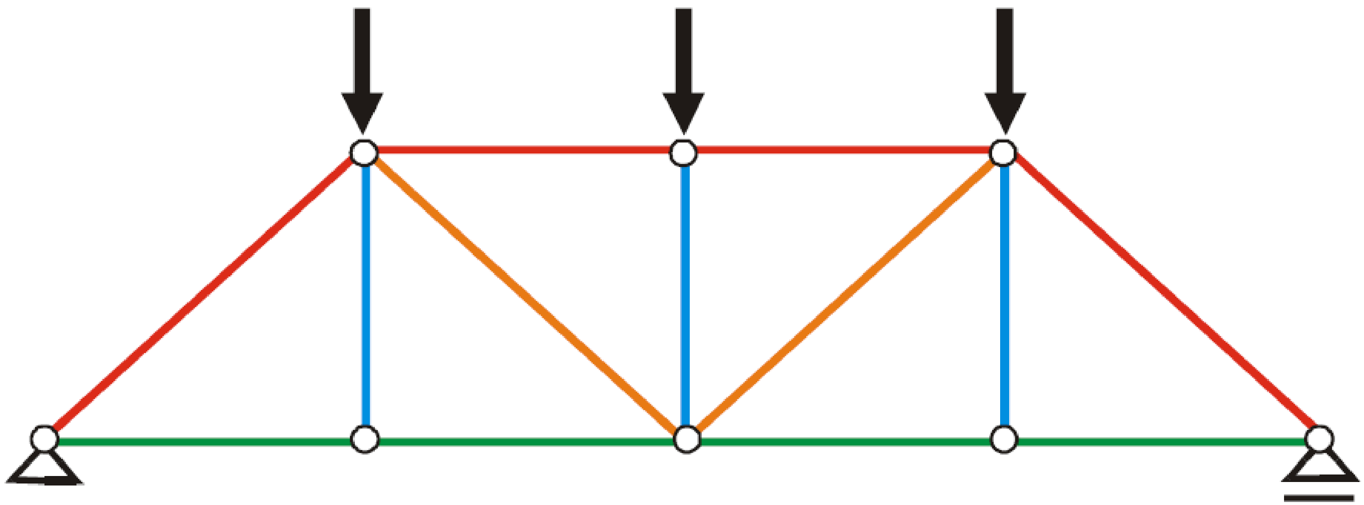
Mechanika ogólna

Wykład nr 4

Kratownice
Tarcie
Środki ciężkości
Momenty bezwładności

Kratownice

- *Kratownicą* **nazywamy układ złożony z prętów prostych, połączonych między sobą w węzłach przegubowo (przegubami bez tarcia), obciążony siłami skupionymi w przegubach; siły przekrojowe w prętach kratownicy redukują się do stałej siły podłużnej.**



Sprawdzenie stopnia statycznej niewyznaczalności kratownicy

$$n_s = r + p - 2 \cdot w$$

Gdzie

n_s – stopień statycznej niewyznaczalności,

r – liczba reakcji podporowych,

p – liczba prętów prostych kratownicy,

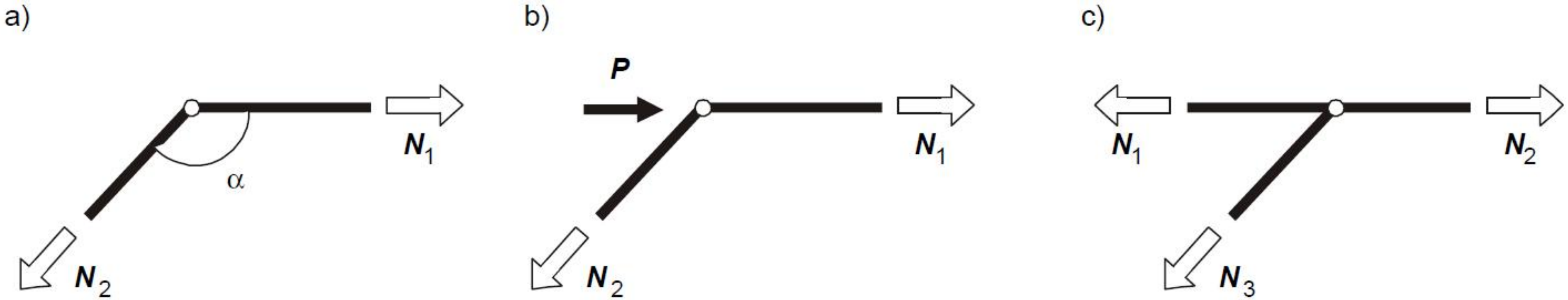
w – liczba węzłów kratownicy.

