i dlatego występują trzy niezależne składowe reakcje R_x , R_y i R_z .



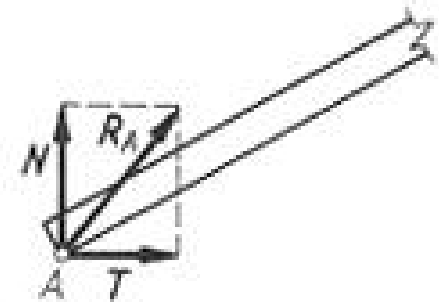
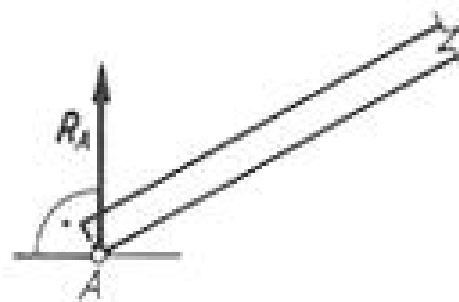
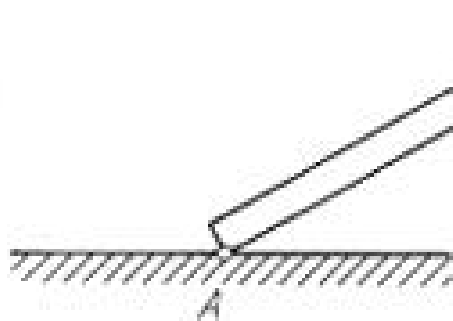
Więzy i ich reakcje (5)

- **Cięgna wiotkie** - Podwieszenie ciała za pomocą wiotkich cięgien stwarza tzw. podpory kierunkowe jednostronne, bo cięgna mogą być tylko rozciągane. Reakcje S_1 i S_2 działają na ciało wzdłuż tych cięgien.



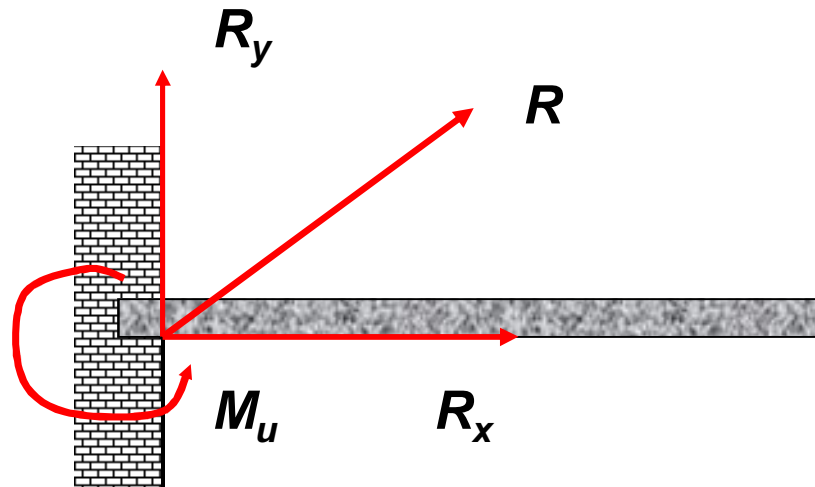
Więzy i ich reakcje (6)

- **Oparcie o gładką i chropowatą powierzchnię** - W przypadku oparcia ciała o gładką powierzchnię (styk punktowy) występuje jedna reakcja R_A , prostopadła do powierzchni styku. Jeżeli powierzchnia będzie chropowata, to wystąpią dwie składowe reakcji R_A : normalna do powierzchni N i styczna siła tarcia T .



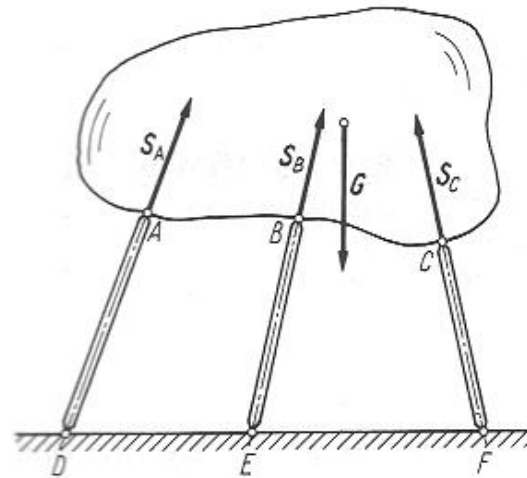
Więzy i ich reakcje (7)

- **Utwierdzenie całkowite** - zupełne unieruchomienie ciała. Ciało sztywne na płaszczyźnie ma trzy stopnie swobody, a więc wystąpi reakcja R o dwóch składowych R_x i R_y oraz moment utwierdzenia M . Rozważając całkowite unieruchomienie ciała w przestrzeni, należy zastosować takie utwierdzenie, które przedstawia sześć więzów. Wystąpi wtedy reakcja R o trzech składowych R_x , R_y i R_z oraz moment utwierdzenia M o trzech składowych M_x , M_y i M_z .



