

# **Mechanika ogólna**

*Wykład nr 3*

**Wyznaczanie reakcji.**

**Belki przegubowe.**

# Podstawowe typy ustrojów prętowych

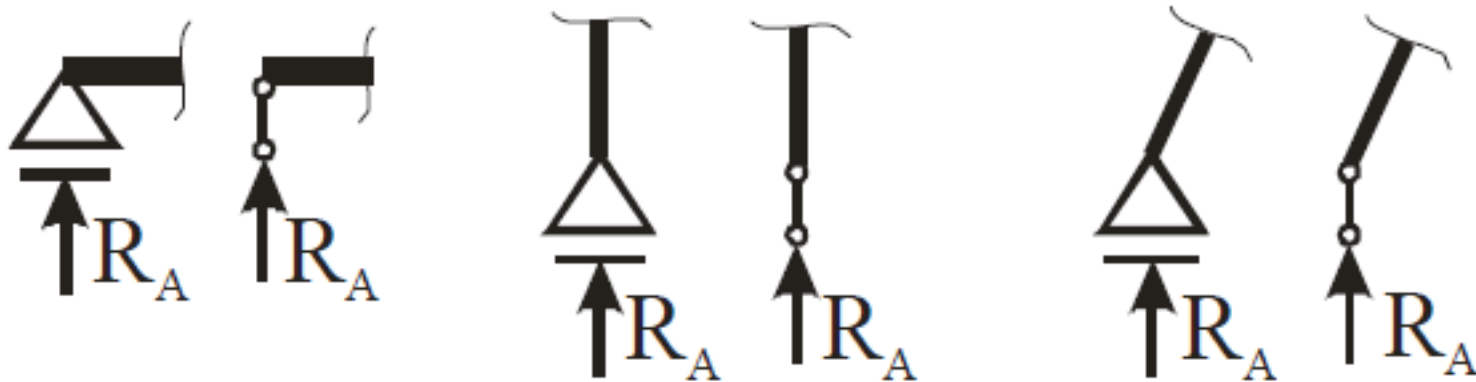
- Pręt – element o wymiarach poprzecznych (np. grubość i szerokość) znacznie mniejszych od trzeciego wymiaru (długość)
- Belka – ustrój prętowy z prętami rozmieszczonymi w jednej linii. Siły często są prostopadłe do osi belki.
- Rama – ustrój prętowy
- Krata – ustrój prętowy, który składa się z prętów połączonych przegubami. Siły mogą być przykładane tylko w węzłach.

# Stopnie swobody

- Liczba niezależnych ruchów, jakie ciało jest w stanie zrealizować w przestrzeni.
- Punkt materialny:
  - w przestrzeni – 3 (3 składowe przesuwu);
  - na płaszczyźnie – 2 (2 składowe przesuwu);
- Ciało sztywne
  - w przestrzeni – 6 (3 składowe przesuwu i 3 składowe obrotu);
  - na płaszczyźnie – 3 (2 składowe przesuwu i obrót).

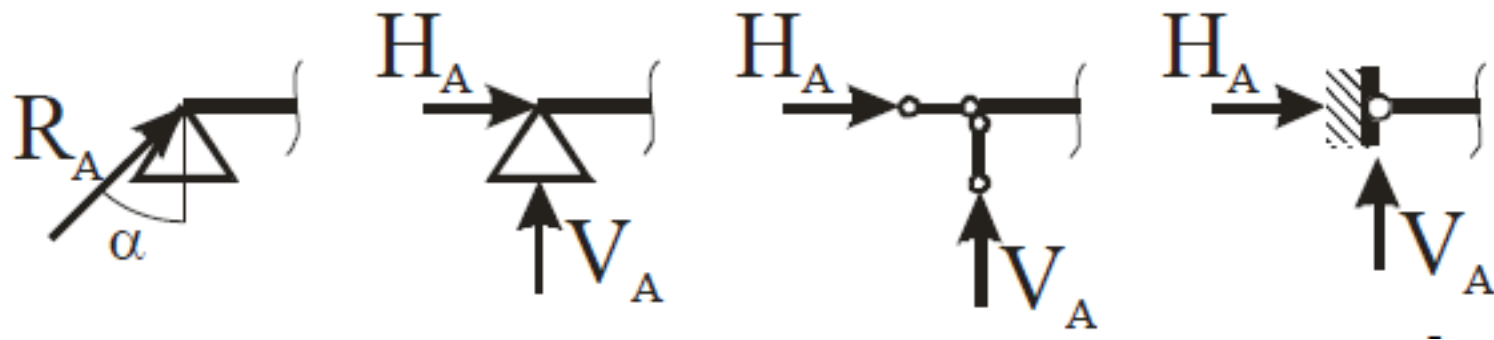
# Podpory, pręty podporowe (1)

- Podpora przegubowa przesuwna – zablokowana jedna składowa przesuwnu, jeden pręt podporowy, jedna reakcja.