- **Warunek statycznej (wewnętrznej) wyznaczalności:**

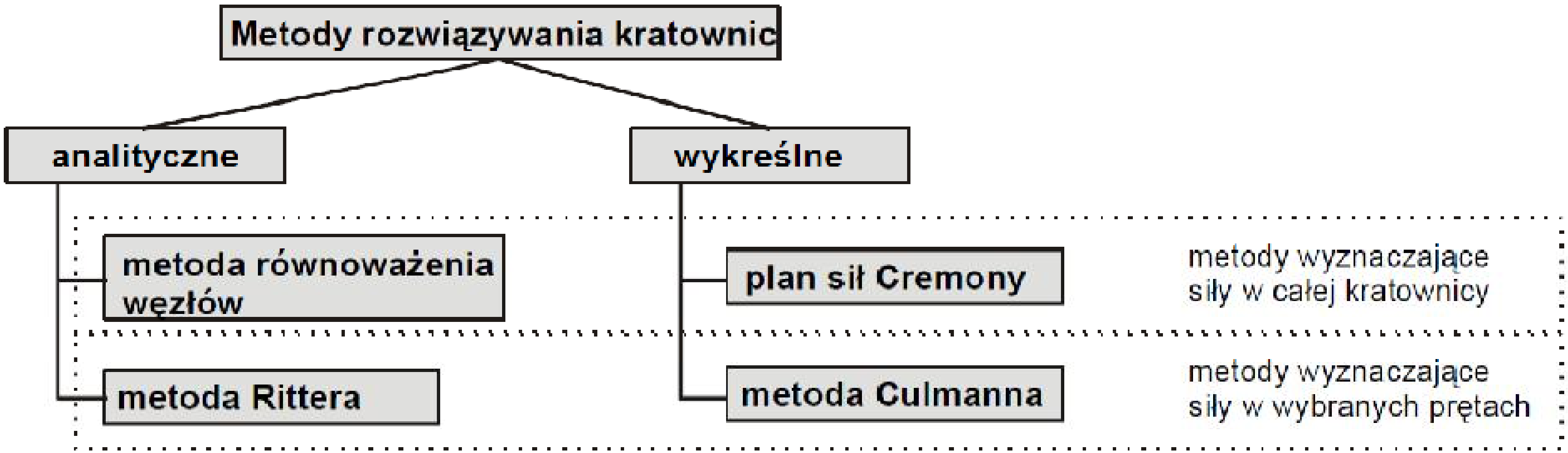
$$p = 2w - 3$$

Pręty zerowe

- jeśli w węźle schodzą się dwa pręty pod pewnym kątem α i węzeł jest nieobciążony siłą zewnętrzną, to siły przekrojowe w obu prętach są równe zeru (rys.a),
- jeśli w węźle schodzą się dwa pręty i węzeł jest obciążony siłą zewnętrzną, równoległa do jednego z nich, to w drugim pręcie siła przekrojowa jest równa zero (rys.b),
- jeśli w węźle schodzą się trzy pręty, z których dwa są równoległe i węzeł jest nieobciążony siłą zewnętrzną, to siła przekrojowa w pręcie trzecim jest równa zero (rys.c).



Metody rozwiązywania kratownic

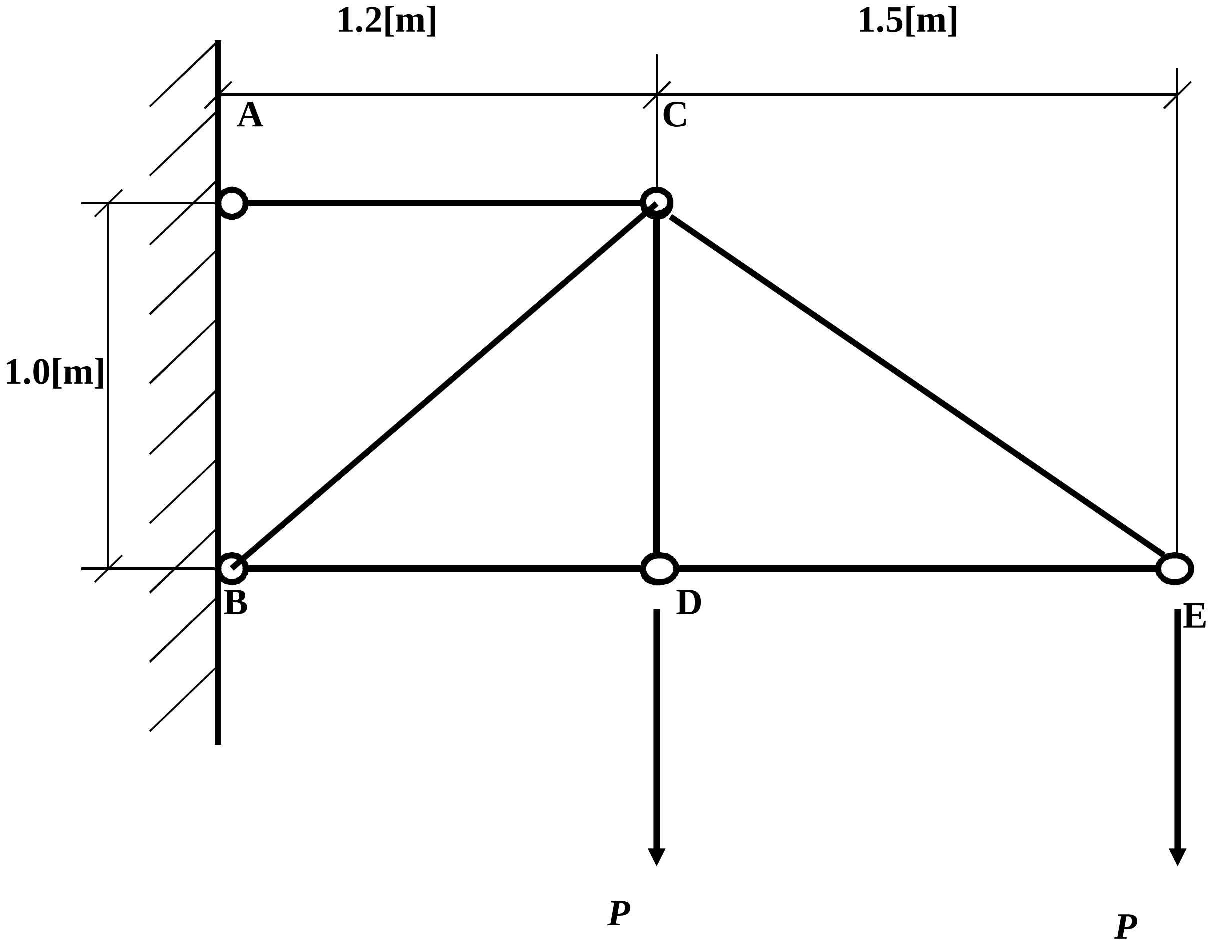


Metoda równoważenia węzłów (1)

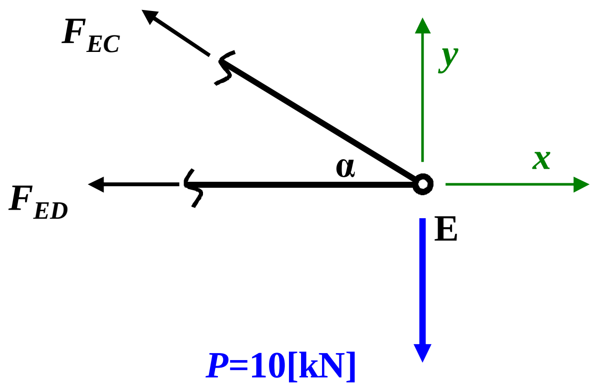
Metoda ta polega na wypisywaniu równań równowagi dla każdego myślowo wyciętego węzła kratownicy.