Więzy i ich reakcje (8)

Ciało podparte na prętach zamocowanych przegubowo na obu końcach (prętach przegubowych) - Ciało sztywne można także unieruchomić przez podparcie na prętach zakończonych przegubami. Jeżeli pominiemy ciężary własne prętów i tarcie w przegubach, to reakcje na ciało będą działać wzdłuż tych prętów S_A , S_B i S_C



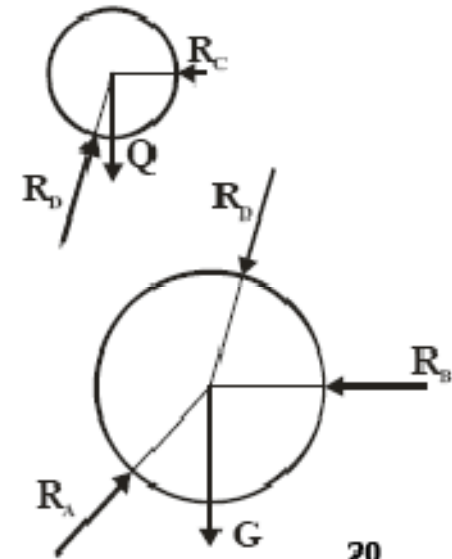
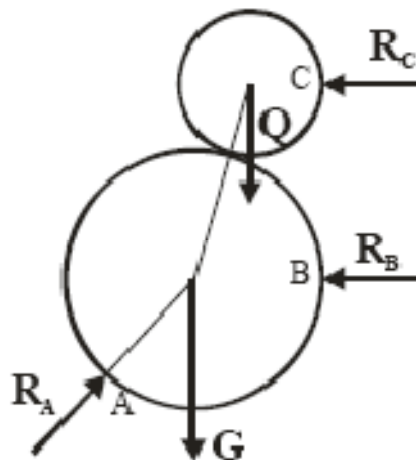
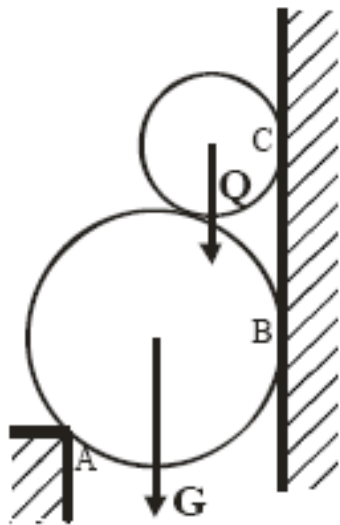
Więzy – nacisk (1)

- Powierzchnia płaska na płaszczyźnie:
 - reakcja prostopadła do płaszczyzny styku;
- Przekrój kołowy na płaszczyźnie:
 - reakcja prostopadła do płaszczyzny styku (stycznej w punkcie styczności);



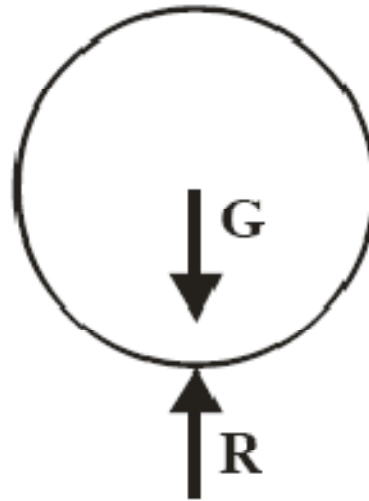
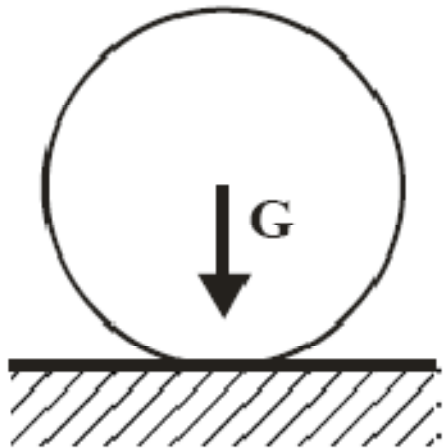
Więzy – nacisk (2)

- Przekrój kołowy oparty o przekrój kołowy:
 - reakcja prostopadła do stycznej obu ciał w punkcie styku (wzdłuż prostej łączącej środki okręgów);
- Punkt na płaszczyźnie:
 - reakcja prostopadła do płaszczyzny.