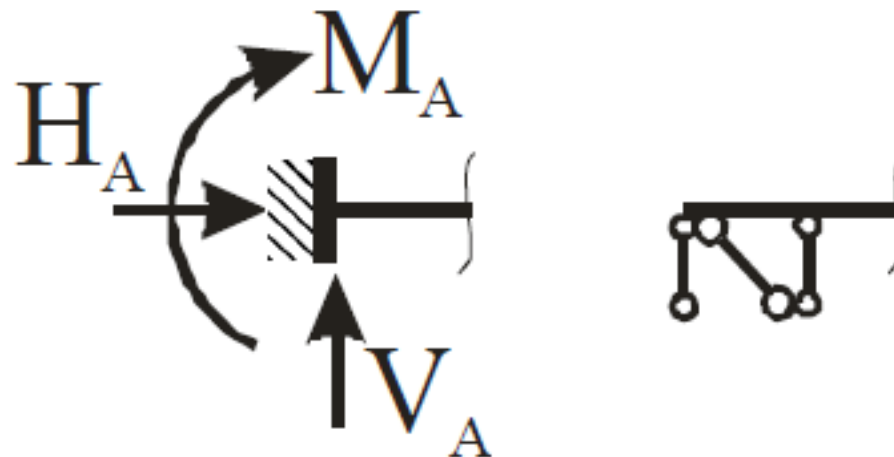
# Podpory, pręty podporowe (2)

Podpora przegubowa nieprzesuwna –  
zablokowane obie składowe przesuwu, dwa  
pręty podporowe, dwie niewiadome: reakcja  
i kierunek lub dwie składowe reakcji.



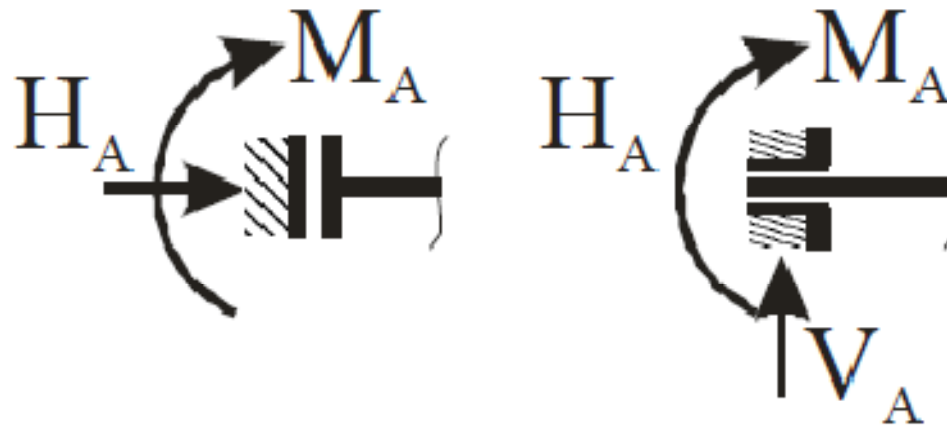
# Podpory, pręty podporowe (3)

Sztywne zamocowanie – zablokowane wszystkie przemieszczenia (dwie składowe przesuwu i obrót), trzy pręty podporowe, trzy niewiadome – dwie składowe siły i moment.



# Inne sposoby podparcia

- Sztywne zamocowanie z możliwością przesuwu:
  - poprzecznie do osi pręta;
  - wzdłuż pręta.



# **Rodzaje obciążeń – układy płaskie**

- **Siły skupione;**
- **Momenty skupione;**
- **Obciążenia liniowo rozłożone;**
- **Obciążenia momentem liniowo rozłożone.**



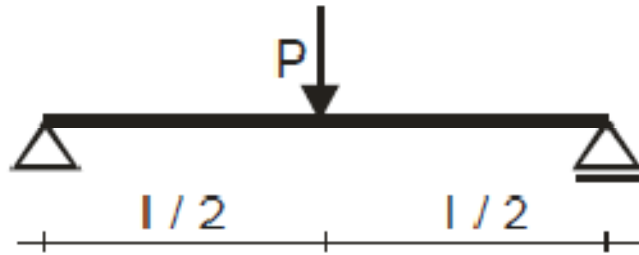
# **Rodzaje obciążeń – układy przestrzenne**