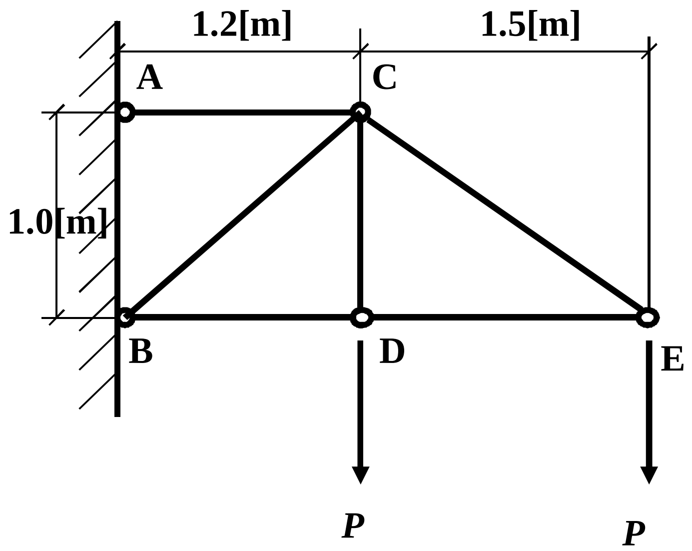
1. **Z równań równowagi wyznaczenie składowych reakcji podporowych,**
2. **W poszczególnych myślowo wyciętych węzłach kratownicy zapisuje się dwa równania równowagi: SX = 0, SY = 0. W tym celu w węźle zakłada się odpowiednie zwroty sił w poszczególnych prętach,**
3. **Z zapisanych równań równowagi wyznacza się siły we wszystkich prętach kratownicy. Rozwiązywanie najlepiej zacząć od węzła, w którym zbiegają się tylko dwa pręty o nieznanych siłach, a następnie rozpatrywać kolejne węzły spełniające ten warunek.**

Metoda równoważenia węzłów (2)



Metoda równoważenia węzłów (3)





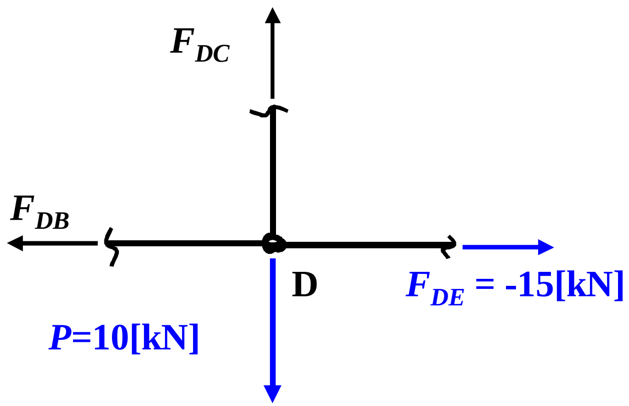
$$\sum P_{ix} = 0 \quad -F_{ED} - F_{EC}\cos a = 0$$

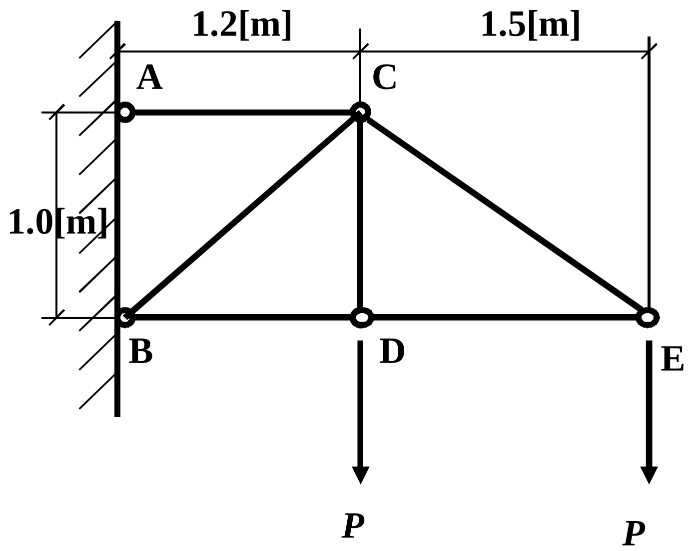
$$\sum P_{iy} = 0 \quad -P + F_{EC}\sin a = 0$$

$$F_{EC} = \frac{P}{\sin a} = \frac{10 \cdot \sqrt{3.25}}{1} = 18[\mathrm{kN}]$$

$$F_{ED} = -F_{EC}\cos a = -\frac{18 \cdot 1.5}{\sqrt{3.25}} = -15[\mathrm{kN}]$$

Metoda równoważenia węzłów (4)





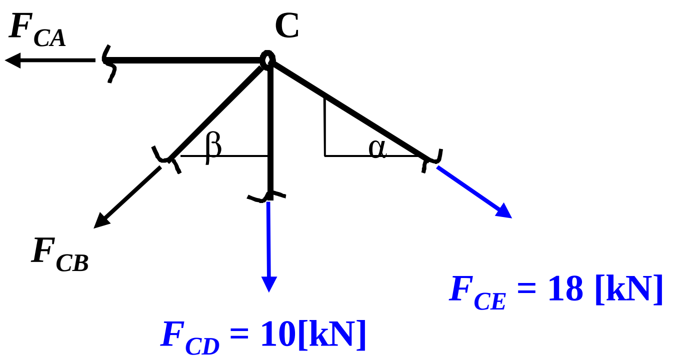
$$\sum P_{ix} = 0 \quad F_{DE} - F_{DB} = 0$$