Równowaga dwóch sił

- Układ dwóch sił pozostaje w równowadze, jeżeli siły te leżą na jednej prostej, mają przeciwne zwroty i takie same miary.

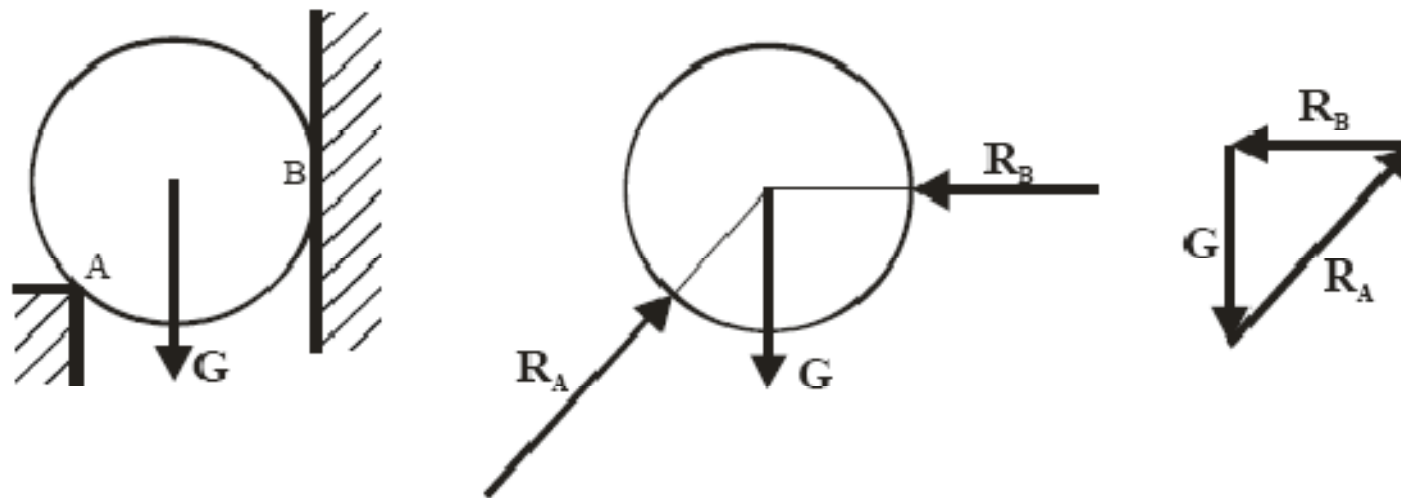


$$\mathbf{R} = -\mathbf{G}$$

$$R = G$$

Równowaga trzech sił Twierdzenie o trzech siłach

- Układ trzech sił jest zrównoważony, jeżeli siły te tworzą płaski układ sił, przecinają się w jednym punkcie, zaś wielobok sznurowy zbudowany z tych sił jest zamknięty.



Równania równowagi punktu materialnego

- II zasada dynamiki Newtona:

$$\mathbf{P} = m\mathbf{a}$$

- Jeżeli punkt materialny jest w stanie równowagi statycznej, to:

$$\mathbf{a} = 0 \Rightarrow \mathbf{P} = 0$$

Równania równowagi ciała sztywnego (siły zbieżne)

- II zasada dynamiki Newtona:

$$\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3 + \mathbf{P}_4 + \dots + \mathbf{P}_n = m\mathbf{a}$$

- Jeżeli punkt materialny jest w stanie równowagi statycznej, to:

$$\mathbf{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i = 0$$

Układ sił zbieżnych

- Układ sił, przyłożonych do ciała sztywnego, których kierunki działania **przecinają się w jednym punkcie**. Układ takich sił jest w równowadze, jeżeli wypadkowa sił jest równa zero lub mówiąc inaczej, jeżeli wektory sił tworzą wielobok zamknięty.

$$\mathbf{W} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3 + \mathbf{P}_4 + \dots + \mathbf{P}_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i = 0$$

Płaski układ sił zbieżnych

- Układ sił, przyłożonych do ciała sztywnego, których kierunki działania **leżą w jednej płaszczyźnie** i przecinają się w jednym punkcie. Układ takich sił jest w równowadze, jeżeli wypadkowa sił jest równa zero lub mówiąc inaczej, jeżeli wektory sił tworzą wielobok zamknięty.

$$\mathbf{W} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3 + \mathbf{P}_4 + \dots + \mathbf{P}_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i = 0$$

Równania równowagi układu sił zbieżnych

- Aby siły zbieżne były w równowadze, sumy rzutów tych sił na osie układu współrzędnych muszą być równe zero.