- **Siły skupione;**
- **Momenty skupione;**
- **Obciążenia liniowo rozłożone;**
- **Obciążenia momentem liniowo rozłożone;**
- **Obciążenia rozłożone na powierzchni;**
- **Obciążenia rozłożone w objętości.**

# Jednostki obciążeń

- Obciążenie ciągłe –  $\text{kN/m}$
- Siła skupiona -  $\text{kN}$
- Moment skupiony -  $\text{kNm}$
- Obciążenie ciągłe momentem –  $\text{kNm/m}$

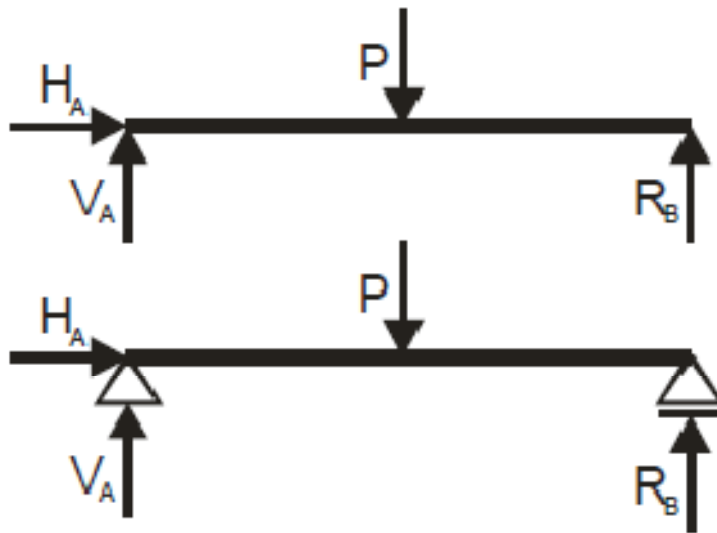
# Reakcje – belka swobodnie podparta



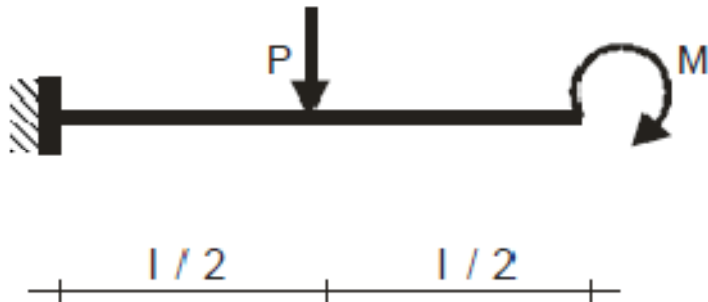
$$\sum X : H_A = 0$$

$$\sum Y : V_A + R_B - P = 0$$

$$\sum M_A : R_B \cdot l - P \cdot \frac{l}{2} = 0$$

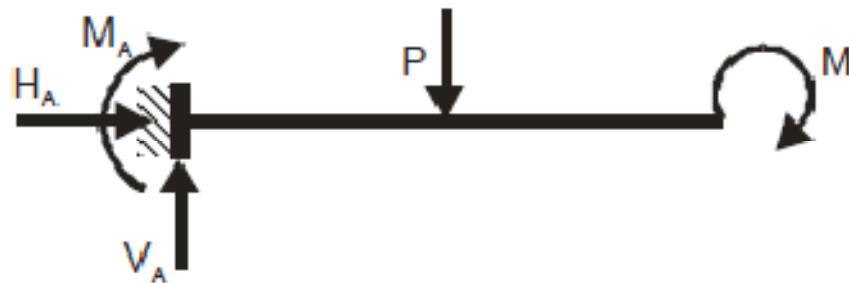