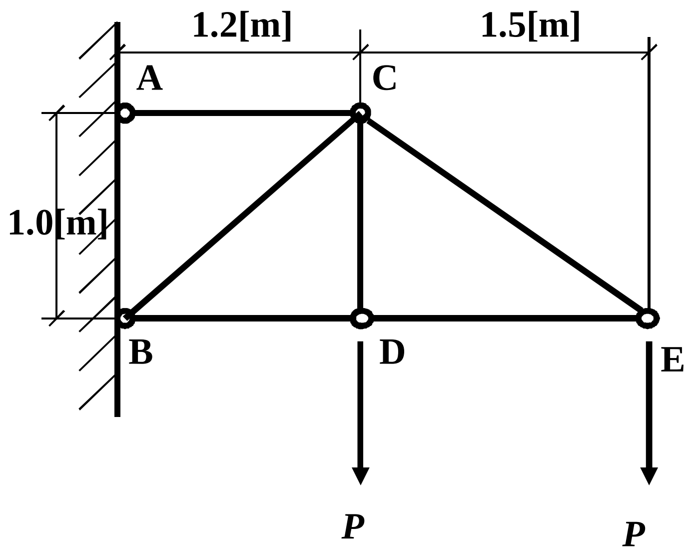
$$\sum P_{iy} = 0 \quad -P + F_{DC} = 0$$

$$F_{DB} = F_{DB} = -15[\mathrm{kN}]$$

$$F_{CD} = P = 10[\mathrm{kN}]$$

Metoda równoważenia węzłów (5)





$$\Sigma P_{ix} = 0 \qquad -F_{CA} - F_{CB}\cos b + F_{CE}\cos a = 0$$

$$\Sigma P_{iy} = 0 \qquad F_{CB}\sin b + F_{CD} + F_{CE}\sin a = 0$$

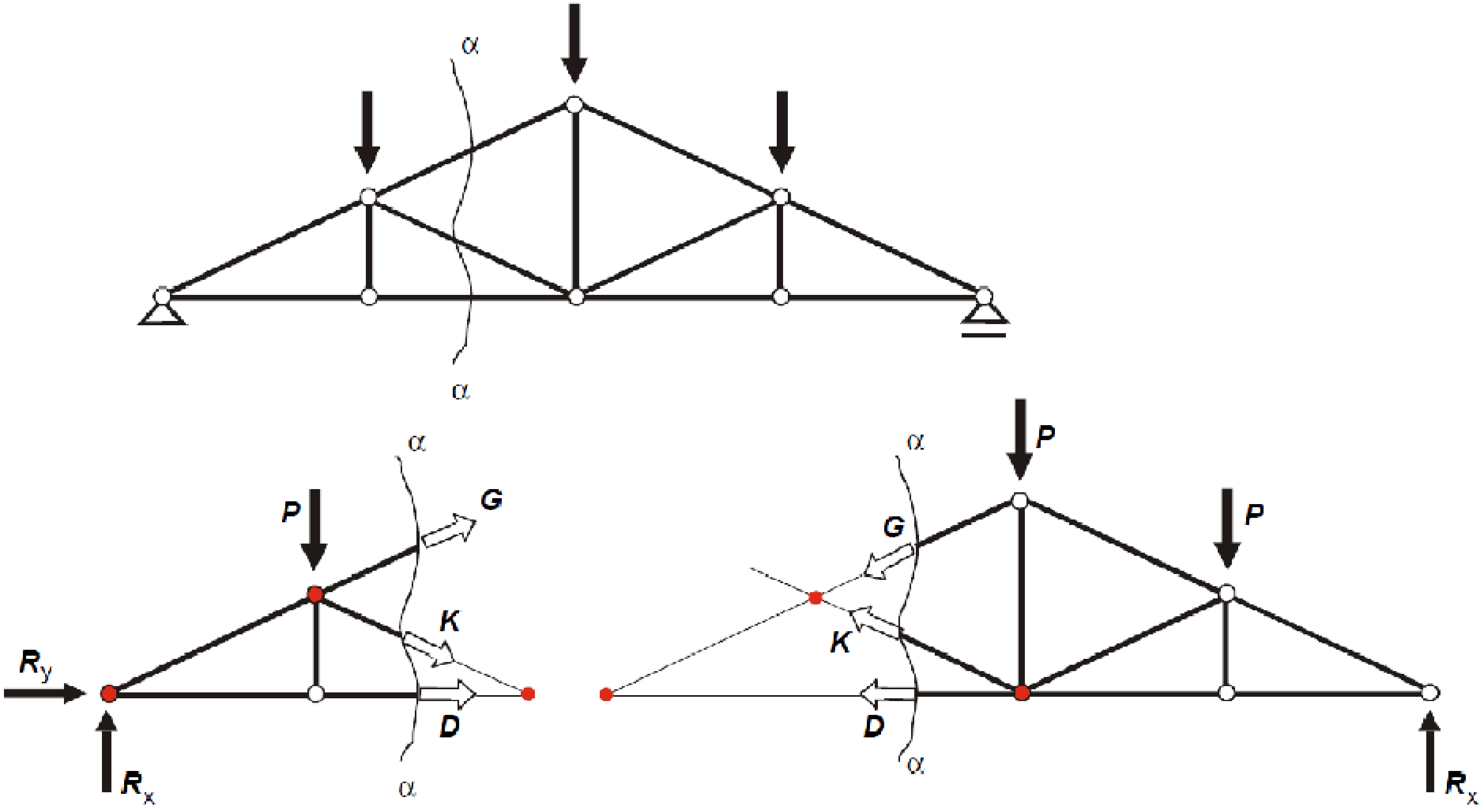
$$F_{CA} + F_{CB}\frac{1,2}{\sqrt{2,44}} = 18 \cdot \frac{1,5}{\sqrt{3,25}} \qquad F_{CA} = 38.9[\mathrm{kN}]$$

$$F_{CB}\frac{1}{\sqrt{2,44}} + 10 + 18 \cdot \frac{1}{\sqrt{3,25}} = 0 \qquad F_{CB} = -31,2[\mathrm{kN}]$$

Metoda Rittera
(metoda przekrojów)

- Z równań równowagi wyznaczenie składowych reakcji podporowych,
- Przeprowadza się przekrój $a - a$ przez trzy pręty kratownicy nie zbiegające się w jednym punkcie, w tym przez pręt (lub pręty), w których siłę chcemy wyznaczyć. Część kratownicy oddzielona przekrojem $a - a$ znajduje się w równowadze pod działaniem sił zewnętrznych, składowych reakcji podpór oraz sił w prętach, przez które poprowadzono przekrój,
- W odniesieniu do wydzielonej części kratownicy zapisuje się równania sumy momentów wszystkich sił względem trzech punktów, w których przecinają się parami kierunki poszukiwanych sił w prętach. Punkty te są nazywane *punktami Rittera*. Jeśli dwa z prętów, przez które poprowadzono przekrój, są do siebie równoległe, to zapisuje się dwa równania sumy momentów wszystkich sił działających na daną część kratownicy względem punktów, w których trzeci pręt przecina się z prętami równoległymi, oraz trzecie równanie sumy rzutów wszystkich sił na oś prostopadłą do prętów równoległych.