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n P_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^n P_{iz} = 0.$$

Równania równowagi płaskiego układu sił zbieżnych

- Aby siły zbieżne, leżące w jednej płaszczyźnie, były w równowadze, sumy rzutów tych sił na osie układu współrzędnych muszą być równe zero.

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n P_{iy} = 0.$$

Warunki równowagi układu zbieżnego (podsumowanie)

Wypadkowa układu sił musi być równa 0, tj. zamyka się wielobok sznurowy sił (graficznie), a sumy rzutów sił układu na osie układu współrzędnych muszą być równe zero (analitycznie).

- **Przestrzenny układ sił**

- **Płaski uk** $\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n P_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^n P_{iz} = 0$

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n P_{iy} = 0;$$

Równania równowagi ciała sztywnego (dowolny układ sił)

$$\mathbf{M}_o = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{P}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times (m_i \mathbf{a}) = -\mathbf{a} \times \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i$$

- Jeżeli ciało sztywne jest w stanie równowagi statycznej, to dodatkowo:

$$\mathbf{a} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{M}_o = \mathbf{0}$$

Warunki równowagi dowolnego układu sił (1)

- Płaski układ sił

lub
$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n P_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_{iO} = 0$$

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_{iA} = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_{iB} = 0 \quad AB \not\parallel x$$

lub

$$\sum_{i=1}^n M_{iA} = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_{iB} = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_{iC} = 0 \quad A, B, C \notin l$$

Warunki równowagi dowolnego układu sił (2)

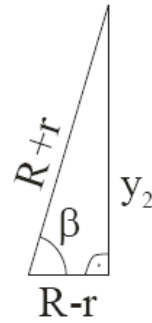
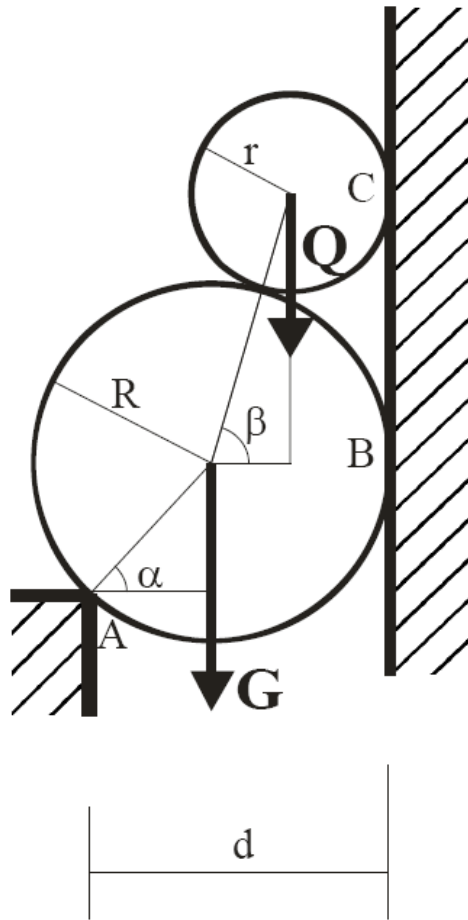
- Przestrzenny układ sił

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n P_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^n P_{iz} = 0$$

$$\sum_{i=1}^n M_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_{iz} = 0$$

Przykład

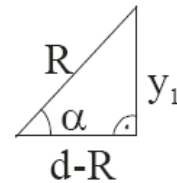
(dwa układy zbieżne) (1)



$$y_2 = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2}$$

$$\sin \beta = \frac{y_2}{R+r}$$

$$\cos \beta = \frac{R-r}{R+r}$$



$$y_1 = \sqrt{R^2 - (d-R)^2}$$

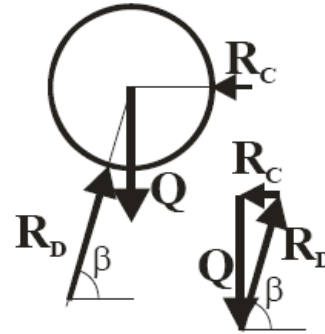
$$\sin \alpha = \frac{y_1}{R}$$

$$\cos \alpha = \frac{d-r}{R}$$

Przykład (dwa układy zbieżne) (2)