# Reakcje – belka wspornikowa



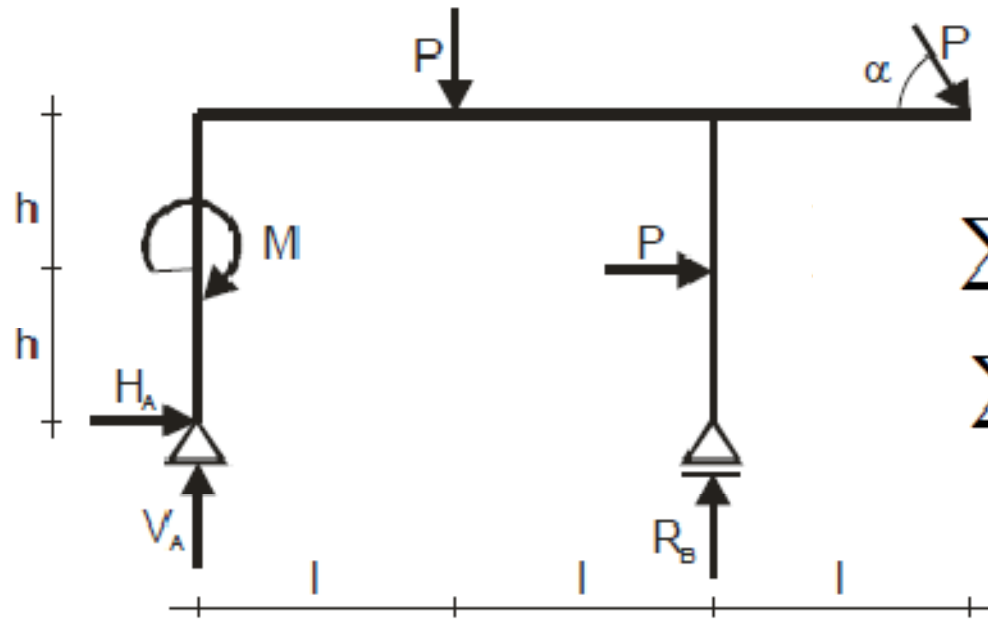
$$\sum X: H_A = 0$$

$$\sum Y: V_A - P = 0$$



$$\sum M_A: M_A + P \cdot \frac{l}{2} + M = 0$$

# Reakcje – rama bezprzegubowa



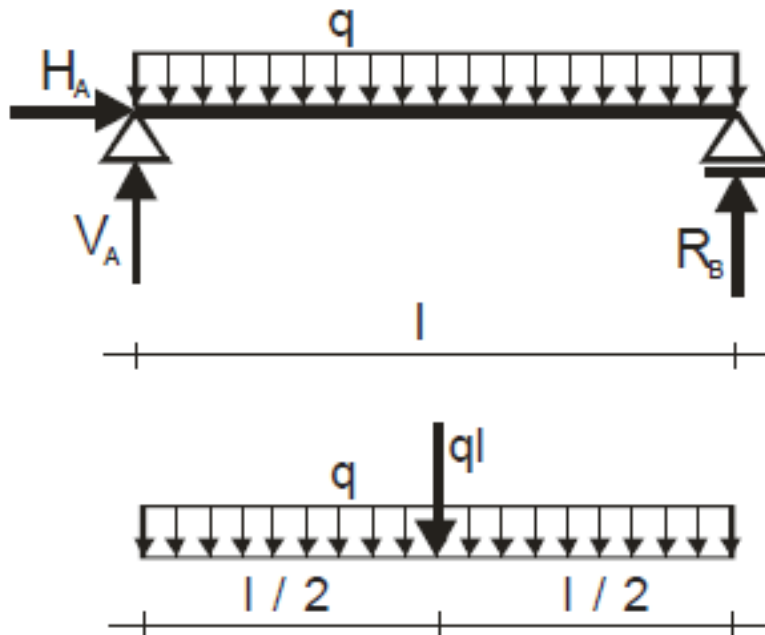
$$\sum X: H_A + P + P \cos \alpha = 0$$

$$\sum Y: V_A + R_B - P - P \sin \alpha = 0$$

$$\sum M_A: M + P \cdot l + P \cdot h + P \cos \alpha \cdot 2h + P \sin \alpha \cdot 3l - R_B \cdot 2l = 0$$

# Obciążenie ciągłe równomierne

Miara wypadkowej obciążenia rozłożonego liniowo równo jest polu figury opisującej obciążenie i powinna zostać przyłożona w środku ciężkości tej figury.