Metoda Rittera
(metoda przekrojów)



TARCIE

<u>TARCIEM</u> nazywamy całokształt zjawisk występujących pomiędzy stykającymi się ciałami stałymi, spowodowanych działaniem siły normalnej dociskającej te ciała oraz siły stycznej przemieszczającej je względem siebie, bądź też usiłującej je przemieścić.

Tarcie występujące w wyniku przemieszczania się ciał nazywamy *<u>tarciem kinetycznym.</u>*

Tarcie występujące w wyniku próby przemieszczania ciał nazywamy *<u>tarciem statycznym.</u>*

W zależności od charakteru ruchu pomiędzy trącymi się ciałami tarcie możemy podzielić też na:

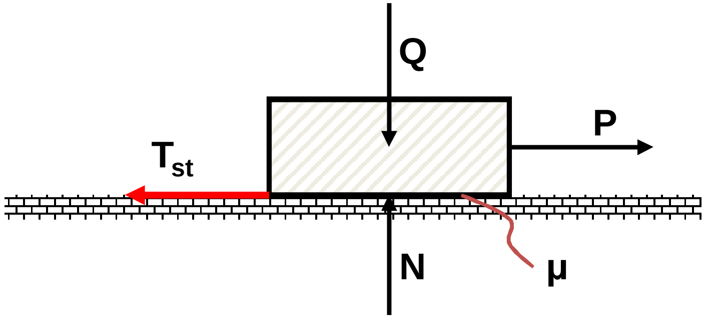
Ø tarcie ślizgowe (suwne);

Ø tarcie toczenia (toczne);

Ø tarcie wiercenia (wiertne).

TARCIE STATYCZNE

Tarcie statyczne powstaje w trakcie próby przesunięcia dwóch ciał chropowatych względem siebie. Tarcie liczbowo określa się poprzez siłę tarcia T_{st}.



Własności siły tarcia:

⇒kierunek przeciwny do działania siły P;

⇒brak wpływu wielkości powierzchni trących, a jedynie chropowatości tych powierzchni i sił docisku.

Siła tarcia statycznego T_{st} jest to reakcja styczna (styczna składowa całkowitej reakcji) przeciwstawiająca się przesunięciu ciał względem siebie.

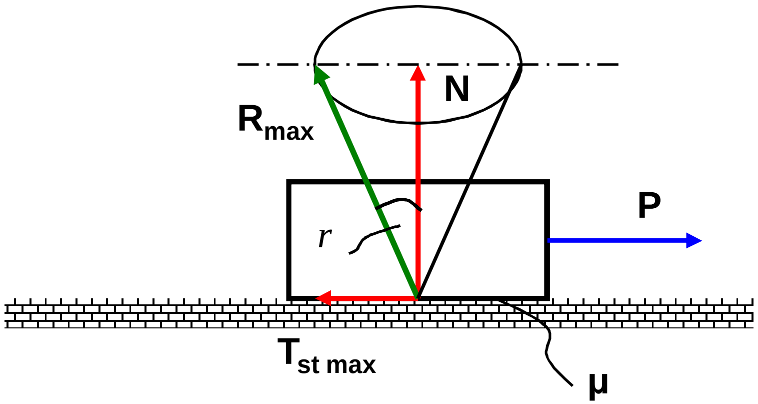
Największa wartość siły przesuwającej *P*, która przy danym ciężarze Q jeszcze nie naruszy stanu spoczynku jest równa wartości rozwiniętej siły tarcia statycznego $T_{st\,max}$:

$$P = T_{st\,\max} = \mu \cdot N$$

Ciała pozostaną w stanie równowagi gdy siła *P* nie przekroczy rozwiniętego tarcia statycznego $T_{st\,max}$:

$$P = T_{st\max} \le \mu \cdot N$$

Całkowita i maksymalna wartość reakcji podłoża R_{max} wystąpi w przypadku $T_{st} = T_{st\,max}$ i określona może być ze schematu:

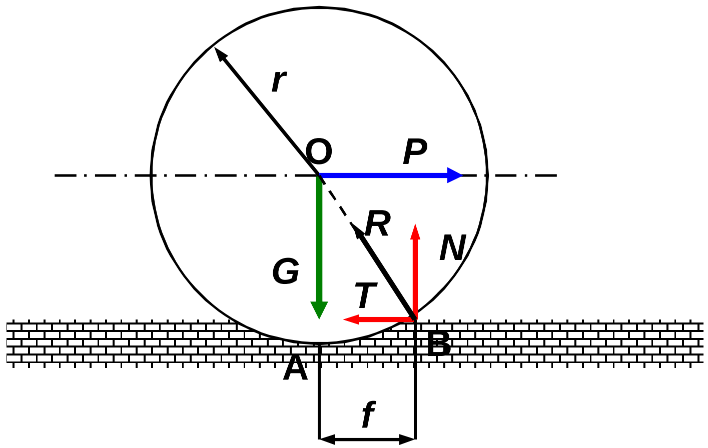


Kąt ρ pomiędzy reakcją R_{max} i normalną *N* nazywamy kątem tarcia i wyznaczamy z równania:

$$\mathrm{tg}\,\rho = \mu = \frac{T_{st\max}}{N}$$

TARCIE TOCZNE

Tarcie toczne (toczenia) **powstaje przy usiłowaniu przetoczenia walca o ciężarze *G* po poziomej płaszczyźnie za pomocą siły *P*.**



Wartość siły P zdolnej do wprawienia w ruch walca oblicza się z równania równowagi:

$$\sum M_A = -N \cdot f + P \cdot r = 0$$

Po przekształceniu otrzymujemy:

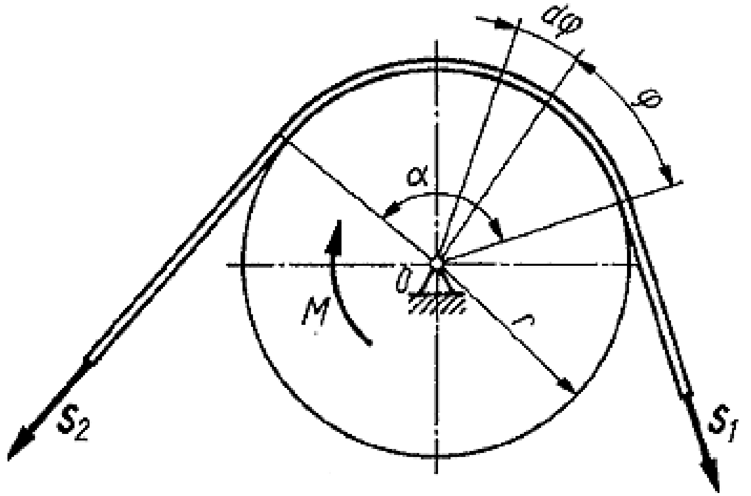
$$P = G \cdot \frac{f}{r}$$

gdzie: ***f*** **- współczynnik tarcia tocznego, [m],**

r **- promień walca, [m].**

TARCIE CIĘGIEN

Tarciem cięgna o krążek **nazywamy siły tarcia występujące między powierzchniami cylindrycznymi i cięgnami na nie nawiniętymi.**



Związek między napięciami *S_1* i *S_2* (*S_1*< *S_2*) w cięgnie opasującym krążek wyraża się wzorem:

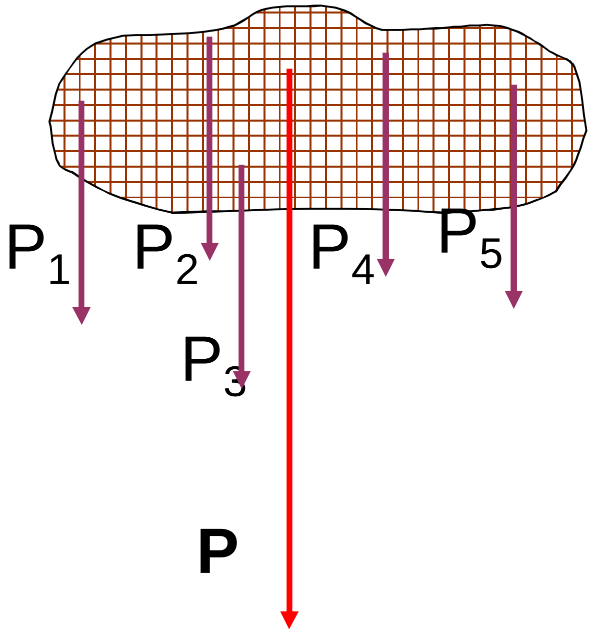
$$S_2 = S_1 \cdot e^{m \cdot a}$$

gdzie: m **- współczynnik tarcia ślizgowego (statycznego) między cięgnem a powierzchnią krążka,**

a **- kąt opasania, na którym cięgno przylega do krążka.**

UKŁAD SIŁ RÓWNOLEGŁYCH

Układ sił równoległych **jest to taki układ w którym linie działania wszystkich sił są do siebie równoległe.**



Układ sił równoległych można zastąpić siłą wypadkową *P* w której linia działania jest równoległa do linii działania danych sił a jej wartość równa się sumie algebraicznej rzutów sił na oś skierowaną zgodnie z układem sił.

Współrzędne środka sił równoległych wyznaczamy obracając wszystkie siły o kąt prosty, po wcześniejszym określeniu wypadkowej P.

$$P = \sum_{i=1}^{n} P_i$$

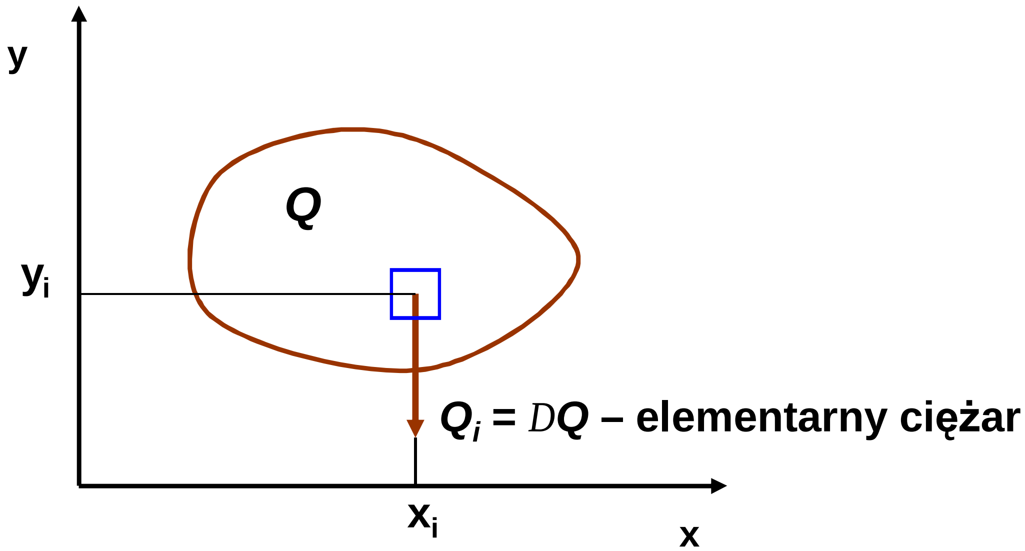
Środek sił równoległych obliczamy ze wzoru:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P_i}{\sum_{i=1}^{n} P_i}$$

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot P_i}{\sum_{i=1}^{n} P_i}$$

ŚRODKI CIĘŻKOŚCI

Środkiem ciężkości bryły materialnej nazywamy graniczne położenie środka sił równoległych, które są środkiem ciężkości poszczególnych cząstek bryły przy założeniu, że każdy wymiar cząstki bryły dąży do zera.