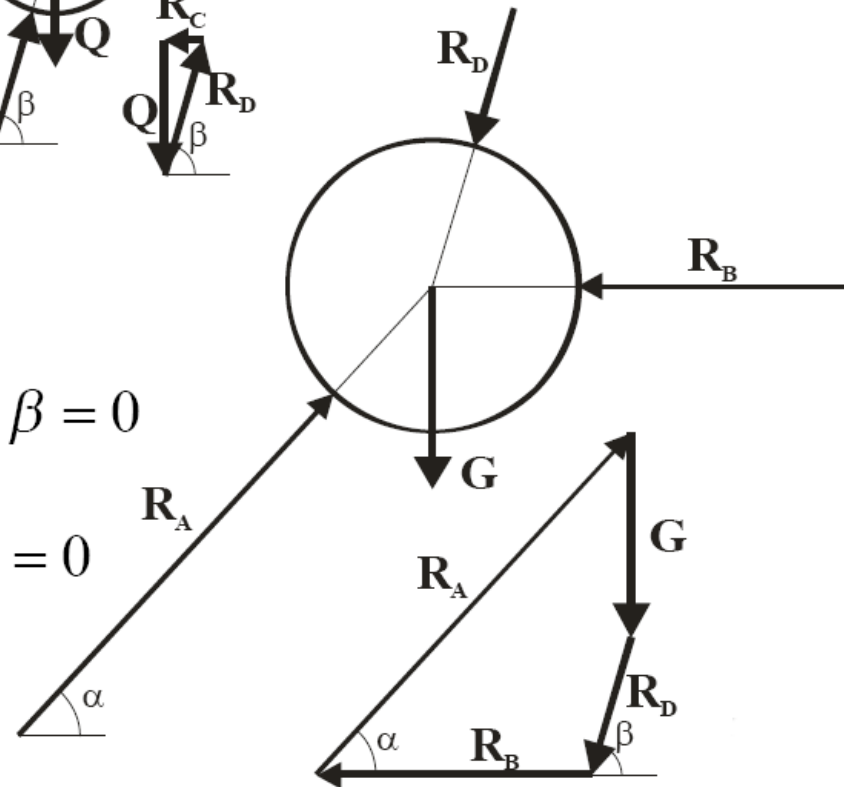
$$\sum X = R_D \cos \beta - R_C = 0$$

$$\sum Y = R_D \sin \beta - Q = 0$$

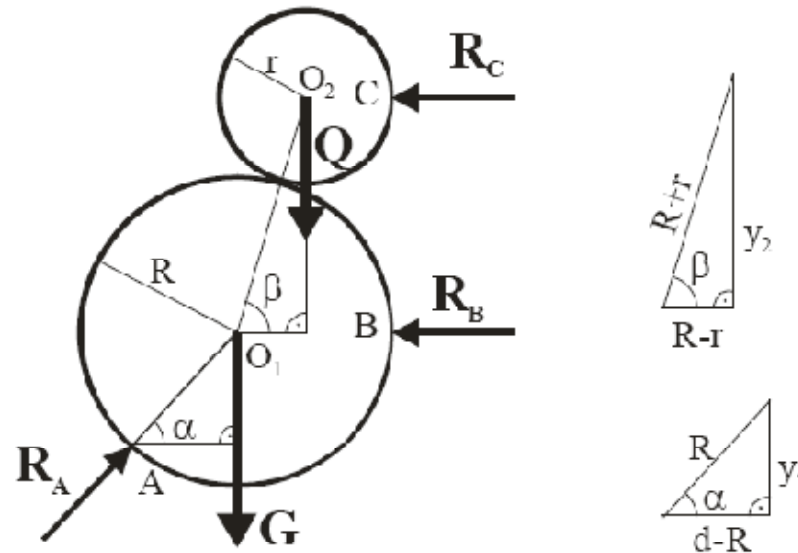


$$\sum X = R_A \cos \alpha - R_B - R_D \cos \beta = 0$$

$$\sum Y = R_A \sin \alpha - G - R_D \sin \beta = 0$$



Przykład (układ niezbieżny)



$$\sum X = R_A \cos \alpha - R_B - R_C = 0$$

$$\sum Y = R_A \sin \alpha - Q - G = 0$$

$$\sum M_{o_1} = R_C \cdot y_2 - Q \cdot (R - r) = 0$$

Równowaga par sił

- Aby układ par sił, działających w jednej płaszczyźnie na ciało sztywne, znajdował się w równowadze, suma momentów tych par musi być równa zero.

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{M}_i = 0$$