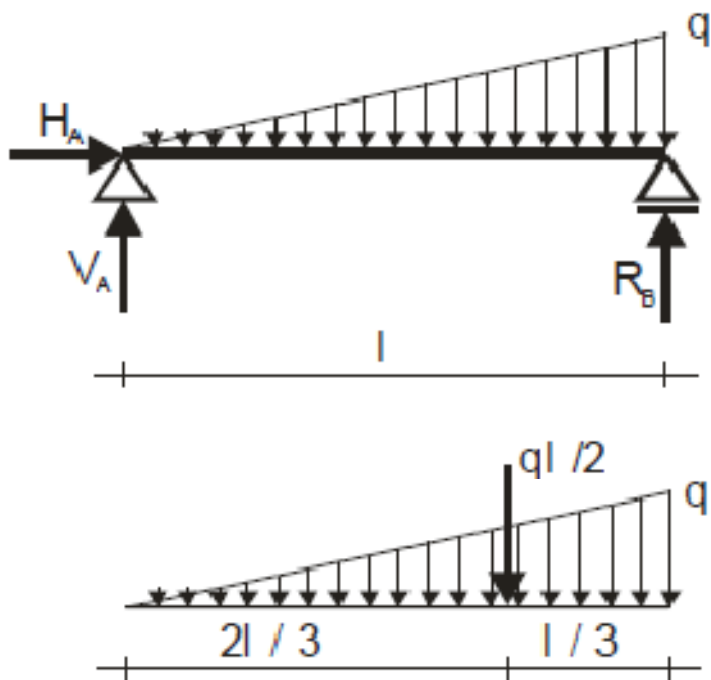


$$\sum X : H_A = 0$$

$$\sum Y : V_A + R_B - q \cdot l = 0$$

$$\sum M_A : R_B \cdot l - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 0$$

# Obciążenie ciągłe trójkątne

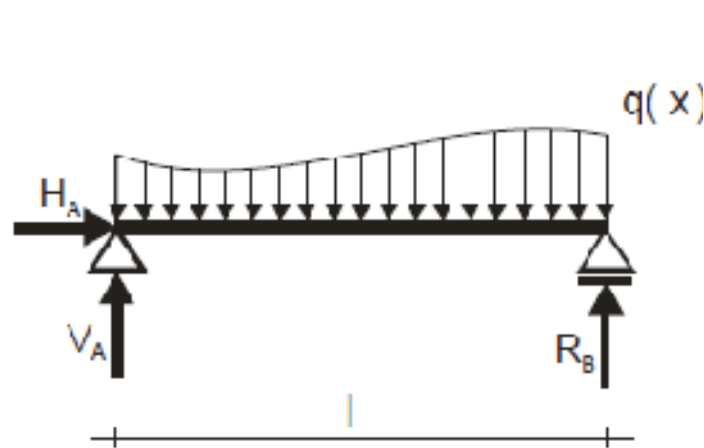


$$\sum X: H_A = 0$$

$$\sum Y: V_A + R_B - \frac{1}{2}q \cdot l = 0$$

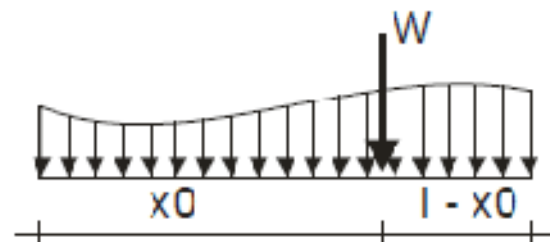
$$\sum M_A: R_B \cdot l - \frac{1}{2}q \cdot l \cdot \frac{2}{3}l = 0$$