Dla takiego układu środki ciężkości wyznaczamy ze wzorów:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot Q_i}{\sum_{i=1}^{n} Q_i} \qquad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot Q_i}{\sum_{i=1}^{n} Q_i} \qquad z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i \cdot Q_i}{\sum_{i=1}^{n} Q_i}$$

Jeżeli analizowana bryła jest jednorodna, tzn. ciężar właściwy g jest stały w każdym elementarnym ciężarze Q_i, przy objętości elementarnej DV_i to dzieląc przez ciężar właściwy g otrzymamy:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \Delta V_i}{\sum_{i=1}^{n} V_i} \qquad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \Delta V_i}{\sum_{i=1}^{n} V_i} \qquad z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i \cdot \Delta V_i}{\sum_{i=1}^{n} V_i}$$

Przechodząc do granicy, zależności na środki ciężkości przybierają postać:

$$x_c = \frac{\int_V x \cdot \Delta V}{V} \qquad y_c = \frac{\int_V y \cdot \Delta V}{V} \qquad z_c = \frac{\int_V z \cdot \Delta V}{V}$$

gdzie: $V = \int_V \Delta V$

Zależności na środki ciężkości brył są słuszne również dla figur płaskich o powierzchni całkowitej *S*:

$$x_c = \frac{\int_S x \cdot \Delta S}{S} \qquad y_c = \frac{\int_S y \cdot \Delta S}{S} \qquad z_c = \frac{\int_S z \cdot \Delta S}{S}$$

gdzie: $$S = \int_S \Delta S$$

podobnie jak dla linii o długości *L*:

$$x_c = \frac{\int_L x \cdot \Delta L}{L} \qquad y_c = \frac{\int_L y \cdot \Delta L}{L} \qquad z_c = \frac{\int_L z \cdot \Delta L}{L}$$

gdzie: $$L = \int_L \Delta L$$

Twierdzenia wynikające ze wzorów na środki ciężkości:

1 **Środek ciężkości bryły, figury płaskiej lub linii (układu) mającej środek symetrii leży w tym środku;**

2 **Jeżeli układ ma płaszczyznę symetrii, to środek ciężkości leży na tej płaszczyźnie;**

3 **Jeżeli układ ma oś symetrii, to środek ciężkości leży na tej osi;**

4 **Jeżeli układ ma dwie lub więcej osi symetrii, to środek ciężkości leży w punkcie przecięcia się tych osi,**

5 **Rzut środka ciężkości figury płaskiej na płaszczyznę jest środkiem ciężkości rzutu tej figury na daną płaszczyznę.**

PIERWSZE TWIERDZENIE GULDINA

Pole powierzchni *S* powstałej wskutek obrotu płaskiej linii dookoła płaskiej osi leżącej w płaszczyźnie tej linii jest równe długości tej linii *L* pomnożonej przez długość okręgu 2px$_c$:

$$S = L \cdot 2px_c$$

gdzie: x_c – środek ciężkości linii *L*

DRUGIE TWIERDZENIE GULDINA

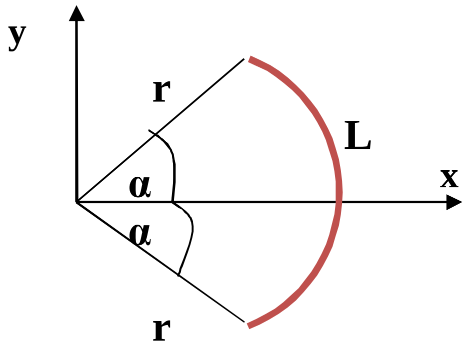
Objętość bryły *V* powstałej wskutek obrotu figury płaskiej *S* dookoła osi leżącej w tej płaszczyźnie i nie przecinającej jej równa się iloczynowi jej powierzchni *S* przez długość jej obrotu 2px$_c$:

$$V = S \cdot 2px_c$$

Środki ciężkości wybranych figur płaskich:

- dla linii łuku koła:

$$x_c = \frac{r \sin a}{a}$$

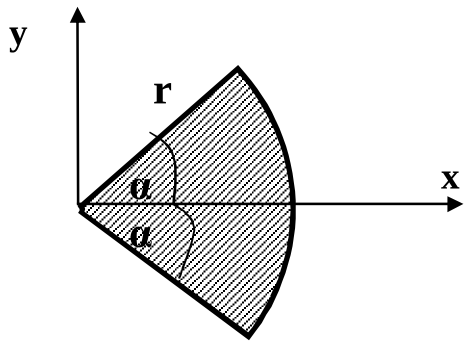


- dla linii półkola:

$$x_c = \frac{2r}{p}$$

- dla wycinka koła:

$$x_c = \frac{\frac{2}{3} r \sin a}{a}$$

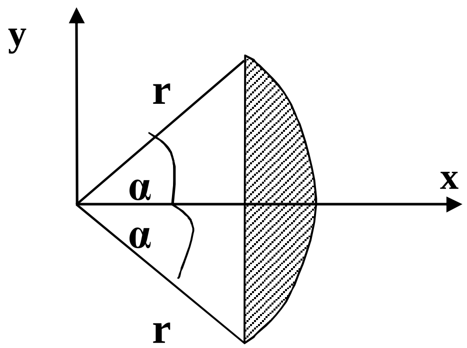


- dla półkola:

$$x_c = \frac{4}{3} \cdot \frac{r}{p}$$

- dla linii łuku koła:

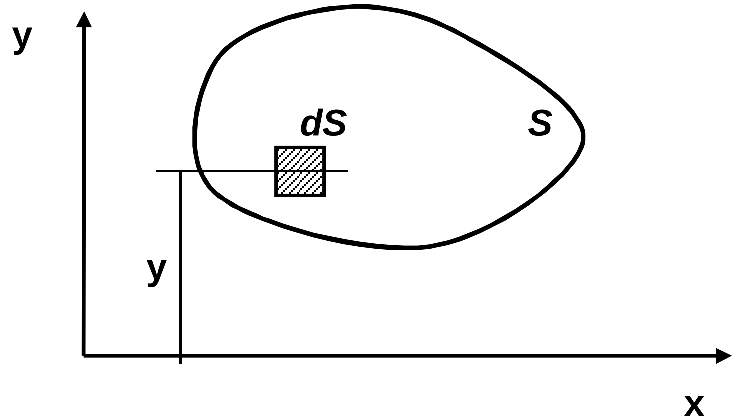
$$x_c = \frac{4}{3} \cdot \frac{r \sin^3 a}{2a - \sin^2 a}$$