# Obciążenie ciągłe dowolne



$$W = \int_0^l q(x) dx$$

$$x_0 = \frac{\int_0^l q(x) \cdot x dx}{W}$$



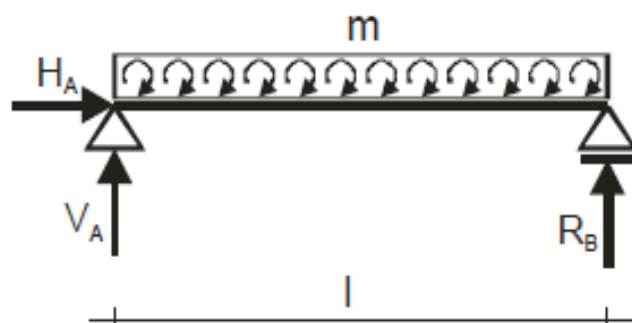
$$\sum X : H_A = 0$$

$$\sum Y : V_A + R_B - W = 0$$

$$\sum M_A : R_B \cdot l - W \cdot x_0 = 0$$

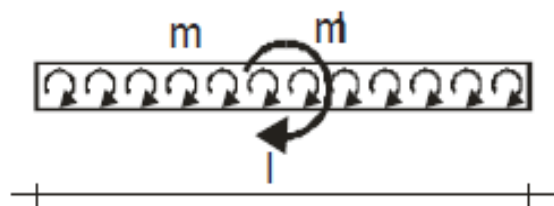


# Obciążenie ciągłe momentem



$$\sum X : H_A = 0$$

$$\sum Y : V_A + R_B = 0$$

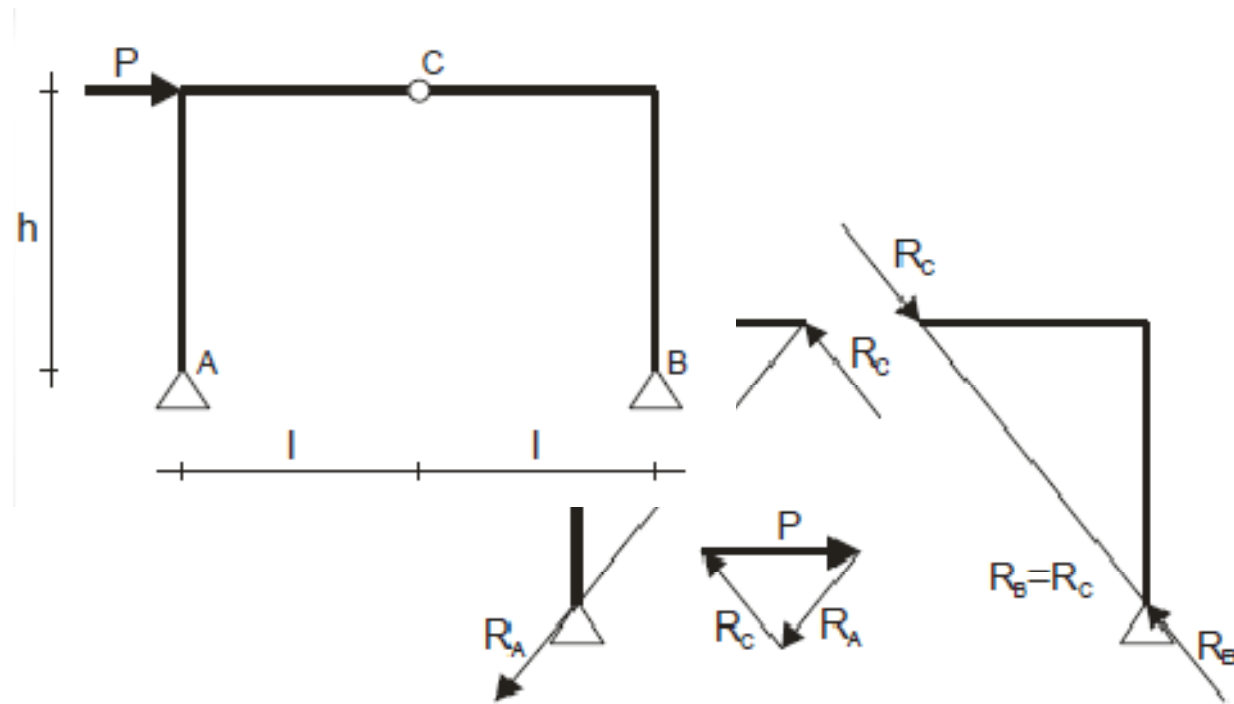


$$\sum M_A : R_B \cdot l - m \cdot l = 0$$

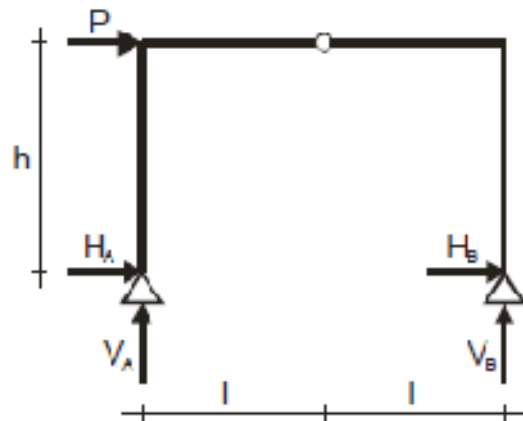
# Przegub

- Połączenie elementów prętowych w taki sposób, że mogą się one swobodnie obracać (nie powstaje moment mogący przeciwdziałać obrotowi).
- Uzyskuje się dodatkowy punkt, w którym moment wewnętrzny jest równy zero.
- Moment w przegubie od sił zewnętrznych znajdujących się po jednej ze stron przegubu równy jest 0.

# Podział ramy w przegubie



# Dodatkowe równanie dla przegubu

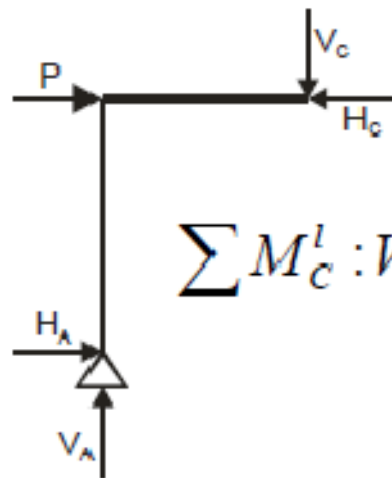


$$\sum X: H_A + H_B + P = 0$$

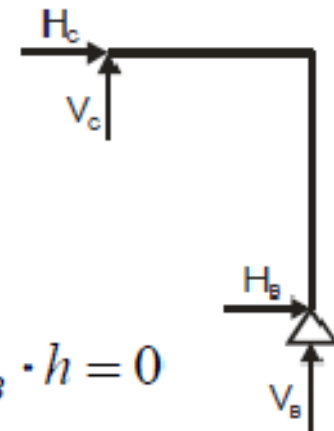
$$\sum Y: V_A + V_B = 0$$

$$\sum M_A: V_B \cdot 2l - P \cdot h = 0$$

**Czwarte równanie:**

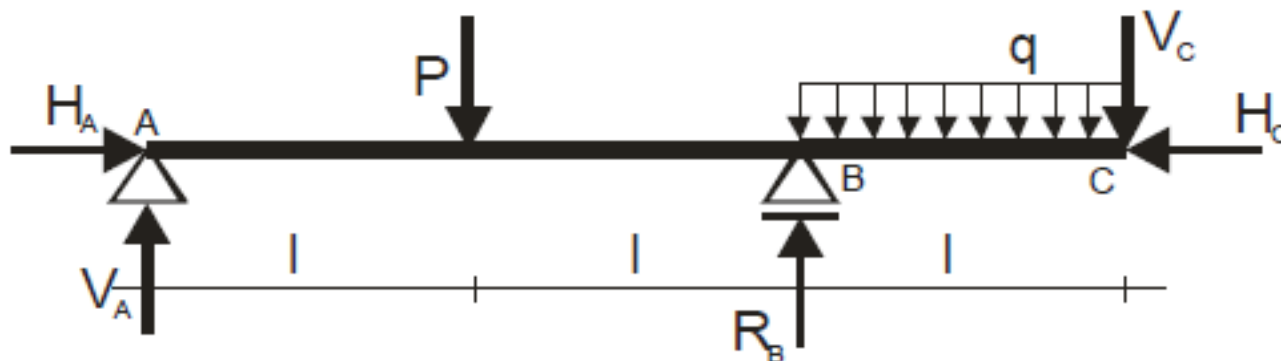
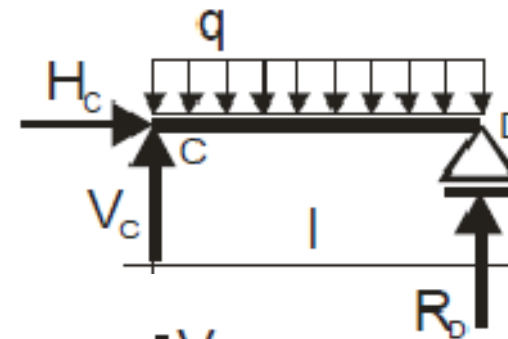
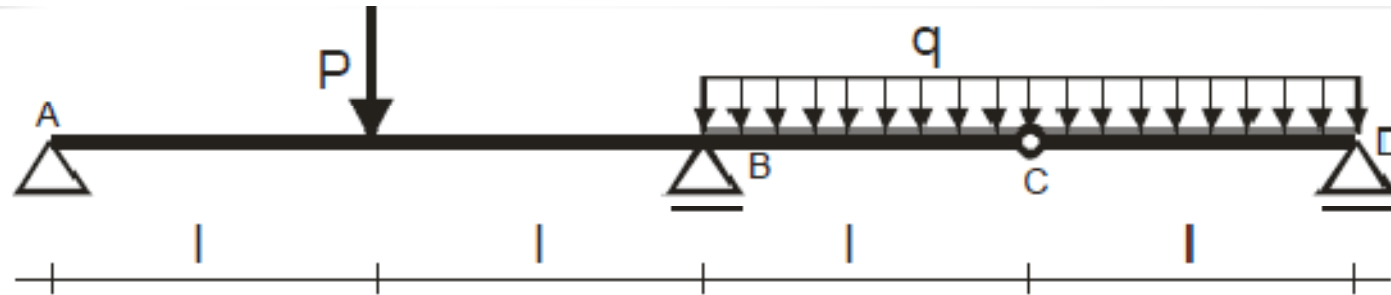