MOMENT BEZWŁADNOŚCI WZGLĘDEM OSI

Momentem bezwładności ***I_x*** **figury płaskiej względem osi x nazywamy sumę iloczynów elementarnych pól d*S* tego pola i kwadratów odległości tych pól od osi *x*.**

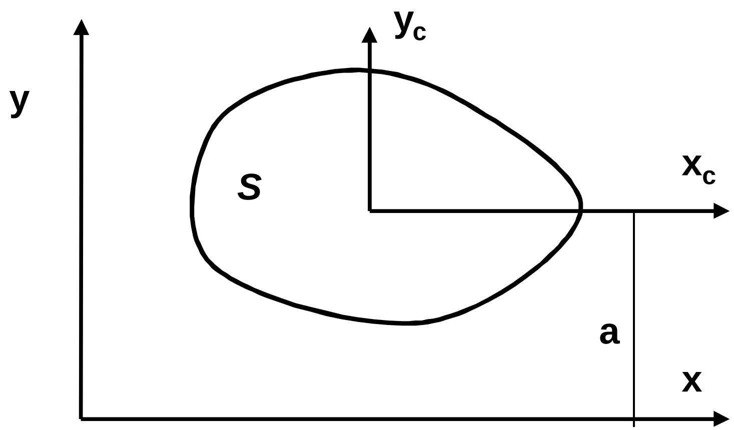
$$I_x = \int_S y^2 \, dS$$



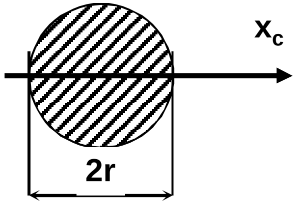
TWIERDZENIE STEINERA

Moment bezwładności względem dowolnej osi *x* równoległej do osi x_c przechodzącej przez środek ciężkości, równy jest sumie: momentu bezwładności względem osi x_c oraz iloczynu pola powierzchni figury *S* i kwadratu odległości *a* pomiędzy osiami.

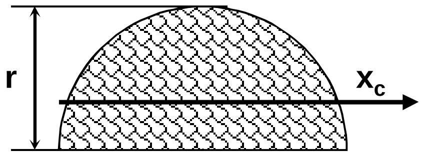
$$I_x = I_{x_c} + Sa^2$$



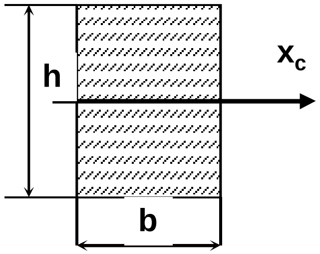
PRZYKŁADOWE WARTOŚCI OSIOWYCH MOMENTÓW BEZWŁADNOŚCI



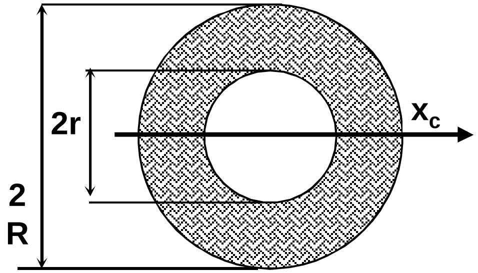
$$I_x = \frac{p\ r^4}{4} = \frac{p\ d^4}{64}$$



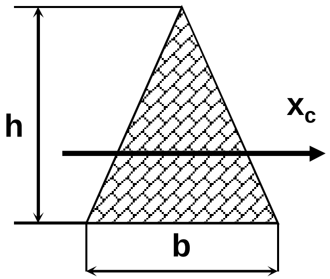
$$I_x = 0{,}11 r^4$$



$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12}$$



$$I_x = \frac{p\left(R^4 - r^4\right)}{4}$$

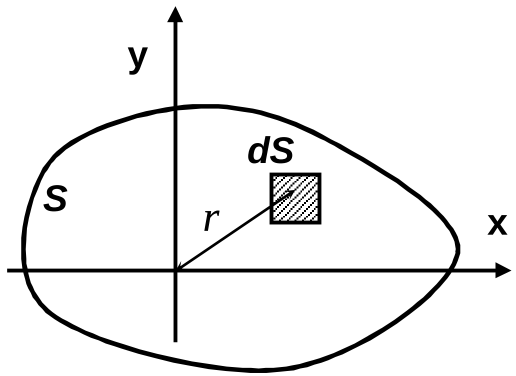


$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{36}$$

BIEGUNOWY MOMENT BEZWŁADNOŚCI

Odśrodkowym momentem bezwładności nazywamy sumę iloczynów pól d*S* i kwadratu odległości środków ciężkości tych pól od środka przyjętego układu współrzędnych. Biegunowy moment bezwładności określamy wzorem:

$$I_o = \int_S r^2 \, \mathrm{d}S$$



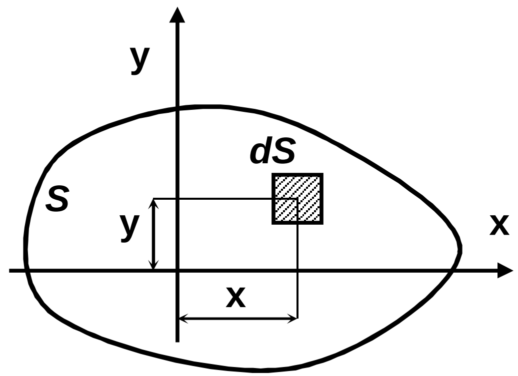
lub

$$I_o = I_x + I_y$$

ODŚRODKOWY MOMENT BEZWŁADNOŚCI

Odśrodkowym (dewiacyjnym) momentem bezwładności nazywamy sumę iloczynów pól d*S* i odległości środków ciężkości tych pól od osi współrzędnych y i x.

$$I_{yx} = \int_S yx\,\mathrm{d}S$$



Odśrodkowy moment bezwładności może przyjmować wartości dodatnie lub ujemne.