$$\sum M_C^l: V_A \cdot l - H_A \cdot h = 0$$



$$\sum M_C^p: V_B \cdot l + H_B \cdot h = 0$$

# Belki przegubowe – rozkład na belki proste

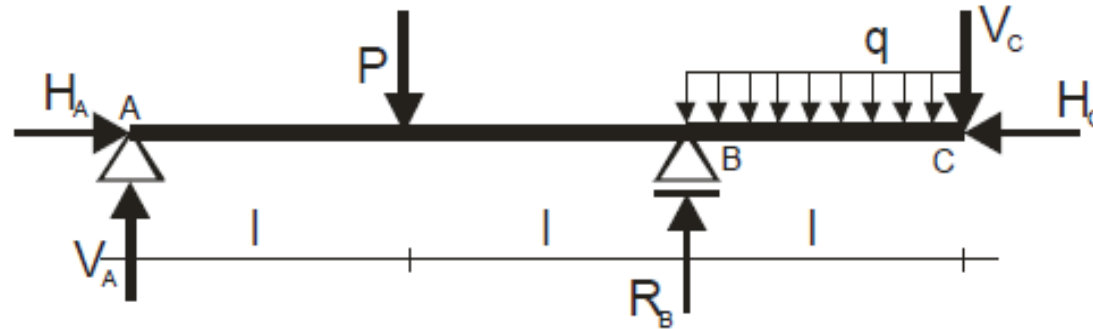
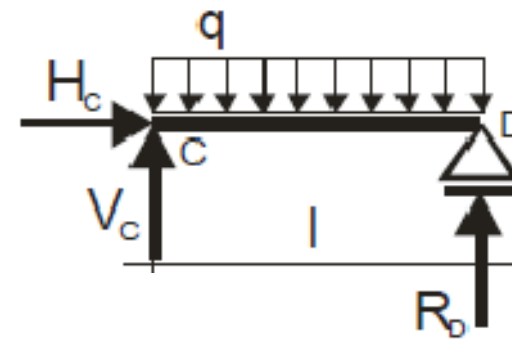


# Belki proste – równania równowagi

$$\sum X: H_C = 0$$

$$\sum Y: V_C + R_D - q \cdot l = 0$$

$$\sum M_C: R_D \cdot l - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 0$$

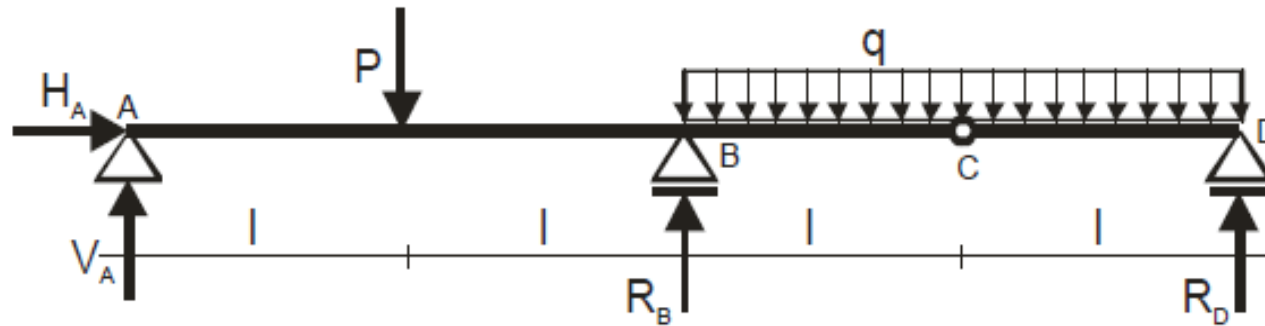


$$\sum X: H_A - H_C = 0$$

$$\sum Y: V_A + R_B - V_C - P - q \cdot l = 0$$

$$\sum M_A: R_B \cdot 2l - P \cdot l - q \cdot l \cdot 2,5l - V_C \cdot 3l = 0$$

# Reakcje – belki przegubowe (1)



$$\sum X : H_A = 0$$

$$\sum Y : V_A + R_B + R_D - P - q \cdot 2l = 0$$

$$\sum M_A : R_B \cdot 2l + R_D \cdot 4l - P \cdot l - q \cdot 2l \cdot 3l = 0$$

$$\sum M_C^P : R_D \cdot l - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 0$$

# Rozwiązanie

$$\sum X : H_A = 0$$

$$\sum M_C^P : R_D \cdot l - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 0 \Rightarrow R_D = q \cdot \frac{l}{2}$$

$$\sum M_A : R_B \cdot 2l + \underline{R_D} \cdot 4l - P \cdot l - q \cdot 2l \cdot 3l = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_B = \frac{-R_D \cdot 4l + P \cdot l + q \cdot 2l \cdot 3l}{2l} = -2R_D + \frac{P}{2} + q \cdot 3l = \frac{P}{2} + q \cdot 2l$$

$$\sum Y : V_A + \underline{R_B} + \underline{R_D} - P - q \cdot 2l = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_A = P + q \cdot 2l - R_B - R_D = P + q \cdot 2l - \frac{P}{2} - q \cdot 2l - q \cdot \frac{l}{2} = \frac{P}{2} - q \cdot \frac{l}{2}$$